UNIVERSIDADE SALVADOR
DISCIPLINA: Cálculo Diferencial (EC-MR01) SEMESTRE: 2011.1
PROFESSOR: *Adriano Cattai* DATA: 11/05/2011

NOME: ______________________________

2ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *Utilize caneta* ***preta*** *ou* ***azul***. *Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
2. *É proibido o uso de calculadora e celulares;*
3. *Solução ilegível é considerada como errada;*
4. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
5. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
6. *Não responder na folha de questões.*

"Não se pode esperar resultados diferentes fazendo as coisas da mesma forma." (Albert Einstein)

Boa Prova!

Q.* 1** (1,6).*** Dada a função $f(x) = \dfrac{x+1}{2-x}$ mostre que $f'(x) = \dfrac{3}{(2-x)^2}$, por duas formas diferentes:

(a) Pela definição de derivada;

(b) Pelas regras de derivação.

(a) Usaremos o limite $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ para determinar a derivada de f num ponto x_0 qualquer. Vejamos:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{x+1}{2-x} - \dfrac{x_0+1}{2-x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{(x+1)(2-x_0)-(2-x)(x_0+1)}{(2-x)(2-x_0)}}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{2x - xx_0 + 2 - x_0 - (2x_0 + 2 - xx_0 - x)}{(2-x)(2-x_0)(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{3(x-x_0)}{(2-x)(2-x_0)(x-x_0)} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{3}{(2-x)(2-x_0)} = \frac{3}{(2-x_0)^2}. \end{aligned}$$

Assim, como x_0 é qualquer, escrevemos $f'(x) = \dfrac{3}{(2-x)^2}$, $\forall\, x \neq 2$.

(b) Pela regra do quociente, para derivadas, temos:

$$f'(x) = \left[\frac{x+1}{2-x}\right]' = \frac{[x+1]'(2-x)-(x+1)[2-x]'}{(2-x)^2} = \frac{1\cdot(2-x)-(x+1)\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \frac{3}{(2-x)^2}.$$

Q.* 2** (2,0).*** Seja $f(x) = |x^2-1|$. Existe(m) ponto(s) em que f não seja suave? Para responder, analise por dois modos:

(a) Analiticamente; (b) Geometricamente.

(a) Primeiramente, vamos reescrever f como uma função de duas sentenças, já que envolve a função modular. Assim, ficamos com:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{se} \quad x^2-1 \geq 0 \\ -(x^2-1) & \text{se} \quad x^2-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2-1 & \text{se} \quad x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 1-x^2 & \text{se} \quad -1 < x < 1 \end{cases}.$$

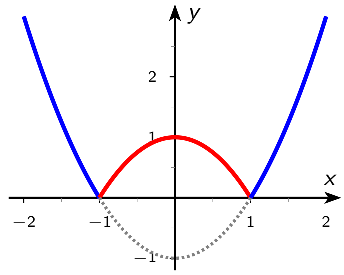
Derivando, cada sentença, temos: $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se} \quad x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ -2x & \text{se} \quad -1 < x < 1 \end{cases}$.

Assim, podemos afirmar que $f'(x) = 2x$ para todo $x \leq -1$ ou $x \geq 1$ e que, $f'(x) = -2x$ para todo $-1 < x < 1$. Agora, quando $x=-1$ e $x=1$, temos, respectivamente:

- $f'_-(-1) = 2\cdot(-1) = -2$ e $f'_+(-1) = -2\cdot(-1) = 2 \Rightarrow \nexists\ f'(-1)$;
- $f'_-(1) = -2\cdot(1) = -2$ e $f'_+(1) = 2\cdot(1) = 2 \Rightarrow \nexists\ f'(1)$.

Assim, f não é derivável quando $x = -1$ ou quando $x = -1$, ou seja, f é suave em $\mathbb{R} - \{-1, 1\} \neq \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Portanto f não é suave.

(b) No gráfico ao lado, a linha azul refere-se à função quando $x \leq -1$ ou $x \geq 1$, ou seja, $f(x) = x^2 - 1$ e, a linha vermelha $f(x) = 1 - x^2$ quando $-1 < x < 1$. Note, a partir deste gráfico, que f não é derivável nos pontos em que $x = -1$ e $x = 1$, visto que eles apresentam “quinas”. Assim, podemos ver, pelo gráfico, que f não é suave, apenas, nesses pontos por não admitir uma reta tangente.



Q. 3 (3,2)**.** Julgue, justificando, em verdadeiro ou falso, cada item abaixo:

(a) Nem toda função contínua é suave;

(b) Uma função F é chamada *primitiva* de f, num conjunto A, se $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in A$. Assim, dada uma função f qualquer, afirmamos que f admite uma única primitiva, ou seja, f possui apenas uma primitiva;

(c) Pela regra do quociente, para derivadas, temos: $[\text{cotg}(x)]' = \left[\dfrac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}\right]' = \dfrac{-\text{sen}(x)}{\cos(x)} = -\text{tg}(x)$;

(d) Se $f(x) = (1 + \sqrt[3]{x})^3$, então $f'(x) = 3(1 + \sqrt[3]{x})^2$

(a) Verdadeiro. A função dada na questão anterior é contínua e não é suave.

(b) Falso. Por exemplo, as funções $F_1(x) = x^2 + 1$, $F_2(x) = x^2 + 2$ e $F_3(x) = x^2 + 3$ são primitivas da função $f(x) = 2x$, visto que $[x^2]' = 2x$ e que a derivada da constante é zero. Portanto, podemos afirmar que uma função possui infinitas primitivas.

(c) Falso. O correto é:

$$[\text{cotg}(x)]' = \left[\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}\right]' = \frac{-\text{sen}(x)\cdot\text{sen}(x) - \cos(x)\cdot(\cos(x))}{\text{sen}^2(x)} = \frac{-\text{sen}^2(x) - \cos^2(x)}{\text{sen}^2(x)} = \frac{-1}{\text{sen}^2(x)} = -\text{cossec}^2(x).$$

(d) Falso. Como $f(x) = (1 + \sqrt[3]{x})^3 = 1 + 3\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{x^2} + x$, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [1 + 3\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{x^2} + x]' = [1]' + [3\sqrt[3]{x}]' + [3\sqrt[3]{x^2}]' + [x]' = 0 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 1 \\ &= \frac{1 + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{(1 + \sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}}. \end{aligned}$$

Obs: Com o uso da regra da cadeia: $f'(x) = [(1 + \sqrt[3]{x})^3]' = 3(1 + \sqrt[3]{x})^2 \cdot [1 + \sqrt[3]{x}]' = \dfrac{3(1 + \sqrt[3]{x})^2}{3\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{(1 + \sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Q. 4 (2,0)**.** Seja $V(x)$ o volume de um cilindro circular reto de $x\ cm$ de raio e altura constante $h = 5\ cm$. Usando uma aproximação com duas casas decimais após a vírgula, determine:

(a) A razão de variação média do volume quando a medida do raio varia de $3\ cm$ para $3,1\ cm$ e, depois, quando varia de $3\ cm$ para $3,2\ cm$;

(b) A razão de variação instantânea do volume por variação em centímetros no comprimento do raio x, quando $x = 3\ cm$.

(a) Como volume de um cilindro circular reta de altura finita é o produto entre a medida da área da base pela medida da altura, escrevemos $V(x) = 5\pi x^2$. Assim, temos:

$$\diamond\ \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{V(3,1) - V(3)}{3,1 - 3} = \frac{5\pi(3,1^2 - 3^2)}{0,1} = 50\pi(9,61 - 9) = 30,5\pi \approx 95,77;$$

$$\diamond\ \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{V(3,2) - V(3)}{3,2 - 3} = \frac{5\pi(3,2^2 - 3^2)}{0,2} = 25\pi(10,24 - 9) = 31\pi \approx 97,34.$$

(b) Como a razão de variação instantânea é o limite da razão da variação média, quando $\Delta x \to 0$, isto é, a derivada, temos:

$$V'(x) = 10\pi x \Longrightarrow V'(3) = 30\pi\ cm^3/cm \approx 94,2\ cm^3/cm.$$