**UNIVERSIDADE SALVADOR**

DISCIPLINA: Cálculo Diferencial (EC-NR05) SEMESTRE: 2010.2

PROFESSOR: *Adriano Cattai* DATA: 23/11/2010

NOME: ______________________________

## 2ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *Utilize caneta **preta** ou **azul**. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
2. *É proibido o uso de calculadora e celulares;*
3. *Solução ilegível é considerada como errada;*
4. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
5. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
6. *Não responder na folha de questões.*

"Na Matemática, para saborear bem o fruto, é preciso conhecer bem suas raízes.." (Desconhecido)

**Boa Prova!**

***Q.* 1** (2,0)***.*** Dadas as afirmativas abaixo, julgue (justificando) em VERDADEIRO ou FALSO.

(a) Dizemos que uma função $f$ é *suave* num intervalo $D$ se $f$ é derivável em todos os pontos de $D$. Assim, toda função contínua é suave.

(b) Como as $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = \ln(2x)$ são diferentes para todo $x > 0$, então suas derivadas também são diferentes, para todo $x > 0$.

(c) Uma função $F$ é chamada *primitiva* de $f$, num conjunto $D$, se $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in D$. Assim, dada uma função $f$ qualquer, podemos afirmar que $f$ admite uma única primitiva.

(a) Falso. Perceba que a função modular $f(x) = |x|$ é contínua e não é derivável em $x = 0$, visto que o limite $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x}$, que é $f'(0)$, não existe.

(b) Falso. Pois, $g'(x) = \dfrac{1}{2x} \cdot 2 = \dfrac{1}{x} = f'(x)$.

(c) Falso. Por exemplo, a função $f(x) = 2x$ tem como primitivas uma família de funções, a saber: $F(x) = x^2 + K$, $K \in \mathbb{R}$. De fato, $F'(x) = 2x + 0 = 2x = f(x)$.

***Q.* 2** (4,0)***.*** Determine, simplificando ao máximo, a derivada de cada uma função a seguir.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{16} \cdot \ln\left(\dfrac{x-4}{x}\right) + \dfrac{1}{4x} - 2\pi$;

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$;

(c) $f(x) = \mathrm{arctg}^2(x)$;

(d) $f(x) = (\pi - 3)^{\mathrm{sen}(x^2)}$.

(a) Como $f(x) = \dfrac{1}{16} \cdot \ln\left(\dfrac{x-4}{x}\right) + \dfrac{1}{4x} - 2\pi = \dfrac{1}{16} \cdot [\ln(x-4) - \ln(x)] + \dfrac{1}{4}x^{-1} - 2\pi$, temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{16} \cdot [\ln(x-4) - \ln(x)]' + \frac{1}{4}[x^{-1}]' - [2\pi]' = \frac{1}{16} \cdot \left[\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x}\right] + \frac{-1}{4}x^{-2} - 0 = \frac{1}{16(x-4)} - \frac{1}{16x} - \frac{1}{4x^2} \\ &= \frac{x^2 - (x-4)x - 4(x-4)}{16(x-4)x^2} = \frac{x^2 - x^2 + 4x - 4x + 16}{16(x-4)x^2} = \frac{16}{16(x-4)x^2} = \frac{1}{x^3 - 4x^2}. \end{aligned}$$

(c) $f'(x) = 2 \cdot \mathrm{arctg}(x) \cdot \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{2\mathrm{arctg}(x)}{1+x^2}$.

(d) $f'(x) = (\pi - 3)^{\mathrm{sen}(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cdot \cos(x^2) \cdot (\pi - 3)^{\mathrm{sen}(x^2)}$.

(b) Pela regra do quociente, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[x^2-2x-3]'\cdot(x-1)^2-(x^2-2x-3)\cdot[(x-1)^2]'}{(x-1)^4} = \frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2-(x^2-2x-3)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{2(x-1)\cdot(x-1)^2-(x^2-2x-3)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)[(x-1)^2-(x^2-2x-3)]}{(x-1)^4} \\ &= \frac{2[(x^2-2x+1-x^2+2x+3]}{(x-1)^3} = \frac{8}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

***Q.* 3** (2,0)***.*** Determine equação da reta tangente ($t$) e da reta normal ($n$) à curva de equação $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$, no ponto em que a reta tangente é paralela à reta ($s$) de equação $y - 8x = 0$.

Da Questão 1, item (b), temos que $f'(x) = \dfrac{8}{(x-1)^3}$. Uma vez que a reta $s$ tem coeficiente angular $m_s = 8$ e, por $s$ ser paralela a $t$, temos $m_t = 8$. Como $m_t = f'(x_0)$, segue que:

$$f'(x_0) = \frac{8}{(x_0-1)^3} = 8 \Rightarrow \frac{1}{(x_0-1)^3} = 1 \Rightarrow (x_0-1)^3 = 1 \Rightarrow x_0 = 2.$$

Agora, como $y_0 = f(x_0) = f(2) = \dfrac{2^2-2\cdot 2-3}{(2-1)^2} = -3$, temos:

$$t:\ y-(-3) = 8(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad t:\ y-8x+19=0;$$

$$n:\ y-(-3) = \frac{-1}{8}(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad n:\ 8y+x+22=0.$$

***Q.* 4** (2,0)***.*** Use a definição de derivada para obter $f'(x_0)$, em que:

(a) $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ e $f(x) = \mathrm{sen}(x)$; ou (b) $x_0 = 2$ e $f(x) = x^{-3}$; ou (c) $x_0 = 3$ e $f(x) = 2^x$.

**Atenção:** escolher ***um*** item apenas.

(a) Para esta função, usaremos a seguinte definição: $f'(x_0) = \displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(x_0+\Delta x)-\mathrm{sen}(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(x_0)\cos(\Delta x)+\cos(x_0)\mathrm{sen}(\Delta x)-\mathrm{sen}(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(x_0)[\cos(\Delta x)-1]+\cos(x_0)\mathrm{sen}(\Delta x)}{\Delta x} = \mathrm{sen}(x_0)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}+\cos(x_0)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \mathrm{sen}(x_0)\cdot 0+\cos(x_0)\cdot 1 = \cos(x_0). \end{aligned}$$

Como $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, temos $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) Agora, para esta função, usaremos esta outra definição: $f'(x_0) = \displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Portanto,

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x\to 2}\frac{x^{-3}-2^{-3}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{8}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{8-x^3}{8x^3}}{-(2-x)} = \lim_{x\to 2}\frac{8-x^3}{-8x^3(2-x)} = \lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(4+2x+4)}{-8x^3(2-x)} \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{4+2x+4}{-8x^3} = -\frac{3}{16}. \end{aligned}$$

(c) Ainda com esta definição $f'(x_0) = \displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, temos $f'(3) = \displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{2^x-2^3}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{2^3\cdot[2^{x-3}-1]}{x-3}$.

Agora, por uma mudança de variável, obtemos $f'(3) = \displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{2^3\cdot[2^u-1]}{u} = 8\cdot\lim_{u\to 0}\frac{2^u-1}{u} = 8\ln(2)$.