UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo Diferencial (EC-MR01) SEMESTRE: 2011.1

PROFESSOR: *Adriano Cattai* DATA: 06/04/2011

NOME: ______________________________

1ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *Utilize caneta **preta** ou **azul**. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
2. *É proibido o uso de calculadora e celulares;*
3. *Solução ilegível é considerada como errada;*
4. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
5. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
6. *Não responder na folha de questões.*

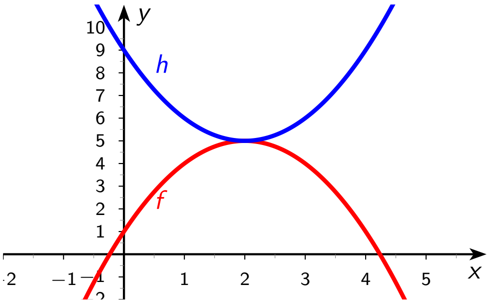
““Lembre-se que as pessoas podem tirar tudo de você, menos o seu conhecimento. É o seu bem mais precioso. Explore; viaje; descubra. Conheça.” (Albert Einstein)

Boa Prova!

Q. 1 (1,5)***.*** Uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Supondo que $f(x) = 1 + 4x - x^2$ e $h(x) = x^2 - 4x + 9$, construa, num mesmo sistema de coordenadas, os gráficos de f e h para determinar $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$. Em seguida, justifique analiticamente.

O teorema do confronto (ou do sanduíche) nos diz que:

se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *e* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$, *então* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$.



Como

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} 1 + 4x - x^2 = 5$$

$$\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2} x^2 - 4x + 9 = 5$$

segue que $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 5$.

Q. 2 (3,0)***.*** Avalie, cada limite abaixo:

(a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-\cos(3h)}{4h^2}$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{x^3-8}$

(a) O limite é indeterminado $(0/0)$ pois $\lim\limits_{h\to 0} 1-\cos(3h) = 0$ e $\lim\limits_{h\to 0} 4h^2 = 0$. Como $[1-\cos(3h)]\cdot[1+\cos(3h)] = 1-\cos^2(3h) = \operatorname{sen}^2(3h)$ e $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3h)}{3h} = \lim\limits_{3h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3h)}{3h} = 1$, temos:

$$\frac{1-\cos(3h)}{4h^2} = \frac{[1-\cos(3h)]\cdot[1+\cos(3h)]}{4h^2\cdot(1+\cos(3h))} = \frac{\operatorname{sen}^2(3h)}{4h^2\cdot(1+\cos(3h))} = \frac{\operatorname{sen}^2(3h)}{(3h)^2}\cdot\frac{9}{4\cdot(1+\cos(3h))}.$$

Portanto, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-\cos(3h)}{4h^2} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2(3h)}{(3h)^2} \cdot \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{9}{4\cdot(1+\cos(3h))} = 1^2 \cdot \dfrac{9}{4\cdot 2} = \dfrac{9}{8}$.

(b) Perceba que este limite é indeterminado $(\infty - \infty)$ pois, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x} = \sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x} = \sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty} x^2} = +\infty$. Racionalizando a expressão, temos:

$$\frac{\left[\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right]\cdot\left[\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right]}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \frac{x^2+x-x^2+x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}.$$

Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = 1.$

(c) O $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{x^3-8}$ é indeterminado (0/0), pois $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+1}-\sqrt{3}=0$ e $\lim\limits_{x\to 2}x^3-8=0$. Podemos racionalizar o numerador e fatorar o denominador, como segue:

$$\frac{\left[\sqrt{x+1}-\sqrt{3}\right]\cdot\left[\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right]}{[x^3-8]\cdot\left[\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right]}=\frac{x+1-3}{(x-2)\cdot(x^2+4x+4)\cdot\left[\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right]}=\frac{1}{(x^2+4x+4)\cdot\left[\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right]}$$

Tendo $x\to 2$, temos:

$$\frac{1}{(x^2+4x+4)\cdot\left[\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right]}\to\frac{1}{(2^2+4\cdot 2+4)\cdot\left[\sqrt{2+1}+\sqrt{3}\right]}=\frac{1}{24\sqrt{3}}.$$

Assim, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{x^3-8}=\dfrac{1}{24\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{72}$.

***Q.* 3** (2,8)**.** Em cada item, determine, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa. Quando falsa, voccê pode justificar exibindo um contra exemplo.

(a) Se f é um função contínua tal que $f(-1)=3$, então $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=-1$;

(b) Sabe-se que $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=5$. Então, $f(x)>0$ para todo $x\in(1,3)$;

(c) Se $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-f(x)}{x-1}$ é finito, então $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ pode ser qualquer valor;

(d) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função tal que $f(x)>0$ para todo $x\neq 3$ com $f(3)=-2$, então $\nexists\lim\limits_{x\to 3}f(x)$.

(a) Falso! Por exemplo, a função constante $f(x)=3$ é contínua e $f(-1)=3$. No entanto, $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=3\neq -1$.

(b) Falso! Veja que, para a função $f(x)=\begin{cases}5 & \text{se} \quad x\neq 2\\ -1 & \text{se} \quad x=2\end{cases}$ temos $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=5$. No entanto, $f(2)=-1<0$ contrariando a afirmação $f(x)>0$ *para todo* $x\in(1,3)$.

(c) Falso! Como $\lim\limits_{x\to 1}x-1=0$ e $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-f(x)}{x-1}$ é finito, devemos ter, obrigatoriamente, $\lim\limits_{x\to 1}3-f(x)=0$ pois, caso contrários, teríamos uma impossibilidade $\dfrac{K}{0}$. Portanto, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=3$.

(d) Falso! Veja que a função $f(x)=\begin{cases}2 & \text{se} \quad x\neq 3\\ -2 & \text{se} \quad x=3\end{cases}$ satisfaz $f(x)>0$ se $x\neq 3$ e, $f(3)=-2$. No entanto, existe o limite $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$, que é igual a 2.

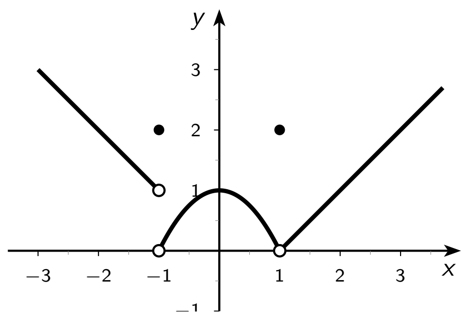
***Q.* 4** (2,7)**.** Dada a função $f(x)=\begin{cases}-x & \text{se} \quad x<-1\\ 1-x^2 & \text{se} \quad -1<x<1\\ x-1 & \text{se} \quad x>1\\ 2 & \text{se} \quad x\in\{-1,1\}\end{cases}$, faça seu esboço gráfico, determine os limites abaixo e decida (justificando) se existe algum ponto em que f é descontínua.

(a) $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$ (e) $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)$ (f) $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$

Pelo gráfico, afirmamos que:

(a) $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$; (b) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=0$; (c) $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=0$; (d) $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=1$; (e) $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$ e (f) $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=+\infty$.



Como não existe $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$, visto que $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)$, f não é contínua em $x=-1$. Além disso, temos que $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0\neq f(1)=2$, ou seja, f também não é contínua em $x=1$.