



UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Cálculo Diferencial (EC-MR01)

SEMESTRE: 2010.2

PROFESSOR: Adriano Cattai

DATA: 30/09/2010

NOME: _____

1ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. Utilize caneta **preta** ou **azul**. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;
2. É proibido o uso de calculadora e celulares;
3. Solução ilegível é considerada como errada;
4. Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;
5. Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;
6. Não responder na folha de questões.

“O mundo é um lugar perigoso de se viver, não por causa daqueles que fazem o mal, mas sim por causa daqueles que observam e deixam o mal acontecer.” (Albert Einstein)

Boa Prova!

Q. 1 (2,0). Considerando as equações (♣) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1$, (✕) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -1$ e (★) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = +\infty$, responda;

- (a) A partir de (♣) e (✕) o que se pode afirmar sobre $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$? Por que?
- (b) Escreva como se lê (★) e dê seu significado;
- (c) A partir de (♣) ou de (✕) podemos afirmar qual é a imagem de 3? Por que?

(a) Podemos afirmar que esse limite não existe, pois os limites laterais são diferentes.

(b) O limite da função f , quando x tende a 5, é igual a mais infinito e, isto quer dizer que, à medida que os valores de x , estão arbitrariamente próximos de 5 (tanto pela direita e tanto pela esquerda) a função f cresce ilimitadamente.

(c) Não podemos afirmar, pois a imagem de 3 pode ser qualquer valor ou, até mesmo, não existir. Por exemplo, a função $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 3 \\ -1, & x > 3 \end{cases}$ satisfaz (♣) e (✕) e não está definida em $x = 3$, ou seja, não existe a imagem de 3.

Q. 2 (4,0). Avalie, cada limite abaixo:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 - \cos(x)]\text{sen}(x)}{x^3}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 8^{\frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1}}$

(b) $\lim_{x \rightarrow -1} \log_2 \frac{-x^2 + x + 2}{-x^3 - 2x^2 + 5x + 6}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3}}{x^3 - 1}$

(a) Notemos que este limite é uma forma indeterminada 0/0, pois $\lim_{x \rightarrow 0} [1 - \cos(x)]\text{sen}(x) = [1 - 1] \cdot 0 = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0^3 = 0$. No entanto,

$$\frac{[1 - \cos(x)]\text{sen}(x)}{x^3} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{[1 - \cos^2(x)]\text{sen}(x)}{x^3 \cdot [1 + \cos(x)]} = \frac{\text{sen}^3(x)}{x^3 \cdot [1 + \cos(x)]} = \left(\frac{\text{sen}(x)}{x}\right)^3 \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)}$$

Assim, como $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen}(x)}{x}\right)^3 = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}\right)^3 = 1^3 = 1$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 - \cos(x)]\text{sen}(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen}(x)}{x}\right)^3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos(x)} = 1^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(b) Como a função logarítmica é uma função contínua, temos:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \log_2 \frac{-x^2 + x + 2}{-x^3 - 2x^2 + 5x + 6} = \log_2 \left(\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + x + 2}{-x^3 - 2x^2 + 5x + 6} \right).$$

Agora, para $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + x + 2}{-x^3 - 2x^2 + 5x + 6}$, temos $\lim_{x \rightarrow -1} -x^2 + x + 2 = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -1} -x^3 - 2x^2 + 5x + 6 = 0$, ou seja, uma forma indeterminada $0/0$. Dividindo os polinômios, ambos por $x + 1$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + x + 2}{-x^3 - 2x^2 + 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(-x+2)}{(x+1)(-x^2 - x + 6)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x+2}{-x^2 - x + 6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow -1} \log_2 \frac{-x^2 + x + 2}{-x^3 - 2x^2 + 5x + 6} = \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = -1$.

(c) Como a função exponencial é uma função contínua, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} 8^{\frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1}} = 8^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1}}$. Agora, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1-x^3 = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3+2x^2-1 = +\infty$, temos uma forma indeterminada ∞/∞ . Mas,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Finalmente, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 8^{\frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1}} = 8^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^3}{3x^3+2x^2-1}} = 8^{-\frac{1}{3}} = (2^3)^{-\frac{1}{3}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

(d) O limite é uma forma indeterminada $0/0$, pois $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+2} - \sqrt{3} = \sqrt{1+2} - \sqrt{3} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 1} x^3 - 1 = 1^3 - 1 = 0$. no entanto, racionalizando o numerador e sabendo que $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$, temos:

$$\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3}}{x^3 - 1} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{3}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3}} = \frac{x+2-3}{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3})} = \frac{1}{(x^2+x+1)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3})}.$$

Assim, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3}}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x^2+x+1)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3})} = \frac{1}{(1^2+1+1)(\sqrt{1+2} + \sqrt{3})} = \frac{1}{6\sqrt{3}}$.

Q. 3 (2,0). Em cada item, determine, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa. Quando falsa, justifique exibindo um contra exemplo.

(a) Se $f(2) = 4$, então $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$;

(b) Se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$, então $f(a) = L$;

(c) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, então $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq 0$;

(d) Se f é uma função contínua para todo $x \neq 0$ com $f(0) = 0$, então $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

(a) Falso. Por exemplo, dada função $f(x) = \begin{cases} 4, & x \geq 2 \\ 3, & x < 2 \end{cases}$, temos $f(2) = 4$ e, vemos que não existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

(b) Falso. A partir de $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$, garantimos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ mas nada podemos dizer sobre $f(a)$, pois $f(a)$ pode ser qualquer valor ou, até mesmo, não existir. Agora, se f fosse contínua (não temos essas informações) certamente asseguraríamos $f(a) = L$, as não é o caso.

(c) Se o limite bilateral é igual a L , isso quer dizer que os laterais são iguais e iguais a L . Logo $L - L = 0$. Portanto, a afirmativa é falsa.

(d) Temos que f é descontínua em $x = 0$. Assim, ou $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 0$ ou não existe este limite. Portanto, a afirmativa é falsa.

Q. 4 (2,0). Exiba o gráfico de uma função $f : [-3, 5] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que:

(1) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 2$

(3) f descontínua em $x = 3$

(5) $\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

(2) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 4$

(4) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

(6) $f(-2) = 1$

Abaixo, uma possibilidade.

