UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Geometria Analítica SEMESTRE: 2011.1

PROFESSOR: *Adriano Cattai* DATA: 08/04/2011

NOME: ____

1^a AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *Utilize caneta* ***preta*** *ou* ***azul****. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
2. *É proibido o uso de calculadora e celulares;*
3. *Solução ilegível é considerada como errada;*
4. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
5. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
6. *Não responder na folha de questões.*

"Lembre-se que as pessoas podem tirar tudo de você, menos o seu conhecimento. É o seu bem mais precioso. Explore; viaje; descubra. Conheça." (Albert Einstein)

Boa Prova!

Q.* 1** (2,0).*** Dados os pontos $A(-2;4;0)$, $B(1;2;-1)$, $C(-1;1;2)$, $D(6;-7;4)$, $E(5;-3;0)$ e $F(3;-4;1)$, responda:

(a) O triângulo ABC é equilátero? Por que?

(b) O triângulo DEF é retângulo? Caso afirmativo, qual o vértice cujo ângulo é reto? Caso negativo, algum ângulo do triângulo DEF é obtuso?

(a) O triângulo ABC será equilátero se $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$. Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (3;-2;-1)$, $\overrightarrow{AC} = C - A = (1;-3;2)$ e $\overrightarrow{BC} = C - B = (-2;-1;3)$, temos:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}; \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{14} \ \text{ e } \ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{14}.$$

Portanto, concluímos que o triângulo ABC é equilátero.

(b) O triângulo DEF será retângulo se um desses produtos for zero: $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EF}$ ou $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FE}$. Vejamos:

- $\begin{cases} \overrightarrow{DE} = E - D = (-1,4,-4) \\ \overrightarrow{DF} = F - D = (-3,3,-3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = 3 + 12 + 12 \neq 0$
- $\begin{cases} \overrightarrow{ED} = D - E = (1,-3,4) \\ \overrightarrow{EF} = F - E = (-2,-1,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = -2 + 3 + 4 \neq 0$
- $\begin{cases} \overrightarrow{FD} = D - F = (3,-3,3) \\ \overrightarrow{FE} = E - F = (2,1,-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FE} = 6 - 3 - 4 = 0$

Como $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FE} = 0$, concluímos que o triângulo é retângulo cujo ângulo reto é o ângulo $D\hat{F}E$.

Q.* 2** (1,0).*** Encontre um vetor unitário $\overrightarrow{w}$ que seja simultaneamente ortogonal aos vetores $\overrightarrow{u} = (1;1;2)$ e $\overrightarrow{v} = (1;3;1)$. Não esqueça de comprovar o resultando obtido.

Como $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ é um vetor ortogonal a ambos os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, basta tomar $\overrightarrow{w}$ como sendo o versor de algum vetor paralelo a $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$. Denotanto por $\overrightarrow{p}$ este produto vetorial e usando o dispositivo prático, temos:

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = i + 2j + 3k - (k + j + 6i) = (-5,1,2).$$

Checando a ortogonalidade, temos:

$$\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{u} = (-5,1,2) \cdot (1,1,2) = -5 + 1 + 4 = 0 \ \text{ e } \ \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{v} = (-5,1,2) \cdot (1,3,1) = -5 + 3 + 2 = 0.$$

Assim, definimos: $\vec{w} = \frac{1}{|\vec{p}|} \cdot \vec{p} = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (-5, 1, 2) = \left(\frac{-5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}} \right)$. Por fim, verificando se $\vec{w}$ é unitário:

$$|\vec{w}| = \sqrt{\left(\frac{-5}{\sqrt{30}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{30}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{30}}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{30} + \frac{1}{30} + \frac{4}{30}} = \sqrt{1} = 1.$$

Q.* 3** (2,0).*** São dados os pontos $A(0, 1, 2)$ $B(2, 1, 0)$, $C(-1, 1, 3)$, $D(4, 2, 0)$ e $E(1, 2, 1)$. Verifique:

(a) Se A, B, C são colineares;

(b) Se A, C, D e E são coplanares.

(a) Os pontos A, B e C são colineares se $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{BC}$, ou seja, se existe algum $k \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{BC}$. Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 0, -2)$ e $\overrightarrow{BC} = C - B = (-3, 0, 3)$, temos que $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BC}$. Portanto os pontos são colineares.

(b) Os pontos A, C, D e E serão coplanares se os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AC} = C - A = (-1, 0, 1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = D - A = (4, 1, -2)$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AE} = E - A = (1, 1, -1)$ forem coplanares. Para tanto, precisamos checar se o determinante abaixo é nulo:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Calculando este determinando, temos $1+0+4-(1+2+0) = 2 \neq 0$. Assim, vemos que os vetores não são coplanares e, portanto, os pontos também não são.

Q.* 4** (2,0).*** Considere as retas r e s, ao lado. Determine:

(a) os vetores diretores e dois pontos, distintos, de cada reta;

(b) a posição relativa entre r e s.

$$r : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 3t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} y = 4x - 1 \\ z = -2x + 3 \end{cases}$$

(a) Para a reta r, se $t = 0$ temos $A(-1, -2, 0)$ um ponto de r e, se $t = 1$ temos $B(1, -1, 3)$ outro ponto de r. Assim, o vetor $\vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = B - A = (2, 1, -3)$ é um vetor diretor de r. Agora, para a reta s, se $x = 0$ temos $P(0, -1, 3)$ um ponto de s e, se $x = 1$ temos $Q(1, 3, 1)$ outro ponto de s. Desta forma, o vetor $\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (1, 4, -2)$ é um vetor diretor de s.

(b) Como $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (2, 1, -3) \cdot (0, -1, 3) = 0$, temos que esta retas são ortogonais. Precisamos definir se elas são reversas (não coplanares) ou se são concorrentes. Se o sistema envolvendo as equações dessas retas for solúvel, então r e s são concorrentes. Caso contrário serão reversas. Vejamos:

- $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 + t \\ y = 4x - 1 \end{cases} \Rightarrow -2 + t = 4(-1 + 2t) - 1 \Rightarrow t = 3/7;$
- $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ z = 3t \\ z = -2x + 3 \end{cases} \Rightarrow 3t = -2(-1 + 2t) + 3 \Rightarrow t = 5/7.$

Como não temos um único número para t que satisfação as equações, vemos que $r \cap s = \varnothing$. Logo r e s são reversas.

Q.* 5** (1,5).*** São dados os pontos $A(3, 1, -1)$, $B(1, 0, 1)$, $C(1, 2, 1)$ e $D(0, 1, 0)$. Determine o plano π que contenha os pontos A e B e seja paralelo ao vetor $\overrightarrow{CD}$.

Como π contém os pontos A e B, o vetor $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, -1, -2)$ é um vetor do plano. Agora, sendo $\overrightarrow{CD}$ um vetor paralelo a este plano, podemos definir o vetor normal a π como:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 0, 1).$$

Logo, a equação geral de π será dada por $-x + 0 \cdot y + z + d = 0$. Como $A(3, 1, -1)$ é ponto deste plano, temos que suas coordenadas satisfazem a equação do plano, ou seja, $-3-1+d = 0$, donde $d = 4$. portanto, $\pi : -x+z+4 = 0$.

Q. 6 (1,5)**.** Estude a posição relativa entre os planos $\pi_1 : 2x - 3y + z + 1 = 0$ e $\pi_2 : x + 2y + 4z - 5 = 0$. Caso eles sejam concorrentes, determine a equação vetorial da reta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

Como $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (2, -3, 1) \cdot (1, 2, 4) = 0$, temos que estes planos são concorrentes e ortogonais. um vetor diretor para a reta $r = \pi_1 \cap \pi_2$ é qualquer vetor paralelo ao vetor $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-14, -7, 7)$. Assim, vamos adotar $\vec{v}_r = (2, 1, -1)$ o vetor diretor de r. Agora, um ponto da reta é qualquer ponto que satisfaça às duas equações $2x - 3y + z + 1 = 0$ e $x + 2y + 4z - 5 = 0$. Supondo que, para este ponto, seja $x = 0$, assim, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -3y + z + 1 = 0 \\ 2y + 4z - 5 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, temos $y = \dfrac{9}{14}$ e $z = \dfrac{13}{14}$. Portanto, uma equação vetorial para a reta r é $P = A + t \cdot \vec{v}_r$, ou seja, $(x, y, z) = \left(0, \dfrac{9}{14}, \dfrac{13}{14}\right) + t \cdot (2, 1, -1)$.