UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo Diferencial (EM-MR01) SEMESTRE: 2010.2

PROFESSOR: *Adriano Cattai* DATA: 05/11/2010

NOME: ______________________________

2ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *Utilize caneta **preta** ou **azul**. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
2. *É proibido o uso de calculadora e celulares;*
3. *Solução ilegível é considerada como errada;*
4. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
5. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
6. *Não responder na folha de questões.*

"Na Matemática, para saborear bem o fruto, é preciso conhecer bem suas raízes.." (Desconhecido)

Boa Prova!

Q.* 1** (2,0).*** Dadas as afirmativas abaixo, julgue (justificando) em VERDADEIRO ou FALSO.

(a) Se $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, então $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(b) Uma vez que $[\text{sen}(x)]'=\cos(x)$ e que $[\cos(x)]'=-\text{sen}(x)$, então $[\text{sen}(x)\cdot\cos(x)]'=-\text{sen}(x)\cdot\cos(x)$.

(c) Usando a regra do quociente (para derivadas) temos que $[\text{tg}(x)]'=\left[\dfrac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right]'=\dfrac{\cos(x)}{-\text{sen}(x)}=-\text{cotg}(x)$.

(a) Falso! Pela regra do quociente, temos $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$;

(b) Falso! Pela regra do produto, temos $[\text{sen}(x)\cdot\cos(x)]'=\cos(x)\cdot\cos(x)+\text{sen}(x)\cdot(\text{sen}(x))=\cos^2(x)-\text{sen}^2(x)$;

(c) Falso! O correto é $\left[\dfrac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right]'=\dfrac{\cos(x)\cdot\cos(x)-\text{sen}\cdot(-\text{sen}(x))}{\cos^2(x)}=\dfrac{1}{\cos^2(x)}=\sec^2(x)$.

Q.* 2** (4,0).*** Determine, simplificando ao máximo, a derivada de cada uma função a seguir.

(a) $f(x)=\dfrac{\text{tg}(x)-1}{\sec(x)}$;

(b) $f(x)=\dfrac{4}{(8x^3-1)^2}-\ln(\sqrt{2m})$;

(c) $f(x)=\ln\left[\sqrt{\dfrac{1+\text{sen}(x)}{1-\text{sen}(x)}}\right]$;

(d) $f(x)=\text{arctg}(3x^2-2)$.

(a) Como $f(x)=\dfrac{\text{tg}(x)-1}{\sec(x)}=\dfrac{\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}-1}{\frac{1}{\cos(x)}}=\dfrac{\text{sen}(x)-\cos(x)}{\cos(x)}\cdot\cos(x)=\text{sen}(x)-\cos(x)$, temos que

$$f'(x)=[\text{sen}(x)-\cos(x)]'=\cos(x)+\text{sen}(x).$$

(b) Como nada foi dito se m é uma função de x, vamos considerá-la como uma constante. Assim, $[\ln(\sqrt{2m})]'=0$. Logo,

$$f'(x)=\left[\frac{4}{(8x^3-1)^2}\right]'=[4(8x^3-1)^{-2}]'=-8(8x^3-1)^{-3}\cdot 24x^2=\frac{-192}{(8x^3-1)^3}.$$

(c) Primeiramente, perceba que $f(x)=\ln\left[\sqrt{\dfrac{1+\text{sen}(x)}{1-\text{sen}(x)}}\right]=\ln\left[\dfrac{1+\text{sen}(x)}{1-\text{sen}(x)}\right]^{1/2}=\dfrac{1}{2}\ln\left[\dfrac{1+\text{sen}(x)}{1-\text{sen}(x)}\right]$. Assim, escrevendo $u=\dfrac{1+\text{sen}(x)}{1-\text{sen}(x)}$, temos que $u'=\dfrac{\cos(x)[1-\text{sen}(x)]-[1+\text{sen}(x)][-\cos(x)]}{(1-\text{sen}(x))^2}=\dfrac{2\cos(x)}{(1-\text{sen}(x))^2}$. Logo,

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\text{sen}(x)}{1+\text{sen}(x)}\cdot\frac{2\cos(x)}{(1-\text{sen}(x))^2}=\frac{\cos(x)}{(1+\text{sen}(x))(1-\text{sen}(x))}=\frac{\cos(x)}{\cos^2(x)}=\sec(x).$$

(d) $f'(x) = \dfrac{1}{1+(3x^2-2)^2} \cdot 6x = \dfrac{6x}{9x^4 - 12x^2 + 5}$.

Q. 3 (2,0)***.*** Determine equação da reta tangente e da reta normal à curva de equação $f(x) = \ln\left[\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}}\right]$ no ponto em que $x = \dfrac{4\pi}{3}$.

Como $\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $f(x) = \ln\left[\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}}\right]$ e que $f'(x) = \sec(x)$ temos:

- $y_0 = f(x_0) = \ln\sqrt{\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \ln\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cdot \dfrac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = \ln(2-\sqrt{3})$;
- $m = f'(x_0) = \sec\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = -\dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = -2.$

Assim, escrevemos:

$$t: \ y - \ln(2-\sqrt{3}) = -2\left(x - \frac{4\pi}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad y = -2x + \frac{8\pi + 3\ln(2-\sqrt{3})}{3};$$
$$n: \ y - \ln(2-\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{4\pi}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{2} + \frac{3\ln(2-\sqrt{3}) - 2\pi}{3}.$$

Q. 4 (2,0)***.*** Usando a regra de L'Hospital, determine os limites abaixo:
(a) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+x}$ (b) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \sec(x) - \operatorname{tg}(x)$.

(a) Perceba que $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+x} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$. Supondo que $K = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, temos $\ln(K) = \ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$. Assim,

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Veja que, neste último limite, temos uma indeterminação $0/0$. Deste modo podemos usar a regra de L'Hospital. Logo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

Portanto, temos que $\ln(K) = 1$, ou seja, $K = e$, como sendo o limite desejado.

(b) Como $\sec(x) - \operatorname{tg}(x) = \dfrac{1-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$, temos que $\lim\limits_{x\to\pi/2} 1 - \operatorname{sen}(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to\pi/2}\cos(x) = 0$, ou seja, $\lim\limits_{x\to\pi/2}\sec(x) - \operatorname{tg}(x)$ é uma forma indeterminada $0/0$. Assim, por L'Hospital, temos:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{[1-\operatorname{sen}(x)]'}{[\cos(x)]'} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos(x)}{-\operatorname{sen}(x)} = \frac{-0}{-1} = 0$$