

Derivação de Expressões na Forma Implícita

A Forma Implícita:

Nem toda função (ou expressão matemática) aparece na forma explícita $y = f(x)$. Por exemplo, na expressão $x^2 + 3xy = 2$ dizemos que a variável y está implicitamente dada em função de x , ou seja, y é dependente de x , embora esta relação não se expresse de forma clara, de modo explícito.

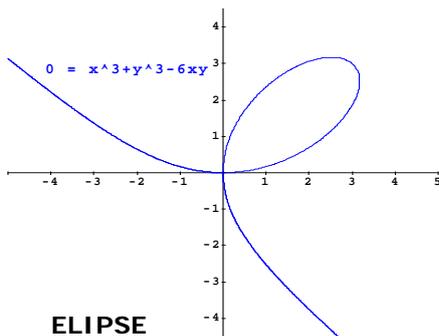
O problema que se põe é que em alguns casos precisamos obter a derivada de funções dadas na forma implícita $g(x, y) = c$, sem que explicitemos a variável y . O processo de derivação é obtido como aplicação da Regra da Cadeia, observando sempre que y é uma função de x .

Exemplos:

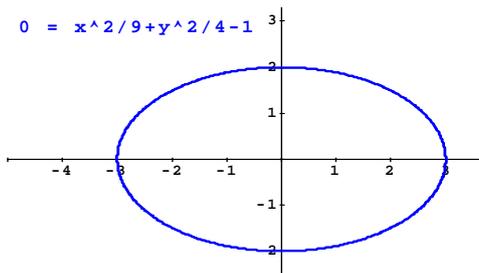
- a) $(5y^2)' = 10y y'$ b) $(\sin(y))' = \cos(y) y'$ c) $(x^2 y)' = 2xy + x^2 y'$
 c) $(x^2 \operatorname{tg}(y))' = 2x \operatorname{tg}(y) + x^2 \sec^2(y) y'$ d) $(x^2 y + 2y^3)' = 2xy + x^2 y' + 6y^2 y'$

EXPRESSÕES NA FORMA IMPLÍCITA: $F(x, y) = c$

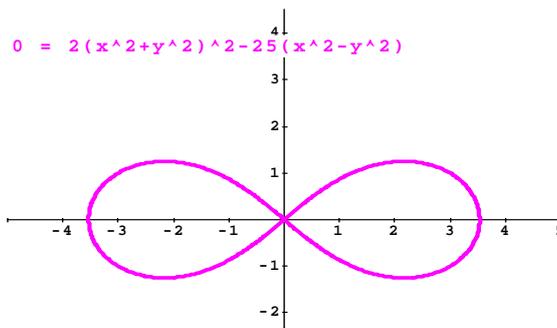
FÓLIUM DE DESCARTES



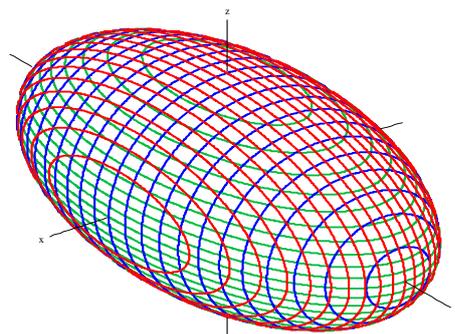
ELIPSE



LEMNISCATA



ELIPSÓIDE E SUAS CURVAS DE NÍVEL



Exercícios:

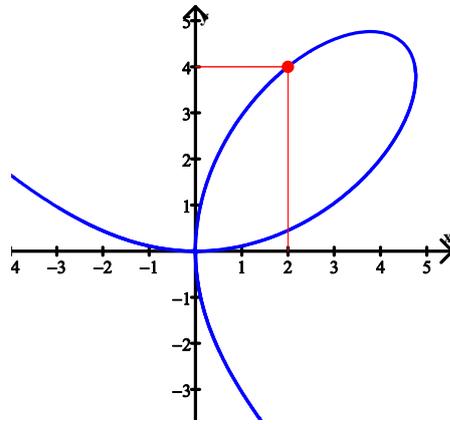
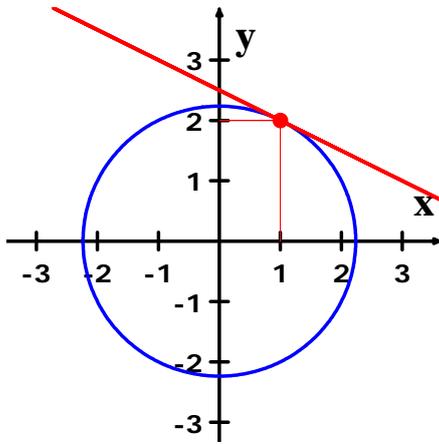
1. Dadas as expressões implícitas abaixo, calcule o que se pede:

- a) $x^2 + y^2 = 5$; a expressão de $\frac{dy}{dx}$ no ponto $P = (2, 1)$
 b) $y^4 + 3y - 4x^2 = 5x + 1$; $\frac{dy}{dx}$ no ponto $P = (0, -1)$
 c) $y - x - \frac{1}{4} \sin(y) = 0$; $\frac{dy}{dx}$ no ponto de ordenada $\frac{\pi}{2}$
 d) $e^y + xy = e$; y' e y'' no ponto de ordenada 1

2. Determine a equação da reta tangente:

a) ao círculo $x^2 + y^2 = 5$ no ponto $P = (1, 2)$

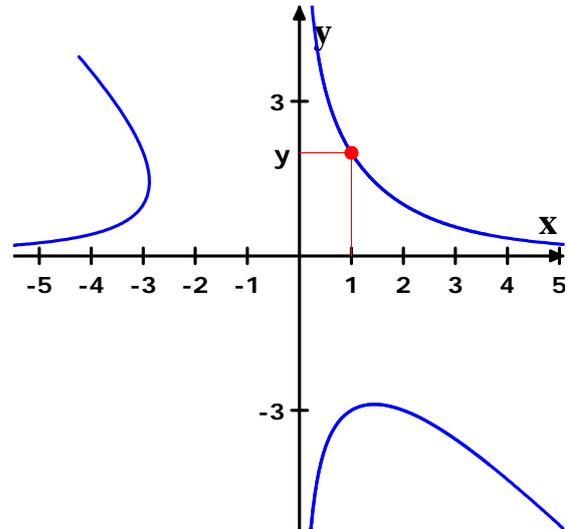
b) ao folium de Descartes $x^3 + y^3 = 9xy$ no ponto $P = (2, 4)$



3. Considere a curva dada na forma implícita por $x^2y + xy^2 = 6$.

a) Calcule a ordenada y do ponto $P=(1, y)$ do 1º quadrante dessa curva, como mostra a figura.

b) Dê a equação da reta tangente à essa curva, no ponto P .



Respostas

1. (a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$; $\frac{dy}{dx}(2,1) = -\frac{2}{1} = -2$

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{8x+5}{4y^3+3}$; $y'_p = -5$

(c) $y' = \frac{4}{4-\cos y}$; $y'_p = 1$

(d) $y' = -\frac{y}{e^y + x}$; $y'_p = -\frac{1}{e}$

2. a) $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$, ou $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

b) $y - 4 = \frac{4}{5}(x - 2)$

3. a) Para encontrar o valor de y lembre que um ponto (x,y) pertence ao gráfico de uma curva quando ele satisfaz a equação da curva.

b) Para achar a reta tangente só falta o coeficiente angular, que é a derivada no ponto $x = 1$