UNIFACS - Cursos de Engenharia
Disciplina: **Cálculo Diferencial**
Ano: 2013

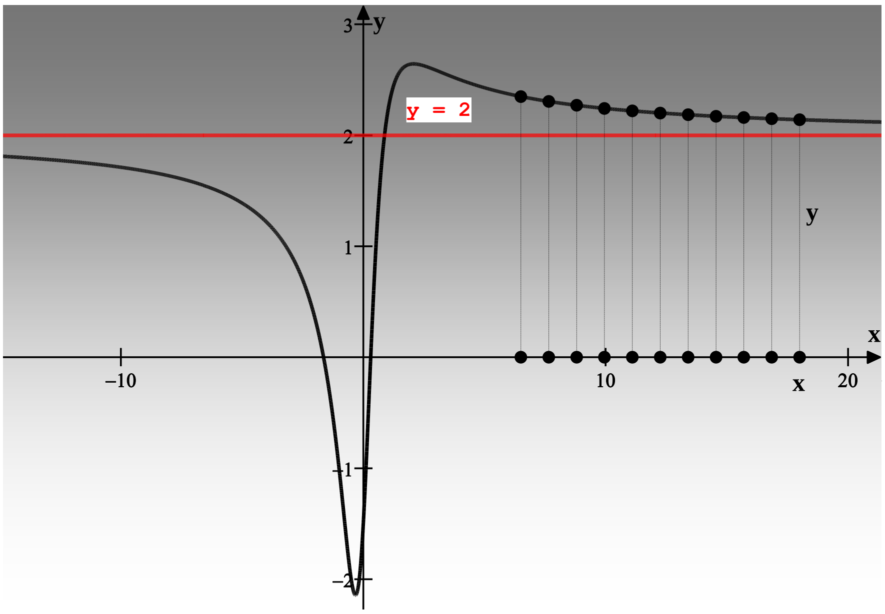
2ª Lista de Exercícios – 2013

Limites NO infinito: Às vezes é importante saber o comportamento futuro de uma função, e também o seu passado. Matematicamente isso se expressa pela seguinte sentença: quando x $\to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to$?

Exemplos desse tipo são: $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x+1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+4}{2x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2-5x-4}{4x^2+1} = \dfrac{3}{4}$.

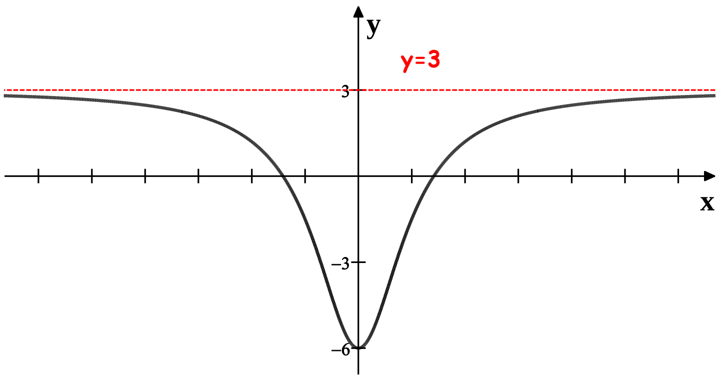
Visualização de limites no infinito: Quando x$\to \infty$, os valores de algumas funções se aproximam de um certo valor L. Dizemos neste caso que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$.

1) (Visualização de limites) Dê o valor dos seguintes limites:



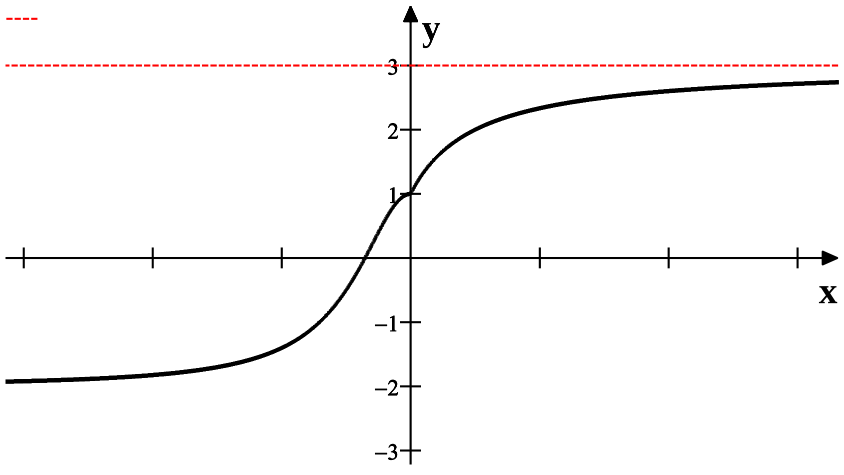
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = ...$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = ...$



$\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = ...$

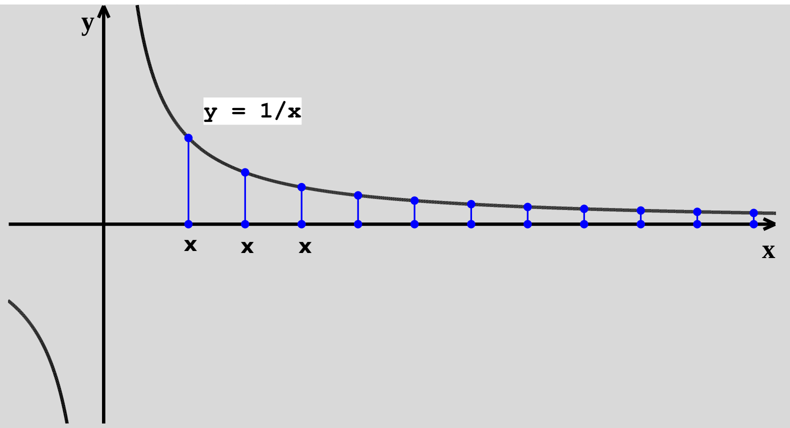
$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = ...$



$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \ldots..$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \ldots..$$

Cálculo de limites no infinito: O cálculo de limites no infinito utiliza como base alguns limites básicos, que se encontram mencionados abaixo:



O gráfico acima mostra pontos x cada vez maiores e suas imagens f(x)/=1/x cada vez mais próximas de zero.

Limites básicos: Como se vê no gráfico ao lado, a função $f(x)=1/x$ tem limite zero quando $x \to +\infty$.

De modo análogo, temos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3}{x} = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3} = 0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1+x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right) = 1.$$

2) Considerando os resultados acima, calcule o valor dos seguintes limites no infinito:

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x+3}{2x}$ c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-4}{x^2}$ d) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^3-2x+1}{-2x^3}$ e) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^3-2x+1}{2x^4}$

3) Determine o valor dos seguintes limites:

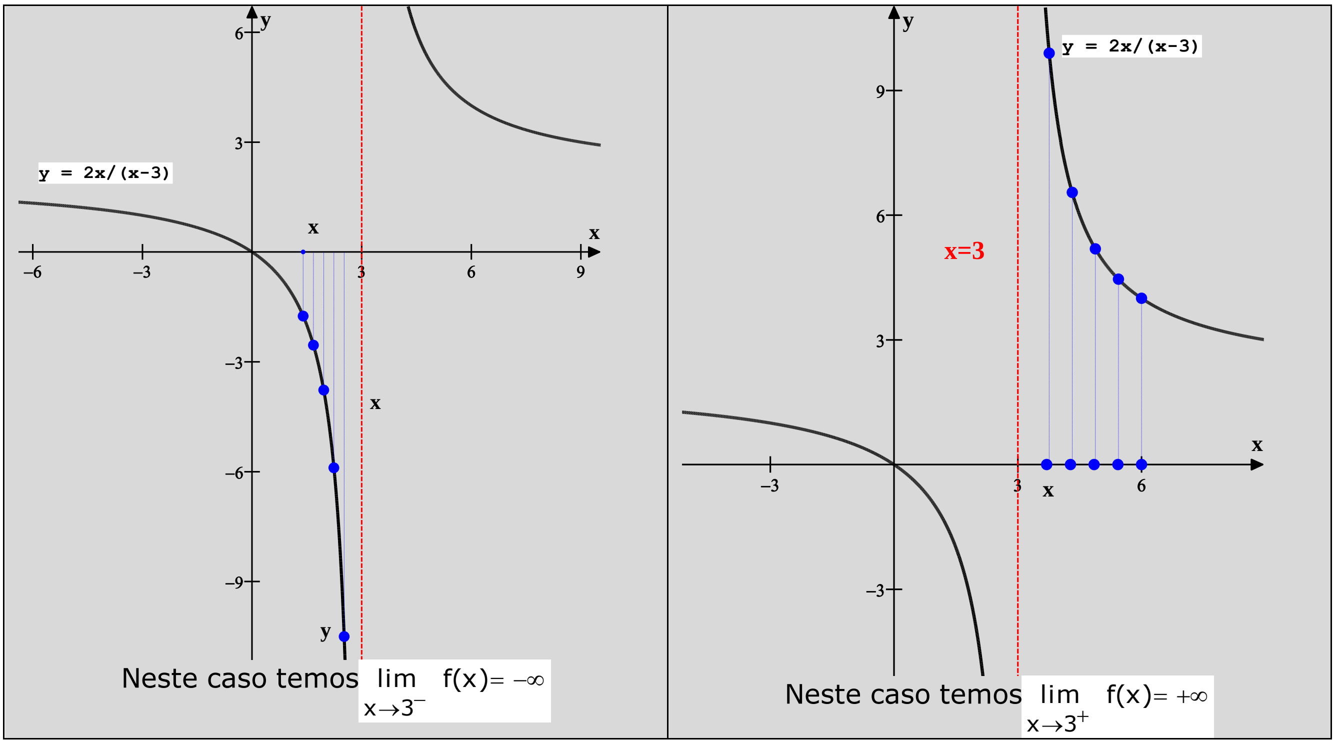
a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{6x+1}{2x+3}$ b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2-5x+4}{4x^2+1}$ c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2-2x-25}{3x^3-9x^2}$ d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{4x^2-5x-4}{2x^2+3x-1}}$

e) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^5+2x^2+1}{x^4-3x^2-3}$ f) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+6x} - x\right)$ g) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \cos\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}\right)$ h) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{2x^3+2x^2+1}{x^3-x^2+3}}$

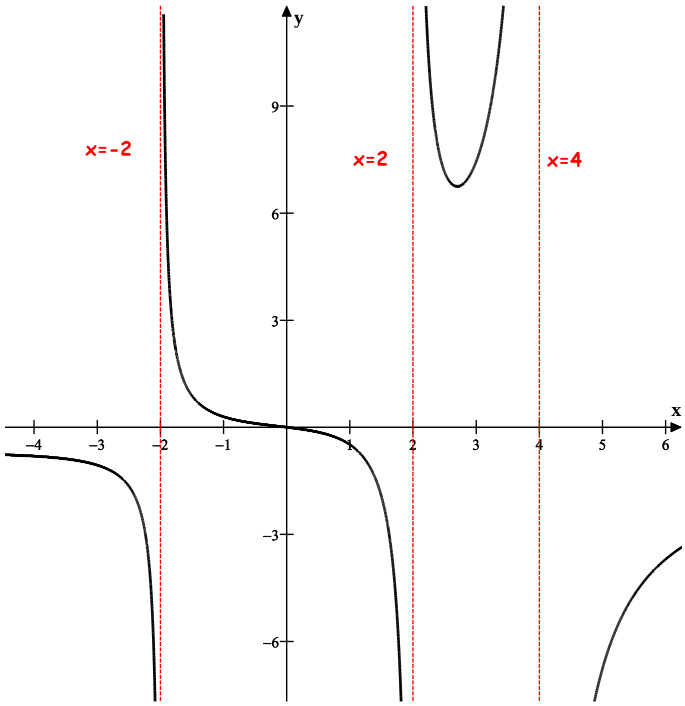
Limites Infinitos: As figuras abaixo mostram o comportamento de uma função y=f(x) próximo do ponto x=3. Como f(3) <u>não existe</u>, só podemos dizer o seguinte:

a) Quando x $\rightarrow$ 3 pela esquerda, os valores f(x) $\rightarrow$ -∞, ou seja, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$

b) Quando x $\rightarrow$ 3 pela direita, os valores f(x) $\rightarrow$+∞, ou seja, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$



4) (**Visualização de limites infinitos**) A função cujo gráfico é mostrado abaixo tem domínio D(f)=IR-{-2, 2,4}. Determine os limites laterais de f(x) nos pontos x=-2, x=2 e x=4.



$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$

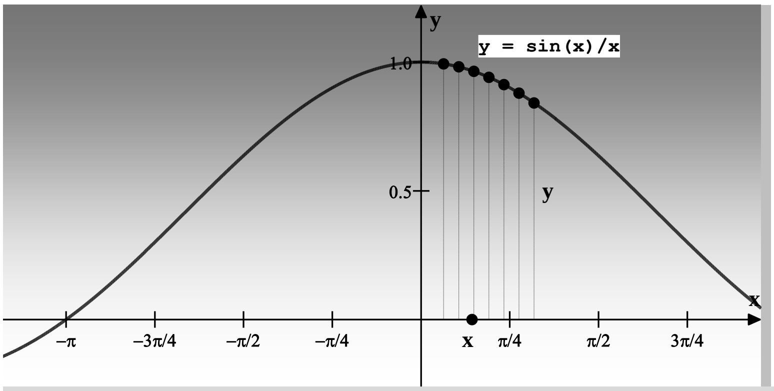
$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) =$

5) Calcule os seguintes limites, observando os valores dos limites laterais, quando for o caso.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2}$	b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x^2+3}{(x-5)^2}$	c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{\operatorname{sen} x}$	d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x-4}{x^2-4}$
e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+5}{x^2-5x+4}$	f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x}{x}$	g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x}{\lvert x\rvert}$	h) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{3x-11}{x-3}$

Limites Fundamentais: Para x=0, temos que sen(0)=0. Isto significa que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \dfrac{0}{0}$, que é uma <u>indeterminação</u>. Este limite é fundamental em Matemática é o resultado desse limite é 1, ou seja, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$.



O gráfico acima mostra que quando x → 0, os valores senx/x → 1

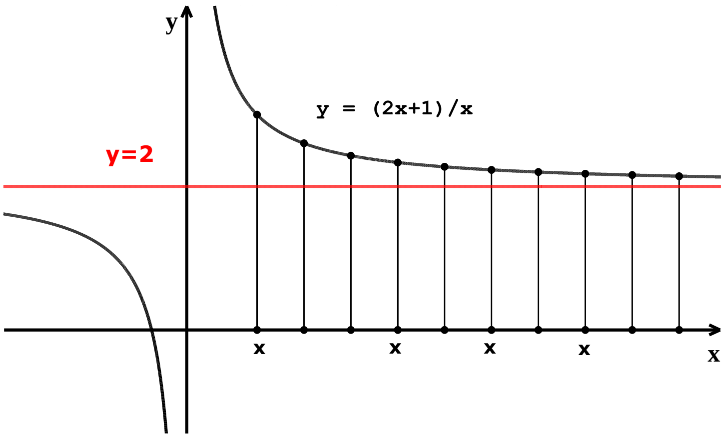
6) Usando que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$, determine:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x\cos x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{x\cos x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(4x)}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

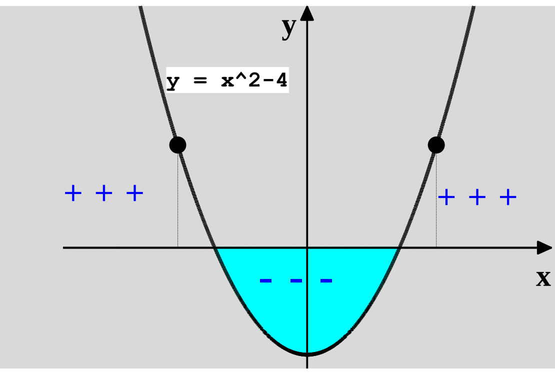
Respostas:

2) a) Use que $\frac{2x+1}{x} = \frac{2x}{x} + \frac{1}{x}$; b) 1/2 ; c) zero ; d) -2; e) 0



3) a) 3 ; b) 3/4 ; c) zero ; d) $\sqrt{2}$;
e) $-\infty$; f) 3 ; g) 1 ; h) e^2

5) a) $-\infty$;
b) $+\infty$;
c) Os limites laterais não coincidem, logo, o limite não existe: o lateral à esquerda é $-\infty$ e à direita é $+\infty$;
d) O limite não existe: o lateral à esquerda é $-\infty$ e à direita é $+\infty$;
e) O limite não existe: o lateral à esquerda é $+\infty$ e à direita é $-\infty$;
f) O limite não existe: o lateral à esquerda é $-\infty$ e à direita é $+\infty$;
g) $+\infty$;
h) $-\infty$



Observe no gráfico ao lado o sinal de uma função quadrática.

Quando a>0, o sinal da função $y=ax^2+bx+c$ é negativo entre as raízes, e é positivo fora das raízes.

6) a) 1 ; b) 3 ; c) 5 ; d) 4; e) 0 ; f) 1/2