UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo Diferencial (EC-MR02) SEMESTRE: 2011.1

PROFESSOR: *Adriano Cattai* DATA: 07/04/2011

NOME: ______________________________

1ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *Utilize caneta **preta** ou **azul**. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
2. *É proibido o uso de calculadora e celulares;*
3. *Solução ilegível é considerada como errada;*
4. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
5. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
6. *Não responder na folha de questões.*

"Lembre-se que as pessoas podem tirar tudo de você, menos o seu conhecimento. É o seu bem mais precioso. Explore; viaje; descubra. Conheça." (Albert Einstein)

Boa Prova!

Q. 1 (1,5)***.***

(a) Escreva a definição de função contínua num ponto;

(b) Dê exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, para todo $x \neq 2$ e que seja possível redefinir (e redefina) $f(2)$ para que f seja contínua;

(c) Dê exemplo de uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja contínua, para todo $x \neq 0$ e que não seja possível redefinir $g(0)$ para que g se torne contínua.

(a) Dizemos que uma função f é contínua no ponto $x = a \in \text{Dom}(f)$ se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$;

(b) Seja $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 1 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$. Assim, temos que f não é contínua (apenas) em $x = 2$. Agora, se modificarmos, na definição de f, $f(2) = 1$ para $f(2) = 3$, teremos f contínua;

(c) Seja $g(x) = \dfrac{1}{x^2}, \forall x \neq 0$ e $g(x) = 1$ se $x = 0$. Neste caso, não podemos atribuir algum valor para $f(0)$ de modo que fique igual ao $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ visto que, este limite é infinito.

Q. 2 (3,0)***.*** Avalie, cada limite abaixo:

(a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-\sec(h)}{3h^2}$ (b) $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sqrt{1+y+y^2}-1}{y}$ (c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-6x^2+12x-8}$

(a) O limite é indeterminado (0/0) pois $\lim\limits_{h\to 0} 1-\sec(h) = 0$ e $\lim\limits_{h\to 0} 3h^2 = 0$. Como $1-\sec(h) = 1 - \dfrac{1}{\cos(h)} = \dfrac{\cos(h)-1}{\cos(h)}$ e $[\cos(h)-1]\cdot[\cos(h)+1] = -\text{sen}^2(h)$ temos:

$$\frac{1-\sec(h)}{3h^2} = \frac{-\text{sen}^2(h)}{3h^2\cdot\cos(h)[\cos(h)+1]} = -\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\text{sen}(h)}{h}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos(h)[\cos(h)+1]}$$

Portanto, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-\sec(h)}{3h^2} = \lim\limits_{h\to 0} -\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{\text{sen}(h)}{h}\right)^2\cdot\dfrac{1}{\cos(h)[\cos(h)+1]} = -\dfrac{1}{3}\cdot 1^2\cdot\dfrac{1}{1\cdot 2} = -\dfrac{1}{6}$.

(b) Perceba que este limite é indeterminado (0/0) pois, $\lim\limits_{y\to 0}\sqrt{1+y+y^2}-1 = 0$ e $\lim\limits_{y\to 0} y = 0$. Racionalizando o numerador, temos:

$$\frac{\sqrt{1+y+y^2}-1}{y} = \frac{\left[\sqrt{1+y+y^2}-1\right]\cdot\left[\sqrt{1+y+y^2}+1\right]}{y\cdot[\sqrt{1+y+y^2}+1]} = \frac{y+y^2}{y\cdot[\sqrt{1+y+y^2}+1]} = \frac{1+y}{\sqrt{1+y+y^2}+1}.$$

Assim, $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt{1+y+y^2}-1}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1+y}{\sqrt{1+y+y^2}+1} = \dfrac{1}{2}$.

(c) O $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-6x^2+12x-8}$ é indeterminado (0/0), pois $\lim\limits_{x\to 2} x^3-5x^2+8x-4 = 0$ e $\lim\limits_{x\to 2} x^3-6x^2+12x-8 = 0$. Podemos dividir os polinômios, ambos, por $x-2$, obtendo:

$$\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-6x^2+12x-8} = \frac{(x-2)\cdot(x^2-3x+2)}{(x-2)\cdot(x^2-4x+4)} = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}.$$

Como $x^2-3x+2=(x-2)\cdot(x-1)$ e $x^2-4x+4=(x-2)^2$, temos:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-6x^2+12x-8} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot(x-1)}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x-2}.$$

Note que este limite não existe, pois é infinito. Além disso, temos $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$.

***Q.* 3** (2,8)**.** Em cada item, determine, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa. Quando falsa, você pode justificar exibindo um contra exemplo.

(a) Se f é um função contínua tal que $f(-1)=3$, então $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -1$;

(b) Sabe-se que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$. Então, $f(x) > 0$ para todo $x \in (1,3)$;

(c) Se $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3-f(x)}{x-1}$ é finito, então $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ pode ser qualquer valor;

(d) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função tal que $f(x)>0$ para todo $x\neq 3$ com $f(3)=-2$, então $\nexists \lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

(a) Falso! Por exemplo, a função constante $f(x)=3$ é contínua e $f(-1)=3$. No entanto, $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 3 \neq -1$.

(b) Falso! Veja que, para a função $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{se} \quad x\neq 2 \\ -1 & \text{se} \quad x=2 \end{cases}$ temos $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$. No entanto, $f(2) = -1 < 0$ contrariando a afirmação $f(x) > 0$ *para todo* $x \in (1,3)$.

(c) Falso! Como $\lim\limits_{x\to 1} x-1 = 0$ e $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3-f(x)}{x-1}$ é finito, devemos ter, obrigatoriamente, $\lim\limits_{x\to 1} 3-f(x) = 0$ pois, caso contrários, teríamos uma impossibilidade $\dfrac{K}{0}$. Portanto, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$.

(d) Falso! Veja que a função $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x\neq 3 \\ -2 & \text{se} \quad x=3 \end{cases}$ satisfaz $f(x)>0$ se $x\neq 3$ e, $f(3)=-2$. No entanto, existe o limite $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, que é igual a 2.

***Q.* 4** (2,7)**.** Dada a função $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x<-1 \\ 1-x^2 & \text{se} \quad -1<x<1 \\ x-1 & \text{se} \quad x>1 \\ 2 & \text{se} \quad x\in\{-1,1\} \end{cases}$, faça seu esboço gráfico, determine os limites abaixo e decida (justificando) se existe algum ponto em que f é descontínua.

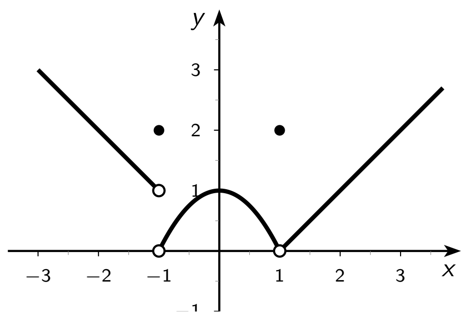
(a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ (f) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

Pelo gráfico, afirmamos que:

(a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$; (b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$; (c) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 0$; (d) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 1$; (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ e (f) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$.

Como não existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, visto que $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$, f não é contínua em $x=-1$. Além disso, temos que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0 \neq f(1) = 2$, ou seja, f também não é contínua em $x=1$.



***Q.* 5** (Extra: 1,0)**.** Mostre que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{x} = 1$.