Textos de Cálculo
Prof. Adelmo R. de Jesus

I. A NOÇÃO DE DERIVADA DE UMA FUNÇÃO EM UM PONTO

Dada uma função y=f(x) e um ponto x_o podemos definir duas variações: a variação de x, chamada **Δx**, e a variação de y, chamada **Δy**. Temos que **$\Delta x = x - x_o$** e **$\Delta y = y - y_o$**.

A **taxa** de variação média de f(x) no ponto x_o é então definida por: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$

Por exemplo, se $f(x)=x^2$ e $x_o=2$ temos $\Delta x = x - 2$ e $\Delta y = x^2 - 4$. Logo, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

Outro exemplo: se $f(x)=x^3$ e $x_o=2$ temos $\Delta x = x - 2$ e $\Delta y = x^3 - 8$. Logo, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$

A **derivada** de uma função em x_o é o limite dessas taxas médias quando $x \to x_o$, ou seja, quando $\Delta x \to 0$.

Por essa razão, a derivada é chamada de **taxa de variação instantânea** em x_o.

Resumindo: $f'(x_o) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$.

Observe que:

i) O limite acima (derivada) é um número real, que pode ser positivo, negativo, ou mesmo igual a zero.

ii) A derivada representa também o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de y=f(x), no ponto $(x_o, f(x_o))$.

II. OUTRAS NOTAÇÕES PARA DERIVADA

a) Muitos professores e textos de Matemática preferem chamar o **ponto fixo de x_o**, pois assim ficamos com a **letra x para a variável**.

Veja como fica: $f'(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$. A vantagem é que não aparece outra letra t.

No exemplo que vimos, $f(x)=x^2+3$ e $x_o=2$ temos: $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x^2 + 3) - 7}{x - 2}$

O resultado dessa derivada é então $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 4$

Como vimos, o resultado é o mesmo!!

b) Os livros de Cálculo mais tradicionais chamam o ponto de x_o, e denominam a variável x de $x_o+\Delta x$ (leia "delta x"). Ou seja, como $x = x_o + \Delta x$ temos $x - x_o = \Delta x$.

Resumindo, a definição de derivada fica: $f'(x_o) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$

No exemplo acima, $f(x)=x^2+3$ e $x_o=2$ temos:

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(2+\Delta x)^2 + 3] - 7}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[4 + 4\Delta x + \Delta x^2 + 3] - 7}{\Delta x}$$

O resultado dessa derivada é então $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 4\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(\Delta x + 4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 4) = 4$

Como se vê, o resultado é novamente o mesmo!!

c) Já alguns livros mais modernos chamam o ponto de x_o, mas chamam a variável x de x_o+h (ou seja, trocam a variável Δx por h). Como $x=x_o+h$ temos $x-x_o=h$

Resumindo, a definição de derivada fica: $f'(x_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$

NOTAÇÕES UTILIZADAS PARA DERIVADA: $f'(x_o)$, $y'(x_o)$, $\frac{dy}{dx}(x_o)$

III. EXEMPLOS DE DERIVADA

1. A derivada de uma função constante é igual a zero.

Demonstração: Se para todo x temos f(x)=c então $f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{c - c}{x - x_o} = 0$

2. A derivada de f(x)=ax+b é f´(x)=a

Demonstração: Como f(x)=ax+b então $f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{(ax + b) - (ax_o + b)}{x - x_o}$

Cancelando b, temos $f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{ax - ax_o}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{a(x - x_o)}{x - x_o} = a$

Exemplos práticos:

a) Se f(x)=2x+3 então f´(x)=2

b) Se f(x)=-3x+1 então f´(x)=-3

c) Se f(x)=x-5 então f´(x)=1

3. A derivada de f(x)=ax²+bx+c é f´(x)=2ax+b

Vamos fazer primeiro alguns casos particulares, ok?

Exemplo 1: a) $f(x)=x^2+1$ e $x_o=3$. Daí, $f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x^2 + 1) - 10}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

b) $f(x)=x^2+1$ e $x_o=4$. Daí, $f'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x^2 + 1) - 17}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = 8$

c) $f(x)=x^2+1$ e x_o qualquer.

Daí, $f'(x) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{(x^2 + 1) - (x_o^2 + 1)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{x^2 - x_o^2}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{(x - x_o)(x + x_o)}{x - x_o} = 2x_o$

Conclusão 1: **Se $f(x) = x^2+1$ então $f'(x)=2x$**

Exemplo 2: c) $f(x)=3x^2+1$ e x_o qualquer.

Daí, $f'(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{(3x^2+1)-(3x_o^2+1)}{x-x_o} = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{3x^2-3x_o^2}{x-x_o} = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{3(x-x_o)(x+x_o)}{x-x_o} = 3 \cdot 2x_o = 6x_o$

Conclusão 2: Se $f(x) = 3x^2+1$ então $f'(x)=6x$

Exemplo 3: c) $f(x)=ax^2+c$ e x_o qualquer.

Daí, $f'(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{(ax^2+c)-(ax_o^2+c)}{x-x_o} = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{ax^2-ax_o^2}{x-x_o} = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{a(x-x_o)(x+x_o)}{x-x_o} = a \cdot 2x_o = 2ax_o$

Conclusão 3: Se $f(x) = ax^2+c$ então $f'(x)=2ax$

Finalmente, vamos demonstrar o caso geral: $f(x)=ax^2+bx+c$ e x_o qualquer.

Daí, $f'(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{(ax^2+bx+c)-(ax_o^2+bx+c)}{x-x_o} = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{[ax^2-ax_o^2]+[bx-bx_o]}{x-x_o} =$

Logo, $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{a(x-x_o)(x+x_o)}{x-x_o} + \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{b(x-x_o))}{x-x_o} = a \cdot (2x_o) + b = 2ax_o + b$

Conclusão 4: Se $f(x) = ax^2+bx+c$ então $f'(x)=2ax+b$

Exemplos práticos:

a) Se $f(x) = 5x^2-3x+8$ então $f'(x)=10x-3$

b) Se $f(x) = -3x^2+5x+1$ então $f'(x)=-6x+5$

IV. REVISÃO DO CONCEITO DE DERIVADA

Já vimos os conceitos de taxa de variação <u>média</u> entre os pontos x_o e x, que denotamos por $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, e de **taxa de variação instantânea** no ponto x_o, ou **derivada** da função f no ponto x_o.

Ela é definida pelo limite $f'(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$, desde que esse limite exista.

Outra forma de escrever a derivada é $f'(x_o) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}$. Neste caso, fizemos $x=x_o+\Delta x$.

Uma das aplicações da derivada é sua interpretação geométrica, como coeficiente angular (ou declividade) da reta tangente no ponto. Veja o exemplo a seguir:

Exemplo 4: Determinar a equação da reta tangente à curva $f(x)=x^2+2$ no ponto $x_o=1$, como na figura ao lado.

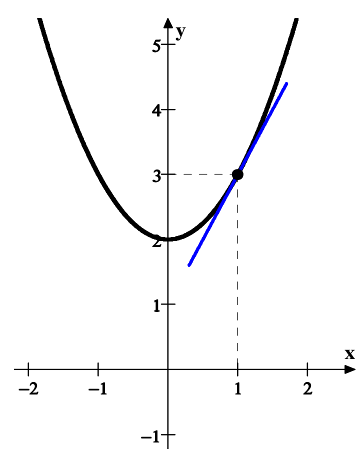
Solução: Para $x=1$ temos $y=1^2+2=3$. Logo, o ponto de tangência é (1,3).

Como a equação da reta é $y-y_o=k(x-x_o)$ só falta determinar o valor do coeficiente angular <u>k</u>. Como sabemos, este valor k é igual a $f'(x_o)$.

Como $f(x) = x^2+2$ temos $f'(x)=2x$. Logo, $k=f'(1) =2.1=2$

Finalmente, temos $y-3=2(x-1)$.

Efetuando os cálculos, ficamos com a equação $y=2x+1$.



V. CÁLCULO DE MAIS ALGUMAS DERIVADAS

Como já foi visto, se $f(x)=ax^2+bx+c$ então $f'(x)=2ax+b$. Essa é uma das regras de derivação, que neste caso permite encontrar a derivada de qualquer polinômio de grau 2.

Vamos calcular mais algumas derivadas, para fazermos nosso formulário, ok?

Exemplo 5: Determine a fórmula para a derivada da função $f(x)=x^3$

Solução: $f'(x_o) = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{x^3-x_o^3}{x-x_o} = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{(x-x_o)(x^2+xx_o+x_o^2)}{x-x_o}$

Cancelando o termo $x-x_o$, temos $f'(x_o) = \lim\limits_{x\to x_o} (x^2+xx_o+x_o^2) = x_o^2+x_o^2+x_o^2 = 3x_o^2$

Conclusão: Se $f(x)=x^3$ então $f'(x)=3x^2$

Exemplo 6: Determine a fórmula para a derivada da função $f(x)=x^4$

Solução: $f'(x_o) = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{x^4-x_o^4}{x-x_o} = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{(x-x_o)(x^3+x^2x_o+xx_o^2+x_o^3)}{x-x_o}$

Cancelando o termo $x-x_o$, temos $f'(x_o) = \lim\limits_{x\to x_o} (x^3+x^2x_o+xx_o^2+x_o^3) = x_o^3+x_o^3+x_o^3+x_o^3 = 4x_o^3$

Conclusão: Se $f(x)=x^4$ então $f'(x)=4x^3$

Exemplo 7: Mostre que a derivada da função é $f(x)=\sqrt{x}$ é $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

O limite $f'(x_o) = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x_o}}{x-x_o}$ é indeterminado. Logo, devemos multiplicar e dividir pelo conjugado.

$$f'(x_o) = \lim_{x\to x_o} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_o}}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_o})(\sqrt{x}+\sqrt{x_o})}{(x-x_o)(\sqrt{x}+\sqrt{x_o})} = \lim_{x\to x_o} \frac{(x-x_o)}{(x-x_o)(\sqrt{x}+\sqrt{x_o})}.$$

Cancelando o termo $x-x_o$, temos

$$f'(x_o) = \lim_{x\to x_o} \frac{(x-x_o)}{(x-x_o)(\sqrt{x}+\sqrt{x_o})} = \lim_{x\to x_o} \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x_o})} = \frac{1}{\sqrt{x_o}+\sqrt{x_o}} = \frac{1}{2\sqrt{x_o}}$$

Conclusão: Se $f(x)=\sqrt{x}$ então $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Casos particulares: Se $f(x)=\sqrt{x}$ então $f'(1)=\dfrac{1}{2\sqrt{1}}=\dfrac{1}{2}$, $f'(4)=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\dfrac{1}{4}$, etc.

Note também que $f'(0)=\dfrac{1}{2\sqrt{0}}$ **não existe!!**

Exemplo 8: Mostre que a derivada da função é $f(x)=\dfrac{1}{x}$ é $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

Solução: Neste caso temos $f'(x_o) = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_o}}{x-x_o}$.

Efetuando os cálculos do numerador (subtração de frações), temos:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_o}}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{\frac{x_o - x}{xx_o}}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{x_o - x}{xx_o} \cdot \frac{1}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{-(x - x_o)}{xx_o} \cdot \frac{1}{x - x_o}$$

Cancelando o termo $x-x_o$, temos

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{-(x - x_o)}{xx_o} \cdot \frac{1}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{-1}{xx_o} = \frac{-1}{x_o^2}$$

Conclusão: Se $f(x) = \frac{1}{x}$ então $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

VI. REGRAS DE DERIVAÇÃO

Você já imaginou calcular a derivada de uma função como $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{2x + 1}$ utilizando a definição de derivada? O trabalho que se tem é muito grande, envolve muitos cálculos !

Para simplificar esse trabalho do cálculo de derivadas, os matemáticos observaram que, se duas funções são deriváveis em um ponto x_o, então a soma f+g, o produto por uma constante kf, o produto f.g e o quociente f/g são também deriváveis nesse ponto. Além disso, **o que é a grande vantagem desta descoberta**, existem fórmulas para estas derivadas. Estas são chamadas de **regras de derivação**.

Proposição: Se f, g são deriváveis em $x_o \in X$, então f +g, kf, fg e f/g $^{(*)}$ são também deriváveis neste ponto, e além disso:

1) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ (a derivada da soma é a soma das derivadas)

2) $(kf)'(x) = kf'(x)$ (a derivada de uma constante vezes uma função é o produto da constante pela derivada da função)

3) $(f \cdot g)'(x_o) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (ou seja, $(fg)' = f'g+fg'$)

4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (ou seja, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$)

As "regras de derivação" são instrumentos muito úteis para obtermos rapidamente a derivada de uma função. Veja o exemplo abaixo:

Exemplo 9: Calcule a derivada das seguintes funções:

a) $h(x)=x^4$ b) $h(x)=x^5$ c) $h(x) =x^3+3x^2+5x+1$ d) $h(x) = 2x^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{x} + 4\sqrt{x}$

Solução:

a) Já vimos que se $h(x)=x^4$ então $h'(x)=4x^3$, mas vamos fazer novamente, ok?

Como $x^4 =x^2 . x^2$, pela regra do produto temos $(x^4)' =2x . x^2 + x^2. 2x =2x^3 +2x^3=4x^3$

b) Como $x^5 =x . x^4$, pela regra do produto temos $(x^5)'=1. x^4 +x .4x^3 = x^4 +4x^4 = 5x^4$

c) A função $h(x) =x^3+3x^2+5x+1$ pode ser escrita como uma soma: $h(x)=x^3 + (3x^2+5x+1)$

Como já sabemos derivar cada parcela, temos $h'(x)=3x^2 + (6x^2+5)$, ou seja, $h'(x)=3x^2+6x^2+5$.

d) Observe inicialmente que podemos escrever $\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}x^2$ e $\frac{3}{x}=3\cdot\frac{1}{x}$.

Logo, podemos reescrever a função h(x) como $h(x)=2x^3+\frac{1}{2}x^2+3\cdot\frac{1}{x}+4\sqrt{x}$.

Resumindo, h(x) é uma soma de funções que já sabemos derivar.

Daí, $h'(x)=2\cdot(3x^2)+\frac{1}{2}(2x)+3\cdot(\frac{-1}{x^2})+4\frac{1}{2\sqrt{x}}=6x^2+x+\frac{-3}{x^2}+\frac{2}{\sqrt{x}}$

Resumo: $h(x)=2x^3+\frac{x^2}{2}+\frac{3}{x}+4\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad h'(x)=6x^2+x+\frac{-3}{x^2}+\frac{2}{\sqrt{x}}$

VII. TABELA DE DERIVADAS

Como já vimos, as regras de derivação são muito úteis para facilitar nosso trabalho de calcular derivadas, sem necessidade de usar a sua definição como um limite. Vimos também na seção anterior alguns exemplos de derivadas.

Para facilitar ainda mais nosso trabalho futuro, apresentamos abaixo uma tabela de derivadas de funções mais elementares. Essa tabela pode ser acrescida de muitas outras funções.

TIPO DE FUNÇÃO	FUNÇÃO	DERIVADA
constante	$f(x)=c$	$f'(x)=0$
afim	$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$
quadrática	$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$
cúbica	$f(x)=x^3$	$f'(x)=3x^2$
potência	$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$
raiz quadrada	$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
recíproca	$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=\frac{-1}{x^2}$
seno	$f(x)=sen(x)$	$f'(x)=cos(x)$
cosseno	$f(x)=cos(x)$	$f'(x)=-sen(x)$
tangente	$f(x)=tg(x)$	$f'(x)=sec^2(x)$
secante	$f(x)=sec(x)$	$f'(x)=sec(x)tg(x)$
Exponencial	$f(x)=2^x$	$f'(x)=2^x \ln(2)$
Exponencial	$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x \ln(a)$
Exponencial	$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x \ln(e)= e^x$
Logaritmo	$f(x)=\log_2(x)$	$f'(x)=\frac{1}{x\ \ln(2)}$
Logaritmo	$f(x)=\log_a(x)$	$f'(x)=\frac{1}{x\ \ln(a)}$
Logaritmo	$f(x)=\log_e(x)=\ln(x)$	$f'(x)=\frac{1}{x\ \ln(e)}=\frac{1}{x}$

Exemplo 10: Sabendo que (senx)=cosx e (cosx)´=-senx determine a derivada de y=tg(x)

Solução: Como se vê na tabela acima, nosso objetivo é mostrar que (tgx)´= $\sec^2(x)$

Para isso, lembremos inicialmente que $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$.

Como $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ temos um quociente para derivar.

Logo, $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Finalmente, temos $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^2 = \sec^2 x$, como queríamos demonstrar!

Exemplo 11: Calcule a derivada das seguintes funções:

a) $y=x^2 \operatorname{sen} x$ b) $y=\operatorname{sen}^2 x$ c) $y = x^3 \operatorname{tg} x$ d) $y=4x^2 \ln x$ e) $y = 3\operatorname{tg} x + \dfrac{x^2+3}{3x+1} + \sqrt{3}$

Solução:

a) $y=x^2 \operatorname{sen} x \Rightarrow y' = (x^2 \operatorname{sen} x)' = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$

b) $y=\operatorname{sen}^2 x \Rightarrow y' = (\operatorname{sen} x . \operatorname{sen} x)' = \cos x \cdot \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$. Logo, $y' = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

c) $y = x^3 \operatorname{tg} x \Rightarrow y' = (x^3 \operatorname{tg} x)' = 3x^2 \operatorname{tg} x + x^3 \sec^2 x$

d) $y=4x^2 \ln x \Rightarrow y' = 8x \cdot \ln x + 4x^2 \cdot \dfrac{1}{x} \Rightarrow y' = 8x \ln x + 4x$

e) Na função $y = 3\operatorname{tg} x + \dfrac{x^2+3}{3x+1} + \sqrt{3}$ temos 3 parcelas para derivar. Note que $\sqrt{3}$ é constante, logo sua derivada é igual a zero.

$$y' = \left[3\operatorname{tg} x + \frac{x^2+3}{3x+1} + \sqrt{3} \right]' \Rightarrow y' = 3 \sec^2 x + \frac{2x \cdot (3x+1) - (x^2+3) \cdot 3}{(3x+1)^2} + 0$$

$$y' = 3 \sec^2 x + \frac{(6x^2+2x) - (3x^2+9)}{(3x+1)^2} = 3 \sec^2 x + \frac{3x^2+2x-9}{(3x+1)^2}$$

Considerações Finais:

Não devemos esquecer nossas regras de derivação, elas são muito importantes para nossos cálculos, não somente agora, como nas aplicações futuras. Veja!

TIPO DE OPERAÇÃO	DERIVADA
Soma de funções	$(f+g)' = f' + g'$
Produto de constante por uma função	$(c f)' = c f'$
Soma de constante com uma função	$(c+f)' = f'$
Produto de funções	$(fg)' = f'g + fg'$
Quociente de funções	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Resumimos acima as 5 primeiras regras de derivação. Além dessas regras existe uma outra, muitíssimo importante, chamada comumente de **Regra da Cadeia**, que dá a fórmula da derivada de uma composição de funções.

Por exemplo, você verá que:

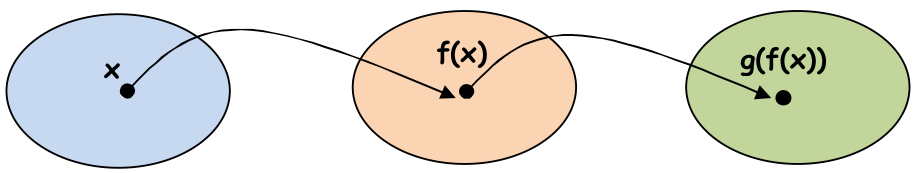
Se $y=sen(x^2+1)$ então $y'=\cos(x^2+1).2x$

Se $y=tg(x^3+2x)$ então $y'=\sec^2(x^3+2x).(3x^2+2)$

Esta Regra da Cadeia será vista em seguida, veja!!

VIII. COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Dadas duas funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$ podemos definir uma nova função $h=g\circ f: A \to C$ definida por $h(x)=g\circ f(x)=g(f(x))$. Ou seja, primeiro calculamos a imagem $f(x)$ e depois calculamos $g(f(x))$.



Por exemplo:

- Se $f(x)=2x$ e $g(x)=senx$ temos $g\circ f(x)= g(f(x))=sen(2x)$
- Se $f(x)=x^2+1$ e $g(x)=cosx$ temos $g\circ f(x)= g(f(x))=\cos(x^2+1)$
- Se $f(x)=3x+1$ e $g(x)=\sqrt{x}$ então $g\circ f(x)=\sqrt{3x+1}$

Nosso objetivo é obter uma fórmula para a derivada da função composta $g\circ f$. Esta fórmula é conhecida com **Regra da Cadeia**, ou **Derivada da Função Composta**.

A título de motivação, vamos ver antes um exemplo, ok?

Exemplo 12: Seja $f(x)=3x+1$ e $g(x)=x^2$. Logo, $h(x)=g\circ f(x)=(3x+1)^2$. Qual a derivada dessa função h?

Solução A: Neste caso não precisamos da Regra da Cadeia para encontrar a derivada de $h(x)=(3x+1)^2$, pois podemos expandir o quadrado e calcular explicitamente quem é a função composta. Depois disso, é só derivar!

De fato, como $h(x)=(3x+1)^2=9x^2+6x+1$ temos $h'(x)=18x+6$

Solução B: Como $h(x)=(3x+1)^2$ é semelhante à função quadrática $y=x^2$, que tem derivada $y'=2x$, poderíamos pensar que a derivada de h é calculada da mesma forma, ou seja, $h'(x) = 2(3x+1)$.

Mas veja: $h'(x)=2(3x+1)=6x+2$ NÃO COINCIDIU o obtido anteriormente!! Logo, esta maneira de derivar NÃO ESTÁ CORRETA!! **Então, onde está o erro na 2ª solução?**

Veja o seguinte: A solução correta é $h'(x)=18x+6$ e **a solução incorreta foi $h'(x)=6x+2$**

O que há então? Note que o que falta para melhorar a solução incorreta é um fator 3, **que é a derivada da função $f(x)=3x+1$**.

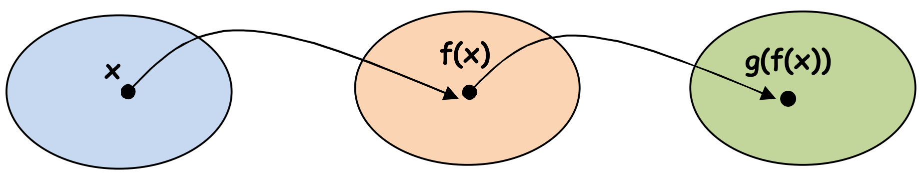
De fato, se multiplicarmos 6x+2 por $f'(x)=3$ obtemos $(6x+2)\cdot 3=18x+6$, que é a solução correta! Resumindo, nossa 2ª solução fica assim:

Solução B: Como $h(x)=(3x+1)^2$ temos $h'(x) = 2(3x+1)\cdot\mathbf{3} = 18x+6$

IX. A REGRA DA CADEIA

O Exemplo 1 visto acima é bastante instrutivo, e nos mostra que para obter a derivada da função composta gof devemos multiplicar as derivadas da funções g e f. Explicitaremos a seguir a regra em uma forma mais precisa.

Teorema (**Regra da Cadeia**): Se $f: A \to B$ é uma função derivável no ponto x_o e $g: B \to C$ é derivável no ponto $f(x_o)$ então a função $gof: A \to C$ é também derivável no ponto x_o. Além disso, vale a regra $(gof)'(x_o) = g'(f(x_o)) \cdot f'(x_o)$



Exemplo 13: **Derivadas Básicas, Apenas com a Regra da Cadeia**

a) Se $h(x)=(4x+1)^2$ então $h'(x)=2(4x+1)\cdot 4 = 32x+8$

b) Se $h(x)=(3x-2)^2$ então $h'(x)=2(3x-2)\cdot 3 = 6(3x-2)=18x-12$

c) Se $h(x)=(2x+1)^3$ então $h'(x)=3(2x+1)^2 \cdot 2 = 6(2x+1)^2$

d) Se $y=sen(3x)$ então $y'=cos(3x)\cdot 3 = 3cos(3x)$

e) Se $y=sen(x^2+1)$ então $y'=cos\,(x^2+1).2x$

f) Se $y=tg(4x+1)$ então $y'=sec^2(4x+1).4= 4sec^2(4x+1)$

g) Se $h(x) = \sqrt{3x+1}$ então $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{3x+1}} \cdot 3 = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

h) Se $h(x) = \sqrt{4x-1}$ então $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{4x-1}} \cdot 4 = \dfrac{2}{\sqrt{3x+1}}$

i) Se $y = \sqrt{senx}$ então $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{senx}} \cdot \cos x = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{senx}}$

j) Se $y=sen^3(x)$ então $y'=3\,sen^2(x) \cdot cosx$

k) Se $y=sen\,(x^3)$ então $y'= cos\,(x^3) \cdot 3x^2$

l) Se $y=e^{3x}$ então $y'=e^{3x}\cdot 3 = 3e^{3x}$

m) Se $y=e^{senx}$ então $y'=e^{senx} \cdot cosx$

Exemplo 14: **Regra da Cadeia com outras operações (soma, produto, quociente)**

Nestes casos devemos observar as duas (ou três) regras conjuntamente, e ter mais atenção!

a) Se $y=sen(3x)+4cos(2x)$ então $y'=cos(3x)\cdot 3 - 4sen(2x)\cdot 2= 3cos(3x) - 8sen(2x)$

b) Se $y = x^3\cdot sen(2x)$ então $y'= 3x^2\cdot sen(2x) + x^3\cdot cos(2x)\cdot 2$

c) Se $h(x)= (3x+2)\cdot tg(2x)$ então $h'(x)= 3\cdot tg(2x) + (3x+2)\cdot sec^2(2x)\cdot 2$

d) Se $h(x)=e^{x}\cdot \cos(3x)$ então $h'(x)=e^{x}\cdot \cos(3x) + e^{x}\cdot [-\text{sen}(3x)\cdot 3] = e^{x}\cos(3x) - 3e^{x}\,\text{sen}(3x)$

e) $y = \dfrac{\text{sen}(x^2)}{3x+1}$ então $y' = \dfrac{\cos(x^2)\cdot 2x - \text{sen}(x^2)\cdot 3}{(3x+1)^2} = \dfrac{2x\cos(x^2) - 3\,\text{sen}(x^2)}{(3x+1)^2}$

e) $y = \dfrac{x^2+3x}{\cos(3x)}$ então $y' = \dfrac{(2x+3)\cdot\cos(3x) - (x^2+3x)\cdot[-\text{sen}(3x)\cdot 3]}{\cos^2(3x)}$

Logo, $y' = \dfrac{(2x+3)\cos(3x) + 3(x^2+3x)\text{sen}(3x)}{\cos^2(3x)}$

Exemplo 15: (Este é para você praticar) Calcule as derivadas das seguintes funções

a) Se $y=3\text{sen}(x^2)+ 4\text{sen}(x^3) - 5\text{sen}^2(x)$

b) Se $y = (x^3+1)\cdot \text{sen}(3x) + (3x^2+4)\cdot \text{tg}(2x)$

c) Se $h(x)= (5x^2+2)\cdot \cos(3x+1)$

d) Se $h(x)=e^{2x}\cdot \cos(x) + e^{x}\cdot \cos(5x)$

Estamos finalizando mais uma parte de nosso estudo sobre derivada. Como você viu, o assunto não é difícil, mas é preciso de muito treino e repetição. Por isso é muito importante que vocês façam mais e mais exercícios, para adquirir rapidez e certeza do sucesso.

Salvador, abril de 2011
Adelmo R. de Jesus