UNIFACS – Universidade Salvador
Disciplina: Geometria Analítica e Álgebra Linear
Professor: Everton Lopes

5^a Lista de Exercícios – Transformações lineares, autovalores e autovetores

1) Verifique quais das transformações abaixo são lineares. Justifique.

a) T(x, y) = (2x , y) b) T(x, y) = (x^2 , y) c) T(x,y) = (2x+1, -y)
d) F(x, y, z) = (x+y, xy, z) e) S(x, y, z) = (x+2y, 0, sen(x))

2) Determine as expressões das funções abaixo, sabendo que:

a) T: $R^2 \to R^3$ e T(1,0) = (-3,1,0) e T(0,1) = (1,2,4)
b) T: $R^2 \to R^3$ e T(1,0) = (2,0,1) e T(0,1) = (1,2,-3)
c) T: $R^2 \to R^3$ e T(1,1) = (2,0,1) e T(0,1) = (1,0,-1)
d) T: $R^3 \to R^3$ e T(1,0,0) = (2,1,0) e T(0,1,0) = (1,0,2) e T(0,0,1) = (-2,3,4)
e) T: $R^3 \to R^3$ e T(1,0,0) = (1,0,1) e T(1,1,0) = (-2,3,4) e T(0,1,1) = (0,1,-3)
f) T: $R^3 \to R^3$ e T(0,0,1) = (1,-1,-3) e T(2,1,2) = (3,4,-4) e T(-1,0,3) = (2,-4,-9)

3) Dado T: $R^2 \to R^2$ linear, T(1,0) = (2,3) e T(0,1) = (-3,5), determine:

a) T(1,2) b) T(2,-4) c) T(x,y)

4) Verifique que S: $R^2 \to R^2$, S(x,y) = (x+y, 2x-y) é um isomorfismo.

5) Verifique se T: $R^3 \to R^3$ dada por T(x, y, z) = (x+y, 2x-z, x-y) é um isomorfismo. Justifique sua resposta.

6) a) Calcule N(T) e a dimensão de T(X), onde T: $R^3 \to R^3$, T(X) = AX, onde

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. T é um isomorfismo?

b) Usando a expressão T(x,y,z) = (x+y, 2x-z, x-y), determine Im(T).

7) Determine em cada caso a seguir se o núcleo de A é uma reta que passa pela origem, um plano passando pela origem, ou somente a origem.

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 3 & -9 & 3 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

8) Seja T: $R^3 \to R^3$ linear dada pela matriz associada $[T] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Determine o núcleo N(T), uma base para ele, e sua dimensão. T é um operador inversível?

9)Determine as matrizes associadas das funções lineares abaixo:

a) T: $R^2 \to R^2$ tal que T(x,y) = (x-3y, -3x+4y)
b) T: $R^2 \to R^3$ tal que T(x,y) = (x-3y, -3x+4y, x+2y)
c) T: $R^3 \to R^3$ tal que T(x,y,z) = (x-y+z, x+4y-z, 2y-3z)
d) T: $R^4 \to R^3$ tal que T(x,y,z,w) = (x-3y+w, 2x-y+z, x+2y-3w)
e) T: $R^4 \to R^4$ tal que T(x,y,z,w) = (2x-3y+z-w, 2x-3y+z, 2y+z-3w,z-w)

10) Determine o polinômio característico, os autovalores e os autovetores de cada operador T a seguir:

a) T: $R^2 \to R^2$, T(x, y) = (y, 2x+y)
b) T: $R^2 \to R^2$, T(x, y) = (-y, x)

c) T: $R^3 \to R^3$, T(X) = AX , onde A = $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) T: $R^3 \to R^3$, $[T] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) T: $R^4 \to R^4$, $[T] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Respostas

1) Somente a função do item (a) é linear. Dê contra-exemplos numéricos nos outros casos.
2) a) T(x, y) = (-3x+y, x+2y, 4y) b) T(x, y) = (2x+y, 2y, x-3y)
c) T(x, y) = (x+y, 0, 2x-y) d) T(x, y, z) = (2x+y-2z, x+3z, 2y+4z)
e) T(x, y, z) = (x-3y+3z, 3y-2z, x+3y-6z)
f) T(x, y, z) = (x-y+z, x+4y-z, 2y-3z)
3) a) (-4,13) b) (16,-14) c) (2x-3y, 3x+5y)
5) Sim, é um isomorfismo, pois N(T) = {(0,0,0)}
6) a) N(T) = [(-1,-1,1)] é uma reta do espaço, dim N(T) = 1. T não é isomorfismo.

b) Im(T) = [(1,2,1), (1,0,-1), (0,-1,0)]

7) a) Reta de equação $\begin{cases} x = \dfrac{-z}{2} \\ y = \dfrac{-3z}{2} \end{cases}$ b) plano de equação : x-3y+z = 0 c) A origem

8) N(T) = [(1,2,1/3)] , Base: β = {(1,2,1/3)} Dimensão: dim N(T) = 1
T não é um operador inversível.

9) a) $[T] = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $[T] = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $[T] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

d) $[T] = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ e) $[T] = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

10) a) p(λ) = (λ - 2) (λ + 1) Autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$
Autovetores: {(1,2),(-1,1)}
b) p(λ) = $\lambda^2 + 1$ Não possui autovalores reais.
c) p(λ) = (2 – λ) (λ - 2) (λ - 3) Autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$
Autovetores: {(0,0,1),(-2,1,1)}
d) p(λ) = $(2 - \lambda)^2$ (1 - λ) Autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$
Autovetores: {(1,0,0),(0,1,0),(0,-2,1)}
e) p(λ) = $(2 - \lambda)^2$ (3 - λ) Autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$
Autovetores: {(1,0,0,0),(0,0,1,1),(0,0,1,2)}