UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo Diferencial (EM-MR01) SEMESTRE: 2010.2

PROFESSOR: *Adriano Cattai* DATA: 29/09/2010

NOME: ____

1ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *Utilize caneta **preta** ou **azul**. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
2. *É proibido o uso de calculadora e celulares;*
3. *Solução ilegível é considerada como errada;*
4. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
5. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
6. *Não responder na folha de questões.*

"O mundo é um lugar perigoso de se viver, não por causa daqueles que fazem o mal, mas sim por causa daqueles que observam e deixam o mal acontecer." (Albert Einstein)

Boa Prova!

Q. 1 (2,1)**.** Considerando as equações ($\clubsuit$) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 2$, (✠) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 3$ e ($\bigstar$) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$, responda;

(a) A partir de ($\clubsuit$) e (✠) o que se pode afirmar sobre $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$? Por que?

(b) Escreva como se lê ($\bigstar$) e dê seu significado;

(c) A partir de ($\clubsuit$) ou de (✠) podemos afirmar qual é a imagem de 5? Por que?

(a) Podemos afirmar que o limite não existe pois, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 2 \neq 3 = \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$.

(b) O limite da função f, quando x tende a 2, é igual a menos infinito e, isto quer dizer que, à medida que tomamos valores para x, arbitrariamente próximos de 2, tanto pela direta quanto pela esquerda, os valores para a imagem da função f decrescem ilimitadamente.

(c) Não podemos! Pois o valor para $f(5)$ pode ser qualquer um. Além disso, $f(5)$ talvez nem exista. Por exemplo, a função $f(x) = \begin{cases} 2, x < 5 \\ 3, x > 5 \end{cases}$ não está definida em 5, logo não existe $f(5)$, mesmo atendendo $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 3$.

Q. 2 (4,0)**.** Encontre, se possível, os limites indicados:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x) - \operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{8x^3 - 1}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x - 3}{\operatorname{sen}(\pi x)}$

(d) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{3x - 9}{|x| - 3}$

(a) Primeiramente perceba que, como $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg}(x) - \operatorname{sen}(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}^2(x) = 0$, temos uma forma indeterminada $0/0$. No entanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{tg}(x) - \operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} &= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} - \operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{\operatorname{sen}(x)[1 - \cos(x)]}{\operatorname{sen}^2(x)\cos(x)} = \frac{1 - \cos(x)}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \\
&= \frac{1 - \cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)[1 + \cos(x)]} = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)[1 + \cos(x)]} = \operatorname{tg}(x) \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)}.
\end{aligned}$$

Assim, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x) - \operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg}(x) \cdot \dfrac{1}{1 + \cos(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg}(x) \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1 + \cos(x)} = 0 \cdot \dfrac{1}{2} = 0.$

(b) Como $\lim_{x\to 1/2} 2x^2+3x-2=0$ e $\lim_{x\to 1/2} 8x^3-1=0$, temos uma forma indeterminada $0/0$. No entanto, dividindo cada polinômio por $x-1/2$, temos:

$$\lim_{x\to 1/2}\frac{2x^2+3x-2}{8x^3-1}=\lim_{x\to 1/2}\frac{(x-1/2)(2x+4)}{(x-1/2)(8x^2+4x+2)}=\lim_{x\to 1/2}\frac{2x+4}{8x^2+4x+2}=\frac{5}{6}.$$

(c) Temos uma indeterminação $0/0$, pois $\lim_{x\to 1} 3x-3=0$ e $\lim_{x\to 1}\operatorname{sen}(\pi x)=\operatorname{sen}(\pi)=0$. No entanto, fazendo a seguinte mudança de variável $u=x-1$, com $u\to 0$, já que $x\to 1$, temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{3x-3}{\operatorname{sen}(\pi x)} &= \lim_{u\to 0}\frac{3u}{\operatorname{sen}(\pi(u+1))}=\lim_{u\to 0}\frac{3u}{\operatorname{sen}(\pi u+\pi)}=\lim_{u\to 0}\frac{3u}{\operatorname{sen}(\pi u)\cos(\pi)+\operatorname{sen}(\pi)\cos(\pi u)}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{3u}{-\operatorname{sen}(\pi u)+0}=\lim_{u\to 0}\frac{\frac{-3u}{\pi u}}{\frac{\operatorname{sen}(\pi u)}{\pi u}}=-\frac{3}{\pi}.\end{aligned}$$

(d) Como o limite $\lim_{x\to -3}\frac{3x-9}{|x|-3}$ apresenta uma impossibilidade $-18/0$, precisamos analisar o sinal do denominador. Note, primeiro, que para valores negativos de x, temos $|x|=-x$. Assim,

$$\lim_{x\to -3}\frac{3x-9}{|x|-3}=\lim_{x\to -3}\frac{3x-9}{-x-3}.$$

Agora, calculando os limites laterais, temos:

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{3x-9}{-x-3}=\frac{-18}{0^+}=-\infty \quad\text{e}\quad \lim_{x\to -3^+}\frac{3x-9}{-x-3}=\frac{-18}{0^-}=+\infty.$$

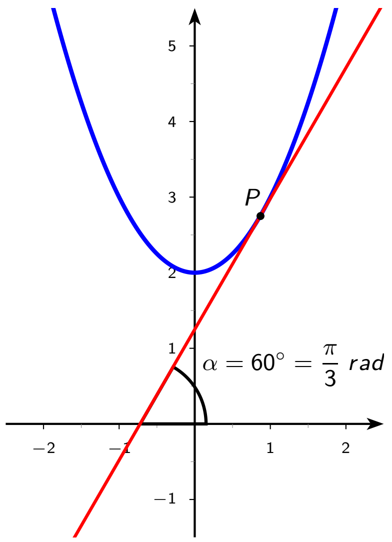
Portanto, não existe o limite $\lim_{x\to -3}\frac{3x-9}{|x|-3}$.

***Q.* 3** (1,9)**.** Usando o conceito de derivada, determine o ponto da curva $y=2+x^2$ em que a reta tangente tem ângulo de inclinação $\frac{\pi}{3}$.

Pela definição de derivada, no ponto x_0, temos:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}.$$

Ainda, $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=2+(x_0+\Delta x)^2-[2+x_0^2]=\Delta x(2x_0+\Delta x)$. Assim,



$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} 2x_0+\Delta x=2x_0.\end{aligned}$$

Ou seja, $x_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo, $y_0=2+x_0^2=2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{11}{4}$.

Portanto, o ponto da curva $y=2+x^2$ em que a reta tangente tem ângulo de inclinação $\frac{\pi}{3}$ é $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{11}{4}\right)$.

***Q.* 4** (2,0)**.** Exiba o gráfico de uma função $f:[-2,6]\to\mathbb{R}^*_-$ tal que:

(1) $\lim_{x\to -2^+} f(x)=-2$

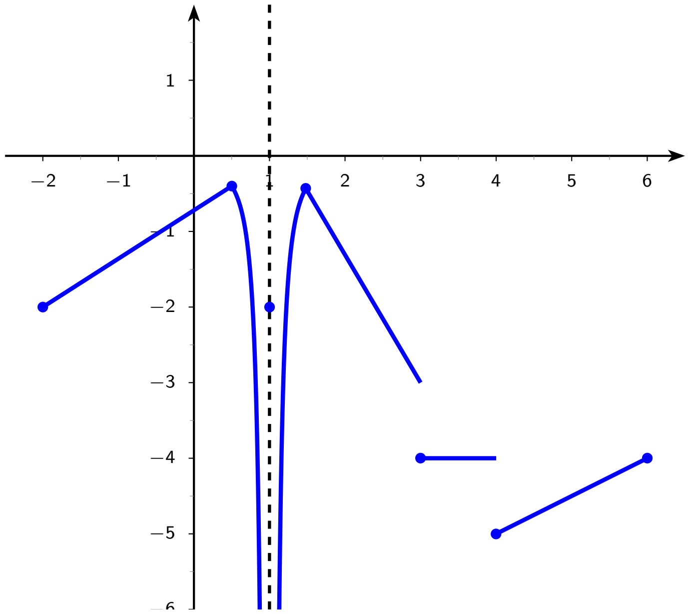
(2) $\lim_{x\to 6^-} f(x)=-4$

(3) f descontínua em $x=3$

(4) $\lim_{x\to 1} f(x)=-\infty$

(5) $\nexists \lim_{x\to 4} f(x)$

(6) $f(4)=-5$


1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−2
−1
1
2
3
4
5
6