UNIVERSIDADE SALVADOR

DISCIPLINA: Fundamentos de Matemática — SEMESTRE: 2011.1

PROFESSOR: *Adriano Cattai* — DATA: 07/04/2011

NOME: ________________________________

1ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *Utilize caneta **preta** ou **azul**. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
2. *É proibido o uso de calculadora e celulares;*
3. *Solução ilegível é considerada como errada;*
4. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
5. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
6. *Não responder na folha de questões.*

"Lembre-se que as pessoas podem tirar tudo de você, menos o seu conhecimento. É o seu bem mais precioso. Explore; viaje; descubra. Conheça." (Albert Einstein)

Boa Prova!

***Q.* 1** (3,0)**.** Mostre, com auxílio de tabelas verdades, as leis de De Morgam, ou seja, as equivalências lógicas: (a) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ e (b) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$.
Com auxílio dessas leis, negue as proposições: (c) $x > 3$ e x é par; (d) Júlia vai ao cinema ou vai ao teatro.

(a)

1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim (5)$	$\sim p \vee \sim q$	$(6) \leftrightarrow (7)$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V

(b)

1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim (5)$	$\sim p \wedge \sim q$	$(6) \leftrightarrow (7)$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	v	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	V

(a) Como na coluna (8) só temos valor lógico verdadeiro para a bicondiconal, ou seja, uma tautologia, temos a implicação.

(b) Idem item acima.

(c) $\sim(x > 3 \wedge x$ é par$) \Longleftrightarrow \sim(x > 3) \vee \sim(x$ é par$) \Longleftrightarrow x \leq 3 \vee x$ não é par;

(d) Seja p: "Júlia vai ao cinema" e q: Júlia vai ao teatro. Assim, a proposição Júlia vai ao cinema ou vai ao teatro pode ser escrita $p \vee q$ que, sua negação é: $\sim(p \vee q) \Longleftrightarrow \sim p \wedge \sim q$. Por tanto, a negação de "Júlia vai ao cinema ou vai ao teatro" é "Júlia não vai ao cinema e não vai ao teatro".

***Q.* 2** (2,0)**.** Decida, justificando, em verdadeiro ou falso as afirmações abaixo. Quando falso você pode justificar exibindo um contra exemplos.

(a) Se $p(x)$: "x é par" e $q(x)$: "$x + 1$ é ímpar", em $\mathbb{Z}$, então $p(x)$ e $q(x)$ são equivalentes;

(b) Se $p(x)$: "x é primo, $x \neq 2$" e $q(x)$: "x é ímpar", em $\mathbb{N}$, então $p(x)$ e $q(x)$ são equivalentes;

(c) Se $x \in \mathbb{Z}$ é ímpar, então x^2 é ímpar.

(d) Se A e B são dois conjuntos não vazios, então $B \cap (A - B) = \varnothing$.

(a) VERDADEIRO. Como o conjunto verdade de $p(x)$ é todo e qualquer número inteiro par e, o conjunto verdade de $q(x)$ é também todo e qualquer número inteiro par (visto que todo número inteiro par adicionado 1 é ímpar), temos que essas proposições possuem o mesmo conjunto verdade.

(b) FALSO. Como existe número ímpar que não é primo, por exemplo 9, temos que $p(x)$ e $q(x)$ não são equivalentes, visto que não possuem o mesmo conjunto verdade.

(c) VERDADEIRO. Sendo $x \in \mathbb{Z}$ ímpar, temos que existe algum $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 2n + 1$, ou seja, a soma entre 1 é um número par. Daí, $x^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$. Portanto x^2 é ímpar.

(d) VERDADEIRO. Como $A - B$ representa o conjunto de todos os elementos de A que não pertencem a B, isto é, $\forall\, x \in B$, temos $x \notin A - B$. Assim, é óbvio que $B \cap (A - B) = \varnothing$.

Q.* 3** (2,0).*** Determine o conjunto verdade, em $\mathbb{R}$, das sentenças abertas $p(x) : \dfrac{2x-1}{x-2} < 1$ e $q : 2x \leq x^2$ usando o método esquemático do estudo de sinais. Exiba os conjuntos verdade com notação de conjuntos e represente-os na reta numérica. Quais seriam os conjuntos verdade de cada se o universo fosse $\mathbb{N}$?

Inicialmente, considere as seguintes equivalências:

$$\frac{2x-1}{x-2} < 1 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-2} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1-(x-2)}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2} < 0$$

Visto que o quociente será negativo se o numerador e o denominador discordarem em sinais, temos:

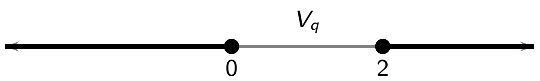
$$\frac{x+1}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1<0 \text{ e } x-2>0 \\ \text{ou} \\ x+1>0 \text{ e } x-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-1 \text{ e } x>2 \\ \text{ou} \\ x>-1 \text{ e } x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varnothing \\ \text{ou} \\ -1<x<2 \end{cases}$$

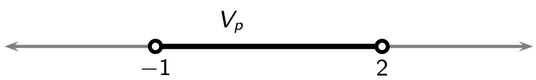
Assim, temos $V_p = \{x \in \mathbb{R}; -1 < x < 2\}$ como sendo o conjunto verdade de $p(x)$.

Agora, considere as equivalências:

$$2x \leq x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \text{ e } x-2 \geq 0 \\ \text{ou} \\ x \leq 0 \text{ e } x-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \text{ e } x \geq 2 \\ \text{ou} \\ x \leq 0 \text{ e } x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \text{ou} \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Ou seja, $V_q = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$ como sendo o conjunto verdade de $q(x)$.





Se o universo for $\mathbb{N}$, teremos $V_p = \{0, 1\}$ e $V_q = \{0, 2, 3, 4, 5, \ldots\} = \mathbb{N} - \{1\}$.

Q.* 4** (2,0).*** Uma vizinhança de um número real x é qualquer intervalo aberto (a, b) contendo x. O comprimento da vizinhança (a, b) é $b - a$, ou seja, o tamanho do intervalo. Assim:

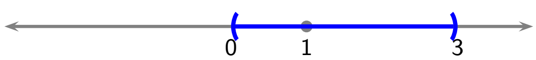
(a) Determine, representando na reta real, duas vizinhas para o número real $x = 1$. Quantas vizinhanças esse número possui?

(b) O número $x = 1$ possui uma vizinhança cujo comprimento seja menor do que $0,00001$? Se negativo, por que? Caso afirmativo, exiba uma.

(c) Considere o conjunto $A = [0, 2]$. Existe alguma vizinhança para $x = 2$ que esteja contida em A? Se negativo, por que? Caso afirmativo, exiba uma.

(d) Considere o conjunto $A = [0, 2]$. Existe alguma vizinhança para $x = 1,99999$ que esteja contida em A? Se negativo, por que? Caso afirmativo, exiba uma.

(a) Como vizinhança de um número é qualquer intervalo aberto contendo este número, podemos afirmar que para qualquer número, em especial para o número 1, existem infinitas vizinhanças (ou quantas quisermos). Por exemplo, os conjuntos abertos $A = (-1, 2)$ e $B = (0, 3)$ são duas vizinhanças para $x = 1$.



(b) Sim, o número 1 possui uma vizinhança cujo comprimento seja menor do que $0,00001$. Por exemplo, basta supor uma vizinhança de comprimento igual à metade deste comprimento, ou seja, $0,000005$. Assim o intervalo aberto $(0,9999975; 1,0000025)$ é uma vizinhança para 1 cujo comprimento é $1,0000025 - 0,9999975 = 0,000005$.

(c) Perceba que uma vizinhança de 2 seria qualquer intervalo aberto da forma $(2 - a, 2 + a)$, para alguma $a > 0$. Por menor que seja este número a, sempre $2 + a$ será maior do que 2. Portanto não existe alguma vizinhança de 2 que esteja contida em $A = [0, 2]$.

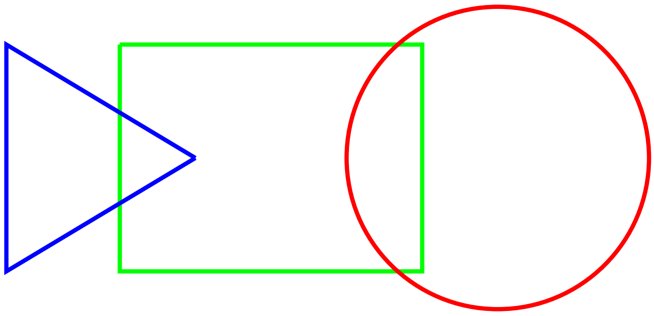
(d) Sim. Basta pegar o intervalo $(1,99999 - a, 1,99999 + a)$ para algum a menor do que, ou igual, a $0,000001$. Por exemplo, se $a = 0,000001$, temos $(1,999989; 1,999991)$ uma vizinhança de $1,99999$ e que está contida no conjunto $A = [0, 2]$

Q. 5 (1,0)**.** Utiliza diagramas de Venn para mostrar que as conclusões não são válidas.

(a) Alguns livros são verdes e algumas coisas verdes são comestíveis. Concluímos que alguns livros são comestíveis.

(b) Alguns homens sabem nadar. Não existem peixes que não sabem nadar. Concluímos que alguns peixes são homens.

(a) Suponha que o triângulo represente o conjunto dos livros; o retângulo o conjunto das coisas verdes e o círculo o conjunto das coisas comestíveis. Veja que há interseção entre o triângulo e o retângulo (pois existem livros verdes) e que há interseção entre o círculo e o retângulo (pois existem coisas comestíveis que são verdes). No entanto, não há a "obrigatoriendade" de ter interseção entre o triângulo e o círculo.



(b) Agora, suponha que o triângulo seja o conjunto dos homens; o retângulo o conjunto dos seres que sabem nadar e o círculo o conjunto do peixes. Como todo peixe sabe nadar, temos o círculo contido no retângulo. Como existem homens que não sabem nadar, o triângulo possui parte fora do retângulo. No entanto, veja que não há a necessidade de termos um interseção entre o triângulo e o círculo.