UNIFACS – Universidade Salvador
Disciplina: Geometria Analítica e Álgebra Linear
Professor: Everton Lopes

3ª Lista de Exercícios – Sistemas de Equações / Escalonamento

1) Diga, justificando, quais das seguintes matrizes estão na forma escalonada e as que estão na forma linha reduzida à forma escada LRFE .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ G = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};\ H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix};\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix};\quad K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Escalone as seguintes matrizes do exercício 1 que não estão na forma LRFE obtendo a matriz (linha reduzida à forma escada) linha equivalente a cada uma dela.

3) Para cada um dos sistemas dados a seguir, encontre a matriz ampliada do sistema e escalone a matriz correspondente para obter uma linha equivalente na forma escalonada reduzida por linhas.

$$(a)\begin{cases} x+2y-2z=-6 \\ 3x+2y-2z=-2 \\ 3x-5z=-9 \end{cases}\quad (b)\begin{cases} x-y+2z=4 \\ 3x+y+4z=6 \\ x+y+z=1 \end{cases}\quad (c)\begin{cases} x-y-z=4 \\ x-y+z=2 \end{cases}\quad (d)\begin{cases} x-y+2z-w=-1 \\ 2x+y-2z-2w=-2 \\ -x+2y-4z+w=1 \\ 3x-3w=-3 \end{cases}$$

4) Resolva os seguintes sistemas, usando escalonamento por linhas.

$$a)\begin{cases} x+2y-2z=-6 \\ 3x+2y-2z=-2 \\ 3x-5z=-9 \end{cases}\quad b)\begin{cases} x-y+2z=4 \\ 3x+y+4z=6 \\ x+y+z=1 \end{cases}\quad c)\begin{cases} x-y-z=4 \\ x-y+z=2 \end{cases}\quad d)\begin{cases} 2x+y-2z=10 \\ 3x+2y+2z=1 \\ 5x+4y+3z=4 \end{cases}$$

$$e)\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+5y-2z=-5 \\ x+2y-7z=-8 \end{cases}\quad f)\begin{cases} 2x-y+3z=11 \\ 4x-3y+2z=0 \\ x+y+z=6 \\ 3x+y+z=4 \end{cases}\quad g)\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+5y-2z=3 \\ x+7y-7z=5 \end{cases}\quad h)\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y+z-t=4 \\ x+y-z+t=-4 \\ x-y+z+t=2 \end{cases}$$

5) Calcule a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. A partir dessa matriz A^{-1} dê a solução dos sistemas $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, e $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

6) Determine o posto das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7) Dê exemplos de matrizes satisfazendo as condições dadas a seguir, se possível

a) F_{2x3}, p(F)=2; b) G_{3x2}; p(G) = 3; c) H_{2x4}, p(H) = 3; d) R_3; p (R) = 2

Obs: p(A) = posto de A

8) Em cada um dos seguintes itens considere a matriz escalonada linha equivalente à matriz ampliada de um sistema. A partir dessas matrizes, discuta o sistema original e dê o conjunto-solução, quando for o caso.

$$A)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad F)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9) Discuta em função de k os seguintes sistemas:

$$a) \begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x + y - kz = 0 \\ kx + y - z = 2 \end{cases}$$

10) Encontrar a equação da parábola $y = ax^2 + bx + c$, sabendo que ela passa pelos pontos $P_1(1, 2)$; $P_2(-1, 12)$ e $P_3(4, 2)$.

11) Um par de tênis, duas bermudas e três camisetas custam juntos R$100,00. Dois pares de tênis, cinco bermudas e oito camisetas custam juntos R$235,00. Quanto custam juntos um par de tênis, uma bermuda e uma camiseta?

12) Bronze é uma liga de cobre e zinco, na qual a porcentagem de cobre varia geralmente entre 60% e 70%. Usando dois tipos de bronze, um com 62% e outro com 70% de cobre, deseja-se obter uma tonelada de bronze com exatamente 65% de cobre. Quantos quilos do primeiro tipo de bronze e quantos quilos do segundo devem ser usados?

13) Uma fábrica usa dois tipos de máquina P e Q para produzir dois produtos diferentes A e B. As máquinas P e Q podem trabalhar 80 e 60 horas por semana, respectivamente. Os dois produtos requerem, para serem produzidos, diferentes quantidades de tempo em cada uma das máquinas, como mostra a tabela abaixo.

	Produto A	Produto B	Horas de trabalho/semana
Máquina P	2h	4h	80h
Máquina Q	3h	2h	60h

Determinar o número de unidades de cada produto que as máquinas P e Q podem produzir por semana, operando o tempo todo.

14) Para controlar um certo tipo de praga numa safra de café devem ser usadas três unidades de um produto químico tipo A, duas unidades do tipo B e duas unidades do tipo C. Um barril do spray comercial P, contém uma unidade do produto químico A. Um barril do spray comercial Q, contém uma, duas e uma unidades, respectivamente, desses produtos. Um barril do spray comercial R contém uma unidade de cada produto. Quantos barris de cada tipo de spray devem ser usados para preparar exatamente a quantidade de produto químico necessário para o controle da praga?

15) Foram estudados três tipos de alimentos. Fixada a mesma quantidade (1g) determinou-se que:

i) O alimento I tem 1 unidade de vitamina A; 3 unidades de vitamina B e 4 unidades de vitamina C.
ii) O alimento II tem 2 unidades de vitamina A; 3 unidades de vitamina B e 5 unidades de vitamina C.
iii) O alimento III tem 3 unidades de vitamina A; 3 unidades de vitamina C e não contém vitamina B..

Se são necessárias 11 unidades de vitamina A; 9 de vitamina B e 20 de vitamina C,

a) Encontre todas as possíveis quantidades dos alimentos I, II e III que fornece a quantidade de vitaminas desejada.
b) Se o alimento I custa R$0,60 por grama e os outros dois custam R$0,10, existe uma solução custando exatamente R$1,00?

RESPOSTAS

1) Forma escalonada : B, C, D, E e G;   LRFE : D e E

2) $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim B$; $C \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $F \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $G \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 26 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$H \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & -1 \\ 0 & 1 & -4/3 & 0 \end{pmatrix}$; $J \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7/2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $K \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) As matrizes ampliadas dos sistemas são linha equivalentes a: a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) a) $S = \{ (2, 1, -3) \}$;   b) $S = \left\{ (x, y, z) \in R^3;\ x = \frac{5-3z}{2} \text{ e } y = \frac{z-3}{2} \right\}$;

c) $S = \{ (x, y, z) \in R^3;\ x = y + 3 \text{ e } z = -1 \}$; d) $S = \{ (1, 2, -3) \}$; e) $S = \{ (1, -1, 1) \}$

f) $S = \{ (-1, 2, 5) \}$; g) não existe solução; h) $S = \{ (1, -1, 2, -2) \}$

5) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -3/2 & -5 \\ -5 & 1 & 3 \\ -2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

6) p(A) = 2 ; p (B) = 2 ; p(C) = 2 ; p (D) = 2 , p(E) = 3

7) a) $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) impossível; c) impossível; d) $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Estes exemplos não são únicos

8)
a) Sistema possível e indeterminado com duas variáveis livres
$S = \{ (x, y, z, w) \in R^4; x = 5 - z - 2w \text{ e } y = 3 - 2z - w \}$
b) Sistema possível e determinado S = { (3, 2, 2) }
c) Sistema possível e determinado S = { (0, 0, 0) }
d) Sistema impossível
e) Sistema possível e indeterminado com uma variável livre
$S = \{ (x, y, z) \in R^3; x = 2 - 3z \text{ e } y = 5 - 4z \}$
f) Sistema possível e determinado S = { (3, 2) }

9)
a) Se $k = -6$, então o sistema é possível determinado e $S = \{ (-8, -10)\}$. Se $k \neq -6$, o sistema é impossível.
b) Se $k \neq 1$, então o sistema é possível e indeterminado. Se k = 1, o sistema é impossível. impossível .

10) $y = x^2 - 5x + 6$;

11) R$ 65,00; (Sugestão: Efetue operações com as linhas do sistema encontrado para obter a linha (1 1 1 65)).

12) 625 e 375;

13) Produto A 10 unidades e produto B 15 unidades

14) Com um barril do spray P e 2 barris do spray R a quantidade de produto químico é conseguidas sem precisar do spray Q.

15) a) Se x, y e z são as quantidades dos alimentos I, II e III respectivamente, então $x = 3z - 5$; $y = 8 - 3z$. Uma vez que x; y e z devem ser maiores ou iguais a zero temos que $5/3 \leq z \leq 8/3$
b) Sim, para x = 1 e y = z = 2.