UNIFACS - UNIVERSIDADE SALVADOR
Cursos de Engenharia
Disciplina: Cálculo I
Ano:2013

3ª Lista de Exercícios – 2013

Lembre que a <u>derivada</u> de uma função y = f(x) em um ponto x_o, é a **taxa de variação instantânea** em x_o , ou seja, $f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$.

1. Para cada uma das funções a seguir calcule f ´(a), usando a definição, caso exista.

a) f(x) = senx; a = 0 b) $y = x^2 - 3x$; a = 2 c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; a = 0 d) $y = \frac{3}{x-1}$; a = 2

2. Determine a derivada de cada uma das funções a seguir, usando definição:

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ b) $f(t) = \sqrt{t+1}$ c) y = 2 d) $y = \frac{1}{x}$

Interpretação geométrica da derivada de uma função f no ponto x_o : $f'(x_o)$ representa o coeficiente angular da reta tangente à curva y = f(x) no ponto $P_0 = (x_o, f(x_o))$

3. Considere a função $f(x) = x^2 - 2x$.
   a) Mostre, usando a definição, que $f'(x) = 2x - 2$
   b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto em que $x_o = 2$
   c) Determine o ponto desta curva onde a reta tangente é horizontal.
   d) Para que pontos desta curva a reta tangente forma um ângulo agudo?

4. Use os resultados obtidos na questão 2 para determinar a equação das retas tangente ao gráfico da função f , em cada caso a seguir:

   a) $f(t) = \sqrt{t+1}$ no ponto onde a reta tangente é paralela à reta r: y = (1/2) x + 1

   b) f(x) = 1/x no ponto do 3º quadrante onde a reta tangente é perpendicular à 1ª bissetriz.

<u>Observação:</u> A reta normal a uma curva num ponto P_o é a reta que passa por P_o e é perpendicular à reta tangente neste ponto.

Interpretação física da derivada de uma função f no ponto x_0: Suponha que um ponto P percorra uma reta de modo que a sua posição num instante t seja dada por s(t). A velocidade média do ponto P no intervalo de tempo de t_o a $t_o + \Delta t$ é dada por $v_m = \frac{s(t_o + \Delta t) - s(t_o)}{\Delta t}$. A velocidade <u>instantânea</u> do ponto P no instante t_o é dada por $v(t_o)$ $= \lim_{t \to t_o} \frac{s(t) - s(t_o)}{t - t_o} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_o + \Delta t) - s(t_o)}{\Delta t}$.

5. Uma bola é atirada no ar com uma velocidade de $40\, m/s$ e sua altura em metros após t segundos é dada por: $y = 40t - 16t^2$.

a) Encontre a velocidade média para o período de tempo que começa quando $t = 2$ e dura:
(i) 0,1 s (ii) 0,01s

b) Encontre a velocidade instantânea quando $t = 2$.

6. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação do movimento $s(t) = 4t^3 + 6t + 2$, onde t é medido em segundos. Encontre a velocidade da partícula nos instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$.

7. Usando as regras de derivação, determine a expressão da derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{5x+3}{5x-3}\right)$

b) $f(x) = (x^2-1)(3x-1)(5x^3+2x)$

c) $y = \frac{x-1}{x^2+2} + \sqrt{x} + \ln 5$

d) $y = x^5 + \frac{3}{\text{sen}\, x} - \frac{\text{tg} x}{3}$

e) $y = \frac{5}{x^2} - \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}$

f) $y = \sqrt[4]{x} - \frac{2}{\sec x + 1} + \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{x^6}$

g) $y = x.\text{sen}\left(\frac{\pi}{5} + 3x\right)$

h) $f(x) = \text{sen}\, x \cdot \cos x + x \cdot \text{cosec}\, x$

i) $y = \text{sen}^5 x + \cos(x^5) + \text{tg} 5$

j) $y = (x^2 - 3x)^5 + \ln \pi$

k) $y = \left(\frac{x^2+3x}{x+1}\right)^3$

l) $y = \frac{x^2 - 3x}{(x-2)^2}$

m) $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{5} + x\right)$

n) $y = \cos\left(\frac{\pi}{5} + x\right)^2$

8. Determine a expressão da derivada indicada, e o seu valor no ponto dado:

a) $y = u \cdot \text{sen}(u), u = x^2, \frac{dy}{dx}$ e $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_o = \sqrt{\pi})}$

b) $f(u) = \sqrt[3]{u^2}$, $u(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$, $(f \circ u)'(1)$

c) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$, $f'(x)$ no ponto $x_o = 4$

9. Determine $f'(3)$, sendo $f(5+2x) + f(2x^2+1) = 4x^2 + 4x + 2$.

10. Ache a expressão da derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $y = 5^{\sec x} + \frac{e^{\text{tg} x}}{2} - \frac{3}{\cos x}$	b) y = 2 ln x – (log x) / 2 + $\ln 5 \cdot \log_5 x$
c) $y = \frac{2^{\arccos x}}{3} + \pi \log_5(x^3 + 3^x)$	d) $y = 2^{3x}.3^{-3x}$
e) $y = e^{\cos x} + xe^x$	f) $y = 5^x.x^5 + 5.e^x - \sqrt{5}$

g) $y = 3^x + x^3 + 3^3$	h) $y = 2e^{x^2-3x+4}$
i) $y = \log_3\left(x^2 - 3x\right) + \dfrac{5}{x^3}$	j) $y = 5^{3x^2+4x} + 3x^2 + 4x + \pi$
k) $y = 3^x . x^3 . \text{arctg}x$	l) $f(x) = \ln(\arccos(x^3 + 1))$
m) $y = \text{arc cot g}(\sqrt{x})$	n) $f(x) = \log_3[\text{arc cotg}(\sqrt{x})]$
o) $f(x) = 1 - \text{arcsen}(2x^3)$	p) $f(x) = x + 3^{\text{arctg}(x^2)}$

11. (Derivadas de ordem superior) Encontre a expressão das derivadas indicadas

a) $y = \dfrac{2^{3x}}{3}$; y''; b) $y = xe^x$; y''';

c) $(fou)''(x)$ e $(fou)''(1)$, onde $f(u) = u^2$ e $u(x) = x^3 - 4$

12. (Derivada na forma implícita) Calcule a expressão e o valor no ponto dado das derivadas indicadas abaixo:

a) $x^2 + y^2 = 4$, $\dfrac{dy}{dx}$ no ponto $P(1, \sqrt{3})$ e $\dfrac{dx}{dy}$

b) $y^4 + 3y - 4x^2 = 5x + 1$; $\dfrac{dy}{dx}$ no ponto $P(-1,0)$

c) $y - x - \dfrac{1}{4}\,\text{sen}(y) = 0$, $\dfrac{dy}{dx}$, no ponto de ordenada $\dfrac{\pi}{2}$

d) $e^y + xy = e$, y', no ponto de ordenada 1

13. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de $\sqrt{y} - \sqrt[3]{x} = 1 + x$, no ponto de abscissa $x_0 = 1$.

Respostas:

1. a) 1; b) 1 ; c) não existe; d) −3 2. a) $4x - 3$ b) $\dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}$ c) 0 d) $\dfrac{-1}{x^2}$

3. b) $y = 2x - 4$ c) $P = (1, -1)$ d) $P = (a, a^2 - 2a)$, onde $a > 1$

4. a) t: $y = (1/2)x + 1$; (b) t: $y = -x - 2$;

5. a) i) -25,6 m/s; ii) -24,16 m/s ; b) −24m/s

6. $v(a) = (12a^2 + 6)$m/s; $v(1) = 18$m/s; $v(2) = 54$m/s

7. a) $y' = \dfrac{-20}{(5x-3)^2}$

b) $y' = (x^2 - 1)(3x - 1)(15x^2+2) + 3(x^2 - 1)(5x^3 + 2x) + 2x(3x - 1)(5x^3+2x)$

c) $y' = \dfrac{-x^2 + 2x + 2}{(x^2+2)^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $y' = 5x^4 - 3\text{cossec}x.\text{cotg}x - (\sec^2 x)/3$

e) $y'=\sqrt{3}\operatorname{sen}x-10x^{-3}$

f) $y' = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} + \dfrac{2\sec x.\operatorname{tg}x}{(\sec x+1)^2} + 2x^3 - \dfrac{12}{x^7}$

g) $y' = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{5}+3x\right) + 3x\cos\left(\dfrac{\pi}{5}+3x\right)$

h) $y' = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cosec} x - x \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x$

i) $y' = 5\operatorname{sen}^4 x.\cos x - 5x^4 \operatorname{sen}(x^5)$

j) $y' = 5(x^2-3x)^4(2x-3)$

k) $y' = 3\left(\dfrac{x^2+3x}{x+1}\right)^2\left(\dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}\right)$

l) $y' = \dfrac{-x+6}{(x-2)^3}$

m) $y' = -2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}+x\right).\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{5}+x\right)$

n) $y' = -2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{5}+x\right)^2.\left(\dfrac{\pi}{5}+x\right)$

8. a) $\dfrac{dy}{dx} = 2x[\operatorname{sen}(x^2) + x^2\cos(x^2)]$; $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(x_o=\sqrt{\pi})} = -2\pi\sqrt{\pi}$;

b) $(f\circ u)'(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x+1}}.\left[\dfrac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}\right]$; $(f\circ u)'(1) = -\dfrac{1}{3}$; c) $f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$; $f'(4) = \dfrac{\sqrt{3}}{24}$

9. 2

10. a) $y' = \sec x.\operatorname{tg}x\left(5^{\sec x}.\ln 5 - 3\right) + \dfrac{e^{\operatorname{tg}x}.\sec^2 x}{2}$

b) $y'=\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2x\cdot\ln 10} + \dfrac{1}{x}$

c) $y' = -\dfrac{2^{\arccos x}\ln 2}{3\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\pi\left(3x^2+3^x\ln 3\right)}{\left(x^3+3^x\right)\ln 5}$

d) $y' = \dfrac{2^{3x}.\ln 2 - 2^{3x}\ln 3}{3^{3x-1}}$

e) $y' = -\operatorname{sen}x.e^{\cos x} + e^x + xe^x$

f) $y' = x^5 5^x \ln 5 + 5x^4 5^x + 5e^x$

g) $y' = 3^x\ln 3 + 3x^2$

h) $y' = 2(2x-3)e^{x^2-3x+4}$

i) $y' = \dfrac{2x-3}{(x^2-3x)\ln 3} - \dfrac{15}{x^4}$

j) $y' = (6x+4).5^{3x^2+4x}.\ln 5 + 6x + 4$

k) $y' = 3^x(\ln 3.x^3 + 3x^2)\operatorname{arctg}x + \dfrac{3^x.x^3}{1+x^2}$

l) $f'(x) = -\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}.\arccos(x^3+1)}$

m) $y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

n) $f'(x) = -\dfrac{1}{2.\ln(3).\sqrt{x}.(1+x).\operatorname{arccotg}(\sqrt{x})}$

o) $f'(x) = -\dfrac{6x^2}{\sqrt{1-4x^6}}$

p) $f'(x) = 1 + \dfrac{2x.\ln(3).3^{\arctan(x^2)}}{1+x^4}$

11. a) $y'' = 3(\ln 2)^2.2^{3x}$ b) $y''' = e^x(3+x)$; c) $(fou)''(x) = 6x(5x^3-8)$; $(fou)''(1) = -18$

12. a) $y' = -\dfrac{x}{y}$; $y'_p = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $x' = -\dfrac{y}{x}$; $x'_q = -\sqrt{3}$ b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{8x+5}{4y^3+3}$; $y'_p = -1$

c) $y' = \dfrac{4}{4-\cos y}$; $y'_p = 1$

13. Tangente $y-9=8(x-1)$.