UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo Diferencial (EC-NR05) SEMESTRE: 2010.2

PROFESSOR: *Adriano Cattai* DATA: 28/09/2010

NOME: ____

1ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *Utilize caneta **preta** ou **azul**. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
2. *É proibido o uso de calculadora e celulares;*
3. *Solução ilegível é considerada como errada;*
4. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
5. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
6. *Não responder na folha de questões.*

"O mundo é um lugar perigoso de se viver, não por causa daqueles que fazem o mal, mas sim por causa daqueles que observam e deixam o mal acontecer." (Albert Einstein)

Boa Prova!

Q.* 1** (2,0).*** Considerando as equações (♣) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 2$, (✠) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 3$ e (★) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$, responda;

(a) A partir de (♣) e (✠) o que se pode afirmar sobre $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$? Por que?

(b) Escreva como se lê (★) e dê seu significado;

(c) A partir de (♣) ou de (✠) podemos afirmar qual é a imagem de 5? Por que?

(a) Podemos afirmar que o limite não existe pois, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 2 \neq 3 = \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$.

(b) O limite da função f, quando x tende a 2, é igual a menos infinito e, isto quer dizer que, à medida que tomamos valores para x, arbitrariamente próximos de 2, tanto pela direta quanto pela esquerda, os valores para a imagem da função f decrescem ilimitadamente.

(c) Não podemos! Pois o valor para $f(5)$ pode ser qualquer um ou pior, $f(5)$ talvez nem exista. Por exemplo, a função $f(x) = \begin{cases} 2, x < 5 \\ 3, x > 5 \end{cases}$ não está definida em 5, logo não existe $f(5)$, mesmo atendendo $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 3$.

Q.* 2** (4,0).*** Avalie, cada limite abaixo:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[1-\cos(x)]\mathrm{sen}(x)}{x^3}$

(b) $\lim\limits_{x\to -1} \log_2 \dfrac{-x^2+x+2}{-x^3-2x^2+5x+6}$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} 8^{\frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1}}$

(d) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x-3}{\sqrt{x-3}}$

(a) Primeiramente perceba que, como $\lim\limits_{x\to 0}[1-\cos(x)]\mathrm{sen}(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$, temos uma forma indeterminada $0/0$. No entanto,

$$\frac{[1-\cos(x)]\mathrm{sen}(x)}{x^3}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \frac{[1-\cos^2(x)]\mathrm{sen}(x)}{x^3\cdot[1+\cos(x)]} = \frac{\mathrm{sen}^3(x)}{x^3\cdot[1+\cos(x)]} = \left(\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right)^3\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}.$$

Assim, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[1-\cos(x)]\mathrm{sen}(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right)^3\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\cos(x)} = 1^3\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

(b) Como a função logarítmica é uma função contínua, temos:

$$\lim_{x\to -1}\log_2\frac{-x^2+x+2}{-x^3-2x^2+5x+6} = \log_2\left(\lim_{x\to -1}\frac{-x^2+x+2}{-x^3-2x^2+5x+6}\right).$$

Agora, para $\lim_{x\to -1}\dfrac{-x^2+x+2}{-x^3-2x^2+5x+6}$, temos $\lim_{x\to -1} -x^2+x+2=0$ e $\lim_{x\to -1} -x^3-2x^2+5x+6=0$, ou seja, uma forma indeterminada $0/0$. Agora, dividindo os polinômios, ambos por $x+1$, temos:

$$\lim_{x\to -1}\frac{-x^2+x+2}{-x^3-2x^2+5x+6}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(-x+2)}{(x+1)(-x^2-x+6)}=\lim_{x\to -1}\frac{-x+2}{-x^2-x+6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Portanto, $\lim_{x\to -1}\log_2\dfrac{-x^2+x+2}{-x^3-2x^2+5x+6}=\log_2\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1.$

(c) Como a função exponencial é uma função contínua, então $\lim_{x\to+\infty} 8^{\frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1}}=8^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1}}$. Agora, como $\lim_{x\to+\infty} 1-x^3=-\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} 3x^3+2x^2-1=+\infty$, temos uma forma indeterminada ∞/∞. Mas,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{3x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3}.$$

Finalmente, $\lim_{x\to+\infty} 8^{\frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1}}=8^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1}}=8^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{8^{1/3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{8}}=\dfrac{1}{2}.$

(d) Temos que $\lim_{x\to 3^+} x-3=0$ e $\lim_{x\to 3^+}\sqrt{x-3}=0$, ou seja, uma forma indeterminada $0/0$. Mas,

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x-3}{\sqrt{x-3}}=\lim_{x\to 3^+}(x-3)^{1-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to 3^+}(x-3)^{\frac{1}{2}}=\lim_{x\to 3^+}\sqrt{x-3}=0.$$

Q.* 3** (2,0).*** Em cada item, determine, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa. Quando falsa, justifique exibindo um contra exemplo.

(a) Se $f(2)=4$, então $\lim_{x\to 2} f(x)=4$;

(b) A função contínua f está definida no intervalo $[a,b]$. Se $f(a)\cdot f(b)>0$, então f possui algum zero em $[a,b]$;

(c) Se $\lim_{x\to a} f(x)=L$, então $\lim_{x\to a^+} f(x)-\lim_{x\to a^-} f(x)\neq 0$;

(d) Se f é uma função contínua para todo $x\neq 0$ com $f(0)=0$, então $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

(a) Falso. Por exemplo, dada função $f(x)=\begin{cases} 4, x\geq 2\\ 3, x<2\end{cases}$, temos $f(2)=4$ e, vemos que não existe $\lim_{x\to 2} f(x)$.

(b) Falso. Basta pegar a função contínua $f(x)=2x$, definida no intervalo $[1,2]$. Assim, $f(1)=2$ e $f(2)=4$, donde $f(1)\cdot f(2)=8>0$ e, f não possui algum zero (raíz) neste intervalo.

(c) Se o limite bilateral é igual a L, isso quer dizer que os laterais são iguais e iguais a L. Logo $L-L=0$. Portanto, a afirmativa é falsa.

(d) Temos que f é descontínua em $x=0$. Assim, ou $\lim_{x\to 0} f(x)\neq 0$ ou não existe este limite. Portanto, a afirmativa é falsa.

Q. 4 (2,0)***.*** Exiba o gráfico de uma função $f : [-5, 3] \to \mathbb{R}_+^*$ tal que:

(a) $\lim\limits_{x \to -5^+} f(x) = 2$

(b) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 5$

(c) f descontínua em $x = -3$

(d) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$

(e) $\nexists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

(f) $f(-4) = 1$

Há muitas maneiras de exibir esse gráfico. Abaixo, uma sugestão.