Capítulo 1

CÁLCULO PROPOSICIONAL

1. PROPOSIÇÕES E CONECTIVOS

A Lógica Matemática se ocupa da análise e relações entre certas sentenças, quase sempre de conteúdo matemático, chamadas *proposições*.

> Uma *proposição* é uma sentença (conjunto de palavras e símbolos) declarativa, que exprime um pensamento de sentido completo, e que pode ser classificada como *verdadeira* ou *falsa*.

Os termos *verdade* e *falsidade* são chamados *valores lógicos* de uma proposição.

Para efeito de classificar as proposições em *verdadeiras* ou *falsas*, e desenvolver a teoria de modo consistente, a Lógica Matemática adota como regras fundamentais os dois seguintes princípios:

I) *Princípio da Não Contradição* - Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

II) *Princípio do Terceiro Excluído* - Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa (isto é, verifica-se sempre um desses casos e nunca um terceiro).

Pelos dois princípios anteriores temos que: *Toda proposição tem um e somente um dos valores lógicos, verdade ou falsidade*. Por este motivo, chamamos a Lógica Matemática de *bivalente*.

Exemplos e Contra-Exemplos:

1) Salvador é a capital da Bahia.

2) O poeta Castro Alves era baiano.

3) 2 é um número par.

4) $2 + 3 < 5$

5) $x + 2 = 1$

6) Davi era baixo.(*)

7) Como faz calor!

8) Que dia é hoje?

(*) Referência ao personagem bíblico

9) Resolva o exercício. 10) A matemática

11) A matemática é fácil.

Nos exemplos, 1) 2) e 3) temos proposições verdadeiras e em 4) temos uma proposição falsa. O exemplo 5) não é uma proposição, uma vez que não podemos atribuir um único valor lógico, este depende do valor atribuido a x. Em 6) e 11) não temos proposições pois os conceitos "baixo" e "fácil" são subjetivos. Os exemplos 7) , 8) e 9) não são proposições pois não são sentenças declarativas. 10) não é uma proposição porque não tem sentido completo.

Indicaremos as proposições por letras minúsculas p, q, r, s, t, ... e os valores lógicos por $V(p) = V$ (ou 1), para uma proposição verdadeira e, $V(p) = F$ (ou 0), para uma proposição falsa.

Exemplo: Sejam as proposições,

p: O arco-íris é colorido.

q: $2 > 3$

Temos que $V(p) = V$ e $V(q) = F$

Dadas proposições podemos formar outras proposições usando as expressões "não", "e" , "ou" , "se ... então" e "se, e somente se". Essas expressões são os *conectivos fundamentais da Lógica Matemática*.

Exemplos: Com as proposições "2 é ímpar" e "3 é primo" podemos formar as sentenças,

1) 2 **não** é ímpar
2) 2 é ímpar **e** 3 é primo.
3) 2 é ímpar **ou** 3 é primo.
4) **Se** 2 é ímpar **então** 3 é primo.
5) 2 é ímpar **se, e somente se,** 3 é primo.

As sentenças formadas pela combinação de proposições usando-se os conectivos são proposições e seus valores lógicos serão definidos na secção 2 deste capítulo. Neste caso, são chamadas de *proposições compostas* ou *moleculares* [(*)]

As *proposições simples* são aquelas que não contêm nenhuma outra como parte de si mesma, ou seja, não são obtidas de outras com o uso dos conectivos. São também chamadas de *atômicas.*

Proposições como "2 é ímpar" e "3 é primo" são *simples.* Já as proposições de 1) a 5), dadas acima, são *compostas*.

A seguir temos os conectivos fundamentais, os símbolos usados para representá-los e suas denominações

Conectivo	***Símbolo***	***Denominação***
e	$\wedge$	conjunção
ou	$\vee$	disjunção
se ... então	$\rightarrow$	condicional
se, e somente se,	$\leftrightarrow$	bicondicional
não	~	negação ou modificador

Dadas proposições p e q, usaremos também as seguintes denominações para as proposições compostas:

"p **e** q" é a *conjunção* de p e q e é indicada por $\mathbf{p \wedge q}$

"p **ou** q" é a *disjunção* de p e q e é indicada por $\mathbf{p \vee q}$

"**se** p **então** q" é a *condicional* de p e q e indicada por $\mathbf{p \rightarrow q}$

"p **se, e somente se,** q" é a *bicondicional* de p e q e indicada por $\mathbf{p \leftrightarrow q}$

A negação de p é indicada por ~p e é representada na linguagem corrente por "**não** p" ou por "**não é verdade que** p" ou ainda por "**é falso que** p".

(*) Devemos ressaltar que esta *não* é uma classificação *realmente* importante. Existem proposições simples que, mantendo-se essencialmente o mesmo conteúdo, podem ser transformadas em compostas e vice-versa, como, por exemplo, a proposição simples "2 e 3 são números primos" e a proposição composta "2 é um número primo e 3 é um número primo".

Exemplos:

1) Dadas as proposições:

p: Jorge Amado escreveu o romance "Mar Morto" (*).

q: Rui Barbosa era baiano (**).

temos as seguintes traduções para a linguagem corrente,

$\sim p$:	Jorge Amado **não** escreveu o romance "Mar Morto". ou **Não é verdade que** Jorge Amado escreveu o romance "Mar Morto".
$p \wedge \sim q$:	Jorge Amado escreveu o romance "Mar Morto" **e é falso que** Rui Barbosa era baiano.
$\sim p \vee q$:	Jorge Amado **não** escreveu o romance "Mar Morto" **ou** Rui Barbosa era baiano. ou **Não é verdade que** Jorge Amado escreveu o romance "Mar Morto" **ou** Rui Barbosa era baiano.
$\sim(p \vee q)$	**Não é verdade que:** Jorge Amado escreveu o romance "Mar Morto" **ou** Rui Barbosa era baiano.

2) Dadas,

p: 2 é um número par

q: 6 é múltiplo de 3,

temos a seguir proposições e suas traduções para a linguagem simbólica

2 **não** é par **ou** 6 é múltiplo de 3	$\sim p \vee q$
Se 6 **não** é múltiplo de 3 **então** 2 é par	$\sim q \rightarrow p$

(*) Escritor baiano - (1912-2001). Autor de vários romances como Gabriela Cravo e Canela, Mar Morto etc.
(**) Político e jurisconsulto brasileiro, natural de Salvador-BA, (1849-1923).

2 **não** é par **se, e somente se**, 6 é múltiplo de 3	$\sim p \leftrightarrow q$

EXERCÍCIOS

1) Identifique quais das sentenças a seguir **não** são proposições, justificando.

a) Marcos é elegante.

b) O Sol é uma estrela.

c) 10^{10} é um número grande.

d) $10^{10} > 10^9$.

e) Salvador é a capital da Bahia e a lua é de queijo.

f) Se 5 é primo então 2 não divide 5.

g) A terra é redonda?

h) O Pico da Neblina é muito alto. [(*)]

i) O Pico da Neblina é mais alto que o Pico da Bandeira. [(**)]

j) A baleia é um mamífero ou Davi era baixo[(***)].

2) No exercício anterior, classifique **as proposições** em simples ou compostas.

3) Traduza para a linguagem corrente as seguintes proposições:

a) $p \vee \sim q$ b) $p \rightarrow q$ c) $\sim p \wedge \sim q$ d) $p \leftrightarrow \sim q$ e) $(p \vee \sim q) \leftrightarrow (q \wedge \sim p)$

I) Para proposições p: "D. Pedro I proclamou a independência do Brasil" e q: "D. Pedro I foi imperador do Brasil".

II) Para proposições "p: $2 > 3$" e "q: $2 \neq 3$".

4) Considere as proposições "p: Davi era mais baixo que Golias e "q: Davi era judeu". Traduza para a linguagem simbólica as seguintes proposições:

a) Não é verdade que: Davi era mais baixo que Golias ou era judeu.

[(*)] Ponto culminante do Brasil com 3.014 m

[(**)] Ponto culminante do centro-sul do Brasil com 2.890 m.

b) Davi era mais alto ou da mesma altura que Golias.

c) Davi não era mais baixo que Golias e nem judeu.

(*Expressões da forma "não é p e nem q" devem ser vistas como "não p e não q"*)

d) Se Davi era judeu então não era mais baixo que Golias.

Respostas:

1) Não são proposições:

a) o conceito "elegante" é subjetivo, alguém que seja "elegante" na opinião de algumas pessoas pode não ser para outras.

c) "grande" é um conceito relativo, depende do contexto.

g) não é uma sentença declarativa

h) análogo ao item a)

j) análogo ao item a)

2) b) simples; d) simples; e) composta; f) composta; i) simples.

3) I) a) D. Pedro I proclamou a independência do Brasil ou não foi imperador do Brasil;

b) Se D. Pedro I proclamou a independência do Brasil então foi imperador do Brasil;

c) D. Pedro I não proclamou a independência do Brasil e não foi imperador do Brasil;

d) D. Pedro I proclamou a independência do Brasil se, e somente se, não foi imperador do Brasil;

e) D. Pedro I proclamou a independência do Brasil ou não foi imperador do Brasil se, e somente se, D. Pedro I foi imperador do Brasil e não proclamou a independência do Brasil;

II) a) $2 > 3$ ou $2 = 3$ (ou de forma mais resumida "$2 \geq 3$");

b) Se $2 > 3$ então $2 \neq 3$;

c) 2 não é maior que 3 e $2 = 3$ (ou $2 \leq 3$ e $2 = 3$);

d) $2 > 3$ se, e somente se, $2 = 3$;

e) $2 > 3$ ou $2 = 3$ se, e somente se, $2 \neq 3$ e 2 não é maior que 3 (ou de forma mais resumida, $2 \geq 3$ se, e somente se, $2 < 3$).

4) a) $\sim(p \vee q)$; b) $\sim p$; c) $\sim p \wedge \sim q$; d) $q \rightarrow \sim p$.

(***) Davi, personagem bíblico (séc XI a.C.), segundo rei dos judeus, derrotou o gigante Golias.

2. OPERAÇÕES LÓGICAS COM PROPOSIÇÕES
VALORES LÓGICOS

O que queremos saber agora é: conhecidos os valores lógicos das proposições dadas, qual o valor lógico da proposição resultante obtida com os conectivos?

Respondendo a esta pergunta vamos definir os valores lógicos das proposições: ~p, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$, como decorrentes dos valores lógicos das proposições p e q. Para que o tema se torne o mais natural, usaremos, sempre que possível, nosso "bom senso" adquiridos de situações cotidianas. Mas vale ressaltar que estas definições nem sempre nos conduzem a situações ou a exemplos que estão em acordo com este "bom senso".

Negação

Tomemos como exemplos as proposições a seguir e seus valores lógicos.

1) Sejam p: "1 é raiz da equação $x^2-1 = 0$" e a sua negação ~p: "1 não é raiz da equação $x^2-1 = 0$". Então V(p) = V e V(~p) = F.
2) Sejam q: "π é um número racional" e ~q: "Não é verdade que π é um número racional". Então V(q) = F e V(~q) = V.

De um modo geral temos:

> A negação de uma proposição p tem valor lógico verdade quando p é falsa e valor lógico falsidade quando p é verdadeira.

Conjunção

Dadas as proposições p: "O Zimbábue é um país africano" e q: "O inglês é a língua oficial da Guiana" mesmo que não saibamos os valores lógicos de p e de q, sabemos que a proposição $p \wedge q$: " O Zimbábue é um país africano **e** o inglês é a língua oficial da

Guiana" é verdadeira apenas se o Zimbábue for um país africano e também o inglês for a língua oficial da Guiana. Em qualquer outra situação a proposição $p \wedge q$ é falsa. (*)

De modo geral temos,

> Dada a proposição p e a proposição q, a proposição $p \wedge q$ é verdadeira quando as duas proposições forem verdadeiras, e é falsa se pelo menos uma delas for falsa.

Exemplos:

1) 2 é ímpar **e** 3 é primo.

2) Salvador é a capital da Bahia **e** a lua é uma estrela.

3) π é um número irracional **e** 3 divide 9.

4) 2 é raiz da equação $x^2-1 = 0$ **e** 0,333... não é um número racional.

De acordo com o que já estabelecemos, apenas a proposição do item 3) é verdadeira, todas as outras são falsas.

Disjunção

Dadas as proposições p: "O Português é a língua oficial do Brasil" e q:"Zamzibar é uma ilha da Europa", como sabemos que p é verdadeira, então podemos afirmar que a proposição $p \vee q$: " O Português é a língua oficial do Brasil **ou** Zamzibar é uma ilha da Europa" é verdadeira mesmo que não saibamos se q é ou não verdadeira.(*)

De um modo geral temos,

> Dadas proposições p e q, a proposição $p \vee q$ é verdadeira quando pelo menos uma das proposições for verdadeira, e é falsa se as duas forem falsas.

Exemplos:

Sejam as proposições,

1) 2 é ímpar **ou** 3 é primo.

(*) Escreve-se Zimbabwe ou Zimbábue. Ambas são proposições verdadeiras.
(*) Zamzibar é uma ilha da África

2) Salvador é a capital da Bahia **ou** a lua é uma estrela.

3) π é um número irracional **ou** 3 divide 9.

4) 2 é raiz da equação $x^2-1 = 0$ **ou** 0,333... não é um número racional.

De acordo com o que estabelecemos, apenas a proposição do item 4) é falsa, todas as outras são verdadeiras.

Observação: A disjunção definida anteriormente é chamada *disjunção inclusiva*. Existe também a chamada *disjunção exclusiva*, indicada por $\dot{\vee}$ (que se lê: ou ... ou) em que $p \dot{\vee} q$ é verdadeira se apenas uma das proposições é verdadeira.

Condicional

Dadas as proposições p: "O poeta Castro Alves nasceu em Salvador" e q: "O poeta Castro Alves era brasileiro" então o nosso "bom senso" nos diz que, mesmo que sejam desconhecidos os valores lógicos de p ou de q, a proposição $p \to q$: "Se o poeta Castro Alves nasceu em Salvador então era brasileiro" é verdadeira. Neste caso nós nos baseamos na certeza que caso p seja verdadeira então q também é verdadeira. Ou seja, podem ocorrer as seguintes combinações de valores lógicos para as proposições acima:

V(p) = V e V(q) = V.

V(p) = F e V(q) = V.

V(p) = F e V(q) = F (*).

E, como as pessoas que nascem em Salvador são brasileiras, não pode ocorrer

V(p) = V e V(q) = F.

De modo geral temos,

Dadas proposições p e q , a proposição $p \to q$ é falsa quando p é verdadeira e q é falsa e é verdadeira nos demais casos.

(*) O poeta Castro Alves nasceu em Muritiba, perto de Curralinho, hoje cidade de Castro Alves-Ba

Exemplos:

a) As proposições p: "2 divide 4" e q: "2 divide 8" são verdadeiras. Logo a proposição $p \rightarrow q$: "**Se** 2 divide 4 **então** divide 8" é verdadeira.

b) As proposições p: "2 = -2" e q: "-1 = 3" são falsas. Logo a proposição $p \rightarrow q$: "**Se** 2 = -2 **então** -1 = 3" é verdadeira.

c) A proposição p: "2 =- 2" é falsa e a proposição q: "4 = 4" é verdadeira. Logo, $p \rightarrow q$: "**Se** -2 = 2 **então** 4 = 4" é verdadeira.

d) A proposição p: "1< 3" é verdadeira e a proposição q: " $\frac{-1}{2} < \frac{-3}{2}$ " é falsa. Logo, $p \rightarrow q$: "**Se** 1< 3 **então** $\frac{-1}{2} < \frac{-3}{2}$ " é falsa.

Observações:

1) Na condicional $p \rightarrow q$ temos que: p é chamado de antecedente e q é chamado de conseqüente. Dizemos também que q é consequência de p (veja mais adiante as proposições de cunho matemático).

2) A condicional $p \rightarrow q$ também pode ser lida como: "p somente se q" ou "q, se p"

3) Quando a condicional $p \rightarrow q$ é verdadeira dizemos que "p é *condição suficiente* para q" ou ainda "q é *condição necessária* para p". O exemplo a seguir pode nos ajudar a "aceitar" o uso dos termos "suficiente" e "necessária".

"Se Adão é pai de Abel então é mais velho que Abel". (*)

a) Adão ser o pai de Abel é condição suficiente para ele ser mais velho que Abel, ou seja, é suficiente Adão ser o pai de Abel para garantirmos que ele é mais velho que Abel.

b) Adão ser mais velho que Abel é condição necessária para ele ser o pai de Abel, ou seja, é necessário que Adão seja mais velho que Abel para que ele possa ser o pai de Abel.

3) Notemos que, de acordo com a regra que estabelecemos para o valor lógico da condicional, quando o valor lógico da proposição p é falso, temos que $p \rightarrow q$ é automaticamente verdadeira (não depende do valor lógico de q). Para o nosso "bom senso", isto se justifica pelo fato de que **se p é falsa**, qualquer conclusão pode ser tirada daí, verdadeira ou falsa. Por exemplo, se supusermos que "-2 = 2" (somando-se 1 a ambos os membros) podemos concluir que "-1 = 3" e (elevando-se ambos os membros ao

quadrado) também que "4 = 4". Em outras palavras, se p é falsa, tudo é válido como nos ditados populares: " Se você é o dono da Coca-Cola então eu sou o rei da Inglaterra".

4) Também da regra estabelecida, surgem proposições que apesar de não terem nexo são verdadeiras. Tais como: "Se 2 = 2 então a Lua é satélite da Terra", "Se a Terra é quadrada então 2 + 2 = 4", "Se a Bahia é a capital do Brasil então Paris é uma cidade dos Estados Unidos". Essas proposições, apesar de serem verdadeiras, não têm nenhum sentido prático.

5) Uma condicional $p \to q$ não afirma que o consequente q se "deduz" do antecedente p, ou seja, pode não haver uma relação intrínseca entre p e q. Por essa razão a condicional é também chamada de "implicação material".

A partir da condicional $p \to q$ podemos obter as seguintes proposições:

a) "$q \to p$" que é a sua *recíproca*

b) "$\sim q \to \sim p$"que é a sua *contrapositiva*

Exemplos:

1) Dada a condicional "Se $\pi > 3$ então $\pi > 4$" temos

a) a sua recíproca: "Se $\pi > 4$ então $\pi > 3$ "

b) a sua contrapositiva: "Se π não é maior que 4 então π não é maior que 3 " (ou "Se $\pi \leq 4$ então $\pi \leq 3$")

2) Dada a condicional: "Se $\sqrt{3}$ é um número irracional então $2\sqrt{3}$ é irracional", temos

a) a sua recíproca: "Se $2\sqrt{3}$ é irracional então $\sqrt{3}$ é irracional"

b) a sua contrapositiva: "Se $2\sqrt{3}$ não é irracional então $\sqrt{3}$ não é irracional" ou "Se $2\sqrt{3}$ é racional então $\sqrt{3}$ é racional"

(*) Referência aos personagens bíblicos

Bicondicional

Dadas as proposições p: "O poeta Castro Alves nasceu na Bahia" e q: "O poeta Castro Alves era baiano ", então mesmo que fossem desconhecidos os valores lógicos de p ou de q, a proposição $p \leftrightarrow q$: "O poeta Castro Alves nasceu na Bahia**, se, e somente se**, era baiano" é verdadeira. Isto acontece porque p e q têm sempre os mesmos valores lógicos, ou seja, ou ambas são verdadeiras ou ambas são falsas. Podem ocorrer as seguintes combinações de valores lógicos para as proposições acima:

V(p) = V e V(q) = V.

V(p) = F e V(q) = F.

Não pode ocorrer a situação: O poeta Castro Alves nasceu na Bahia e não era baiano.

V(p) = V e V(q) = F.

Nem a situação: O poeta Castro Alves não nasceu na Bahia e era baiano.

V(p) = F e V(q) = V.

De modo geral dizemos que,

> Dadas as proposições p e q, a proposição $p \leftrightarrow q$ é verdadeira quando p e q tiverem os mesmos valores lógicos e é falsa nos demais casos.

Exemplos:

a) As proposições p: "2 divide 4" e q: "2 divide 8" são ambas verdadeiras. Logo a proposição $p \leftrightarrow q$: "2 divide 4 **se, e somente se,** divide 8" é verdadeira.

b) As proposições p: "2 = -2" e q: "-1 = 3" são ambas falsas. Logo a proposição $p \leftrightarrow q$: "2 = -2 **se, e somente se,** -1 = 3" é verdadeira.

c) A proposição p: "2 = -2" é falsa e a proposição q: "4 = 4" é verdadeira. Logo, $p \leftrightarrow q$:"2 = -2 **se, e somente se,** 4 = 4" é falsa.

d) A proposição p: "1< 3" é verdadeira e a proposição q: "$\frac{-1}{2} < \frac{-3}{2}$" é falsa. Logo, $p \leftrightarrow q$: "1< 3 **se, e somente se,** $\frac{-1}{2} < \frac{-3}{2}$" é falsa.

No caso da bicondicional $p \leftrightarrow q$ ser **verdadeira** também pode ser lida como

i) p é condição necessária e suficiente para q.

ii) q é condição necessária e suficiente para p.

Exemplo: "Adão é pai de Abel se, e somente se, Abel é filho de Adão" é uma bicondicional verdadeira então "Adão é pai de Abel é condição necessária e suficiente para Abel é filho de Adão" e "Abel é filho de Adão é condição necessária e suficiente para Adão é pai de Abel"

Observação: Em geral, para evitar ambiguidades, usamos parêntesis na simbologia das proposições compostas, como por exemplo $(p \wedge q) \vee r$. Nos casos em que fazemos a supressão dos parêntesis, adotamos a seguinte ordem de precedência dos conectivo:

1) $\sim$; 2) $\wedge, \vee$ (na ordem de aparecimento); 3) $\rightarrow$; 4) $\leftrightarrow$.

Exemplo: A proposição $p \wedge q \vee r \leftrightarrow \sim r \rightarrow s$, deve ser lida como

$$((p \wedge q) \vee r) \leftrightarrow ((\sim r) \rightarrow s).$$

EXERCÍCIOS

1) Determine os valores lógicos das proposições:

a) $3 > 2$ e $3 = 2$

b) $3 > 2$ ou $3 = 2$

c) $3 \geq 2$

d) $2 \geq 3$

e) 2 é par e é primo

f) A lua é satélite da terra ou é uma estrela.

g) π é racional ou π é irracional.

h) π é racional e π é irracional.

i) Se a Terra é redonda então gira em torno do Sol.

j) Se a Terra é redonda então não gira em torno do Sol.

k) Se a Terra é quadrada então não gira em torno do Sol.

l) Jorge Amado escreveu o romance "Mar Morto" e nasceu na Bahia.

m) Não é verdade que: Jorge Amado escreveu o romance "Mar Morto" ou nasceu no Rio de Janeiro.

n) Sofia Loren (*) nasceu na Itália, se somente se, é italiana.

o) Curitiba não é capital do Amazonas e nem de Pernambuco.

p) É falso que: 2 é par se, e somente se, 3 é ímpar.

q) É falso que -3 é par se, e somente se, -3 é ímpar.

2) Dadas proposições p, q, e r tais que q é verdadeira e r é falsa, estude as possibilidades para os valores lógicos das proposições a seguir:

a) $p \wedge q$ b) $p \vee q$ c) $q \rightarrow p$ d) $r \rightarrow q$ e) $r \rightarrow p$ f) $p \rightarrow r$ g) $(r \rightarrow q) \vee p$ h) $p \leftrightarrow q$ i) $\sim (r \rightarrow q)$ j) $\sim r \rightarrow q$ k) $p \vee \sim p$ l) $p \vee p$ m) $q \rightarrow q$ n) $r \leftrightarrow r$

3) Escreva a recíproca e a contrapositiva das condicionais:

a) Se Adão é pai de Abel então é mais velho que Abel.

b) Se $2 \in N$ então $2 \in Z$

Respostas:

1) São verdadeiras as proposições: b) c) e) f) g) i) k) l) n) o) q).

2) a) Se V(p) = V então V $(p \wedge q)$ = V; se V(p) = F então V $(p \wedge q)$ = F

b) V$(p \vee q)$ = V

c) Se V(p) = V então V $(q \rightarrow p)$ = V; se V(p) = F então V $(q \rightarrow p)$ = F

d) V$(r \rightarrow q)$ = V

e) V$(r \rightarrow p)$ = V

f) Se V(p) = V então V $(p \rightarrow r)$ = F; se V(p) = F então V $(p \rightarrow r)$ = V

g) V$((r \rightarrow q) \vee p)$

h) Se V(p) = V então V $(p \leftrightarrow q)$ = V; se V(p) = F então V $(p \leftrightarrow q)$ = F

i) V$(\sim (r \rightarrow q))$ = F

j) $V(\sim r \rightarrow q) = V$

k) $V(p \vee \sim p)$

l) Se $V(p) = V$ então $V(p \vee p) = V$; se $V(p) = F$ então $V(p \vee p) = F$

m) $V(q \rightarrow q) = V$

n) $V(r \leftrightarrow r) = V$

3) a) Recíproca: Se Adão é mais velho que Abel então é pai de Abel.

Contrapositiva: Se Adão não é mais velho que Abel então não é o pai de Abel.

b) Recíproca: Se $2 \in Z$ então $2 \in N$.

Contrapositiva: Se $2 \notin Z$ então $2 \notin N$.

3 - VARIÁVEIS E FÓRMULAS PROPOSICIONAIS. CONSTRUÇÃO DE TABELAS-VERDADE

Como dissemos anteriormente, usamos as letras minúsculas p, q, r,... ou essas letras com sub-índice, p_1, p_2, ... p_n, para representar proposições. Como podem representar quaisquer proposições, chamamos essas letras de *variáveis proposicionais*.

Aplicando os conectivos às variáveis proposicionais obtemos as *fórmulas proposicionais*.

> Chamamos de *fórmula proposicional* a uma expressão envolvendo variáveis proposicionais e conectivos tal que, fixando as variáveis, obtemos uma única proposição.

A conjunção $p \wedge q$, com p e q variando entre as proposições, é um exemplo de fórmula proposicional com duas variáveis p e q. De modo análogo, podemos dizer que $p \vee q$, $p \rightarrow q$ e $p \leftrightarrow q$ são também exemplos de fórmulas proposicionais de duas varáveis. Já no caso da negação, $\sim p$, como ela envolve apenas uma variável, p, trata-se de uma fórmula

(*) Atriz italiana

proposicional de uma variável. As variáveis proposicionais são também exemplos de fórmulas proposicionais.

Aplicando repetidamente os conectivos fundamentais às fórmulas proposicionais podemos obter outras fórmulas proposicionais. Por exemplo, dadas as fórmulas proposicionais $p \wedge q$ e $r \rightarrow q$ podemos obter as fórmulas:

$(p \wedge q) \vee (r \rightarrow q)$, $(p \wedge q) \leftrightarrow (r \rightarrow q)$, etc.

Exemplo: Seja a fórmula proposicional $\sim(p \rightarrow q)$.

a) Aplicando esta fórmula às proposições "O Brasil está situado na América do Sul" e "A língua oficial do Brasil é o Espanhol" obtemos a proposição "Não é verdade que: se o Brasil está situado na América do Sul então sua língua oficial é o Espanhol".

b) Aplicando esta fórmula às proposições "$\pi > 3$" e "$\pi > 4$" obtemos a proposição "Não é verdade que: se $\pi > 3$ então $\pi > 4$".

Quando necessário, indicaremos as fórmulas proposicionais usando letras maiúsculas P, Q, R etc.

Exemplo: Dadas as fórmulas proposicionais $P: \sim p \rightarrow q$ e $Q: p \vee q$ então $P \wedge Q$ é a fórmula proposicional $P \wedge Q: (\sim p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$.

Construção de Tabelas - Verdade

Considere a negação ~p. Pelo visto anteriormente, temos que, fixando a variável p então obtemos uma proposição verdadeira ou falsa. Se p for verdadeira então ~p será falsa e caso contrário ~p será verdadeira.

Vamos resumir este resultado em forma de uma tabela, em que na primeira coluna apresentamos todas as possibilidades de valores lógicos possíveis para as proposições p e na última os valores lógicos das proposições ~p.

p	~ p
V	F
F	V

Seja a conjunção $p \wedge q$. Sabemos que, após fixarmos as variáveis p e q, a proposição $p \wedge q$ é verdadeira quando p e q são ambas verdadeiras, em todas as outras possibilidades $p \wedge q$ é falsa. Podemos resumir este resultado através da tabela em que nas duas primeiras colunas apresentamos todas as possibilidades de valores lógicos para p e q e na última os valores lógicos resultantes para as proposições $p \wedge q$.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

De modo análogo podemos considerar tabelas-verdades para todas as fórmulas proposicionais.

Exemplos: Apresentamos a seguir tabelas-verdades para algumas fórmulas proposicionais.

1) $p \vee q$

p	**q**	**$p \vee q$**
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

2) $p \rightarrow q$

p	**q**	**$p \rightarrow q$**
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

3) $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

4) $(p \wedge \sim q) \leftrightarrow (r \wedge p)$

p	q	r	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$r \wedge p$	$(p \wedge \sim q) \leftrightarrow (r \wedge p)$
V	V	V	F	F	V	F
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	F	V

EXERCÍCIOS

1) Aplique a fórmula proposicional $p \rightarrow \sim q$ às seguintes proposições:

p: "A Bahia é um estado da região nordeste" e q: "Salvador é a capital da Bahia e foi fundada em 1549 [(*)]"

2) Construa tabelas-verdade para as seguintes fórmulas proposicionais:

a) $\sim(\sim p) \leftrightarrow p$ b) $(p \wedge q) \wedge r$ c) $(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee q)$

Respostas:

1) a) Se a Bahia é um estado da região nordeste então não é verdade que: Salvador é a capital da Bahia e foi fundada em 1549.

2) a)

[(*)] A cidade de Salvador foi fundada por Tomé de Sousa em 29 de março de 1549

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$\sim(\sim p) \leftrightarrow p$
V	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**
F	**V**	**F**	**V**

b)

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
V	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**V**	**F**	**F**
V	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**F**

c)

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee q)$
V	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**

4. *TAUTOLOGIAS E CONTRADIÇÕES*

Tautologias

Tomemos a fórmula proposicional $p \wedge q \rightarrow p$. Através da tabela-verdade abaixo podemos verificar que esta fórmula ao ser aplicada a quaisquer proposições p e q, resulta em proposição, representada por $p \wedge q \rightarrow p$, verdadeira.

p	**q**	**$p \wedge q$**	**$p \wedge q \rightarrow p$**
V	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**F**	**V**

Dizemos, neste caso, que $p \wedge q \rightarrow p$ é uma *tautologia*.

De modo geral dizemos que,

Uma *tautologia* é uma fórmula proposicional a n variáveis, $p_1, p_2, \ldots p_n$ que ao ser aplicada a quaisquer n proposições, representadas pelas variáveis $p_1, p_2, \ldots p_n$, resulta em proposição verdadeira.

Como no exemplo acima, podemos identificar uma tautologia através da sua tabela-verdade, verificando se a última coluna apresenta apenas valor lógico **verdade**.

Exemplo: A fórmula proposicional $\sim p \vee p$ é uma tautologia, pois ao ser aplicada a qualquer proposição resulta em proposição verdadeira

Se P é uma tautologia, P também é chamada de *fórmula proposicional tautológica* ou *logicamente verdadeira*. Uma tautologia é em geral indicada por V, T ou 1.

Contradições

Consideremos a fórmula proposicional $p \wedge (\sim p \wedge q)$. Através da sua tabela-verdade (dada a seguir) podemos ver que ao ser aplicada a quaisquer proposições, representadas por p e q, resulta em proposição falsa.

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$(\sim p \wedge q) \wedge p$
V	**V**	**F**	**F**	**F**
V	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**	**F**
F	**F**	**V**	**F**	**F**

Temos que $p \wedge (\sim p \wedge q)$ é uma *contradição.*

De modo geral dizemos que,

Uma *contradição* é uma fórmula proposicional a n variáveis, $p_1, p_2, \ldots p_n$ que ao ser aplicada a quaisquer n proposições, representadas pelas variáveis $p_1, p_2, \ldots p_n$, resulta em proposição **falsa**.

Assim como no caso de tautologias, podemos identificar uma contradição através da sua tabela-verdade, verificando se a última coluna apresenta apenas valor lógico **falsidade.**

Exemplos:

1) A fórmula proposicional $p \wedge \sim p$ é uma contradição, pois ao ser aplicada a qualquer proposição resulta em proposição falsa.

2) É fácil ver que se P é uma tautologia então ~P é uma contradição e, vice-versa, se P é uma contradição então ~ P é uma tautologia.

Se P é uma contradição, P é também chamada de *fórmula proposicional logicamente falsa*. Uma contradição é em geral indicada por F, C ou 0.

EXERCÍCIOS

1) Verifique se as fórmulas proposicionais são tautologias ou contradições:

a) $\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ b) $p \wedge \sim q \rightarrow \sim p \vee q$ c) $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$ d) $r \rightarrow s \leftrightarrow s \rightarrow r$ e) $\sim(p \wedge q \rightarrow p)$

Respostas:

1) São tautologias: a) c). É contradição: e).

5. EQUIVALÊNCIA

> Dizemos que uma fórmula proposicional P é equivalente à fórmula proposicional Q ou, simplesmente, que P é *equivalente* a Q se a fórmula proposicional $P \leftrightarrow Q$ é tautológica.

Para indicar que P é equivalente a Q usamos a notação $P \Leftrightarrow Q$.

Exemplos:

1) Como consequência do modo como se define o valor lógico da bicondicional de duas proposições (a bicondicional é verdadeira se as duas proposições possuem mesmos valores lógicos, caso contrário é falsa) temos as seguintes equivalências,

a) $P \Leftrightarrow P$ para toda fórmula proposicional P.

b) Se $P \Leftrightarrow Q$ então $Q \Leftrightarrow P$.

c) Se P e Q e R são fórmulas proposicionais tais que $P \Leftrightarrow Q$ e $Q \Leftrightarrow R$ então $P \Leftrightarrow R$

Isto é, a relação de equivalência goza das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

2) Dadas as fórmulas proposicionais $P: p \to q$ e $Q: \sim p \vee q$, temos que $P \leftrightarrow Q$ é tautológica (veja tabela a seguir), portanto $P \Leftrightarrow Q$.

p	q	$p \to q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$(p \to q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Observação: Os símbolos $\leftrightarrow$ e $\Leftrightarrow$ são distintos!

$\leftrightarrow$ indica uma operação lógica.

$\Leftrightarrow$ estabelece que $P \leftrightarrow Q$ é tautológica (estabelece uma relação entre P e Q).

Exemplos: A seguir listamos várias equivalências, muito utilizadas em Matemática, e que podem ser demonstradas pela construção das tabelas-verdade ou analisando valores lógicos, tarefa que deixaremos ao leitor.

1) Se P e Q são ambas tautológicas ou ambas contradições então $P \Leftrightarrow Q$.

2) $p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$

3) $p \vee \sim p \Leftrightarrow V$

4) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$ (Veja o exemplo 2) anterior)

5) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$ (a condicional e sua contrapositiva são equivalentes, nessa equivalência se baseia o método de ***demonstração por absurdo*** que exemplificaremos no capítulo seguinte).

6) $\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$ (negação da condicional).

7) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ (a bicondicional $p \leftrightarrow q$ é equivalente a conjunção da condicional $p \rightarrow q$ e sua recíproca $q \rightarrow p$).

8) $\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$ (negação da bicondicional).

As operações lógicas negação, conjunção e disjunção gozam das seguintes propriedades que podem ser verificadas facilmente.

Dupla Negação	$\sim(\sim p)$	$\Leftrightarrow$	p
Idempotente	$p \wedge p$	$\Leftrightarrow$	p
	$p \vee p$	$\Leftrightarrow$	p
Comutativa	$p \wedge q$	$\Leftrightarrow$	$q \wedge p$
	$p \vee q$	$\Leftrightarrow$	$q \vee p$
Associativa	$(p \wedge q) \wedge r$	$\Leftrightarrow$	$p \wedge (q \wedge r)$
	$(p \vee q) \vee r$	$\Leftrightarrow$	$p \vee (q \vee r)$
Elemento Neutro	$p \wedge V$	$\Leftrightarrow$	p
	$p \vee F$	$\Leftrightarrow$	p

Elemento Absorvente	$p \wedge F$ $p \vee V$	$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$	F V
Distributiva	$p \wedge (q \vee r)$ $p \vee (q \wedge r)$	$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Absorção	$p \vee (p \wedge q)$ $p \wedge (p \vee q)$	$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$	p p
Leis de De Morgan	$\sim(p \wedge q)$ $\sim(p \vee q)$	$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$	$\sim p \vee \sim q$ $\sim p \wedge \sim q$

Observação: Qualquer equivalência continua sendo válida quando substituímos variáveis proposicionais por fórmulas

Exemplo: Quaisquer que sejam as fórmulas proposicionais P, Q e R temos,

1) $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$, como no caso de tomarmos P: $p \rightarrow r$, Q: $p \vee q$ e R: $q \wedge p$, ou seja,

$(p \rightarrow r) \wedge ((p \vee q) \vee (q \wedge p)) \Leftrightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (p \vee q)) \vee ((p \rightarrow r) \wedge (q \wedge p))$

EXERCÍCIO

1) Mostre as equivalências citadas na seção anterior.

6. MÉTODO DEDUTIVO

SIMPLIFICAÇÃO DE FÓRMULAS PROPOSICIONAIS

A maioria das equivalências foram demonstradas até aqui usando tabelas-verdade. Veremos agora a demonstração de equivalências usando outro método, denominado ***método dedutivo***. Este método consiste em substituir fórmulas proposicionais por outras equivalentes. No emprego do *método dedutivo* desempenham papéis importantes as equivalências já citadas na secção anterior.

Exemplos: Vamos demonstrar as equivalências a seguir, usando o método dedutivo:

1) $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \sim q \rightarrow F$ (Esta equivalência é bastante usada em demonstrações de Matemática, como veremos no capítulo seguinte, e é denominada ***redução ao absurdo***)

D] $(p \wedge \sim q) \rightarrow F \Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q) \vee F \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim (\sim q) \Leftrightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow p \rightarrow q$

2) $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \vee q \rightarrow q$

D] $p \vee q \rightarrow q \Leftrightarrow \sim (p \vee q) \vee q \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge V \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \Leftrightarrow p \rightarrow q$

3) $p \rightarrow q \vee r \Leftrightarrow p \wedge \sim q \rightarrow r$

D] $p \wedge (\sim q) \rightarrow r \Leftrightarrow \sim (p \wedge (\sim q)) \vee r \Leftrightarrow \sim p \vee q \vee r \Leftrightarrow \sim p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \vee r$.

Substituindo fórmulas proposicionais por outras equivalentes, podemos obter fórmulas mais simples. Ilustraremos esse procedimento no exemplo a seguir.

Exemplo: Vamos simplificar a fórmula proposicional $\sim p \rightarrow (p \wedge q)$:

$\sim p \rightarrow (p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee p) \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$.

EXERCÍCIOS

1) Usando método dedutivo, mostre as seguintes equivalências:

a) $\sim p \rightarrow p \Leftrightarrow p$

b) $(p \rightarrow q) \rightarrow q \Leftrightarrow p \vee q$

c) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow (r \wedge q)$

d) $p \rightarrow (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \rightarrow r$

2) Utilizando as propriedades operatórias, simplifique as seguintes proposições:

a) $(p \vee (p \wedge q)) \wedge \sim(p \wedge q)$

b) $(p \wedge \sim(q \vee r)) \vee (p \wedge \sim(p \wedge \sim q)) \vee (p \wedge \sim(p \wedge \sim r))$

Respostas

1) b) $(p \rightarrow q) \rightarrow q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \rightarrow q \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \vee q \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge V \Leftrightarrow (p \vee q)$

d) $(p \wedge \sim q) \rightarrow r \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \vee r \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \vee r \Leftrightarrow \sim p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow p \rightarrow (q \vee r)$

2) a) $p \wedge \sim q$ b) p

7. IMPLICAÇÃO LÓGICA

Dadas duas fórmulas proposicionais P e Q, dizemos que P *implica logicamente* Q, ou simplesmente, P *implica* Q se a fórmula proposicional $P \rightarrow Q$ é tautológica.

Se P implica Q usamos a notação $P \Rightarrow Q$.

A uma condicional $P \rightarrow Q$ tautológica, chamamos de *implicação*.

Exemplos:

1) Como consequência do modo como se define o valor lógico da condicional de duas proposições (a condicional é falsa apenas se a proposição antecedente é verdadeira e a consequente é falsa, caso contrário é verdadeira) temos as seguintes implicações.

a) $P \Rightarrow P$ para toda fórmula proposicional P.

b) Se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$ então $P \Leftrightarrow Q$ (ver exemplo 7) da seção 5).

c) Se P e Q e R são fórmulas proposicionais tais que $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow R$ então $P \Rightarrow R$

Isto é, a relação de equivalência goza das propriedades reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

2) Dadas as fórmulas proposicionais P: $p \wedge q$ e Q: p, temos que $P \rightarrow Q$ é tautológica (veja tabela a seguir), portanto $P \Rightarrow Q$.

p	**q**	**$p \wedge q$**	**$p \wedge q \rightarrow p$**
V	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**V**

Observação: Os símbolos $\Rightarrow$ e $\rightarrow$ são distintos!

$\rightarrow$ indica uma operação lógica

$\Rightarrow$ estabelece que a condicional $P \to Q$ é tautológica. (estabelece uma relação entre P e Q).

Regras de Inferência

Algumas implicações lógicas se destacam por terem papel importante nas demonstrações matemáticas. Tais implicações são chamadas de *Regras de Inferência.* Vejamos alguns exemplos.

Regra da Adição	(A.D.)
$p \Rightarrow p \vee q$ $q \Rightarrow p \vee q$	
Regra da Simplificação	(SIMP)
$p \wedge q \Rightarrow p$ $p \wedge q \Rightarrow q$	
Regra do Modus Ponens (*)	(M.P)
$(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$	
Regra do Modus Tollens (**)	(M.T)
$(p \to q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$	
Regra do Silogismo Hipotético	(S.H)
$(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow p \to r$	

EXERCÍCIOS

1) Mostre as implicações citadas na secção anterior.

2) Mostrar sem usar tabela verdade que :

a) $(r \to s) \wedge (\sim r \to t) \wedge (\sim s) \Rightarrow t$

b) $(\sim p \vee q) \wedge p \Rightarrow q$

(*) Modo direto

Respostas

1) Regra de Adição

$p \rightarrow p \vee q \Leftrightarrow \sim p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee q \Leftrightarrow V \vee q \Leftrightarrow V.$

Regra Modus Ponens

$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge p \rightarrow q \Leftrightarrow (\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p) \rightarrow q \Leftrightarrow F \vee (q \wedge p) \rightarrow q$

$\Leftrightarrow (q \wedge p) \rightarrow q \Leftrightarrow \sim(q \wedge p) \vee q \Leftrightarrow (\sim q \vee \sim p) \vee q \Leftrightarrow (\sim q \vee q) \vee \sim p \Leftrightarrow V \vee \sim p$

$\Leftrightarrow V.$

2) b) $(\sim p \vee q) \wedge p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim((\sim p \vee q) \wedge p) \vee q \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee \sim p \vee q \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee$

$\sim(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow V.$

(**) Modo indireto

Capítulo 2

SENTENÇAS ABERTAS / QUANTIFICADORES

1. SENTENÇAS ABERTAS

Seja a expressão $x + 1 = 0$.

Observamos que essa expressão não é uma proposição pois não possui valor lógico definido. Mas passa a tê-lo quando fixamos x. Por exemplo, torna-se uma proposição verdadeira para $x = -1$ e uma proposição falsa para qualquer valor diferente de -1.

> Chama-se *sentença aberta* em um conjunto U a uma regra que associa a cada elemento x de U uma única proposição p(x).

Exemplos:

1) p(x): "$x + 1 = 0$", no conjunto U = N.

2) p(x): "$x^2 - 4 = 0$", no conjunto U = N.

3) p(x): "$x^2 - 4 = 0$", no conjunto U = Z.

Se U é o produto cartesiano dos conjuntos U_1, U_2, U_3,... U_n, isto é, $U = U_1 \times U_2 \times U_3 ... \times U_n$, então $x = (x_1, x_2, x_3, ...x_n)$. Neste caso, temos uma sentença aberta de n variáveis $x_1, x_2, x_3, ...x_n$, $x_i \in U_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

Exemplos:

1) p(x): "$\sqrt{x+1} = 0$", no conjunto U = N.

2) p(x,y): "$x + y = 1$", no conjunto $U = N^2$.

2) p(x, y, z): "$x^2 + y^2 + z^2 \leq 0$", no conjunto $U = R^3$.

Uma sentença aberta também é chamada *função proposicional*, o conjunto U, de *conjunto-universo* e o conjunto dos elementos x de U tais que p(x) é verdade é chamado de *conjunto-verdade* da função proposicional, que indicaremos por Vp.

$$Vp = \{ x \in U; V(p(x)) = \mathbf{V} \} \text{ ou de modo mais resumido } Vp = \{ x \in U; p(x)\}$$

Exemplos:

1) O conjunto verdade da sentença aberta $p(x)$: "$2x - 1 = 3$", no conjunto N é $V_p = \{x \in N; 2x - 1 = 3\}$, que também pode ser representado por $V_p = \{2\}$

2) O conjunto verdade da sentença aberta $p(x)$: "$x^2 + 5x + 6 = 0$", no conjunto Z é $V_p = \{x \in Z;\ x^2 + 5x + 6 = 0\}$, que pode ser representado por $V_p = \{-2, -3\}$.

3) O conjunto verdade da sentença aberta $p(x)$: "$x^2 + 5x + 6 = 0$", no conjunto N é $V_p = \{x \in N;\ x^2 + 5x + 6 = 0\}$, que pode ser representado por $V_p = \varnothing$

4) O conjunto verdade da sentença aberta $p(x)$: "$x > 3$", no conjunto $U = \{-1, 0, 2, 3, 5, 6, 7\}$ é $V_p = \{5, 6, 7\}$

5) O conjunto verdade da sentença aberta $p(x,y)$: "$x - y = 0$", no conjunto N^2 é $V_p = \{(x,y) \in N^2 \mid x = y\} = \{(0,0), (1,1), (2,2), \ldots\}$

Operações Lógicas com Sentenças Abertas

As operações lógicas sobre proposições se estendem naturalmente às sentenças abertas. Assim, dadas as sentenças $p(x)$ e $q(x)$ no conjunto U podemos obter novas sentenças como:

$$\sim p(x), \quad p(x) \wedge q(x), \quad p(x) \vee q(x), \quad p(x) \rightarrow q(x), \quad p(x) \leftrightarrow q(x)$$

Outras sentenças podem ser formadas aplicando-se repetidamente as operações lógicas como, por exemplo, $p(x) \leftrightarrow [q(x) \wedge r(x)]$.

Nem sempre as sentenças abertas são apresentadas exibindo-se claramente suas variáveis e o seu conjunto universo, como por exemplo:

1) "Carlos é baiano". A não ser que estejamos nos referindo a uma determinada pessoa, significa "x é baiano" com x pertencente ao conjunto dos seres humanos que se chamam Carlos.

2) "O triângulo ABC é retângulo" que significa "x é retângulo" com x pertencente ao conjunto dos triângulos.

3) "O pássaro canta" que significa "x canta no instante y" com x pertencente ao conjunto dos pássaros e y indica o tempo.

4) "Chove" significa "Chove no lugar x e no instante y".

5) "As retas a, b e c são distintas" significa "a, b e c são distintas" com a, b e c pertencentes ao conjunto das retas.

Por essa razão, usaremos também para indicar sentenças abertas, em alguns casos, a notação p, q, r, etc, no lugar de p(x), q(x), r(x), etc.

Exemplo: Dadas as sentenças abertas p: "Chove hoje" q:"Não chove amanhã" e r: "Hoje é sexta-feira" então podemos obter as sentenças ~p: "Não chove hoje", $p \wedge r$: "Chove hoje e hoje é sexta-feira ", $p \vee q$: "Chove hoje ou não chove amanhã " , $p \to [q \vee r]$: Se chove hoje então: não chove amanhã ou hoje é sexta-feira", etc.

Tautologias e Contradições

> Uma sentença aberta p(x) no conjunto U é uma *tautologia* (ou é *tautológica)* se seu conjunto verdade V_p é igual a U.

De modo análogo às fórmulas proposicionais tautológicas, indicamos as sentenças abertas que são tautológicas por **V**.

Exemplos:

1) Em qualquer conjunto U temos p(x):" x = x" é uma tautologia.
2) p(x): "$x \in U$" , no conjunto U, é uma tautologia.
3) p(x): "$x - 1 \in Z$ " , em U = Z, é uma tautologia.
4) p(x): "x -1" $\in$ N, em U = N, não é uma tautologia pois Vp = N* ={1, 2, 3, ...}.
5) p(x): "x –1 > 0", em U = R, não é uma tautologia pois Vp = $\{x \in R; x > 1\}$.

> Uma sentença aberta p(x) no conjunto U é uma *contradição* se seu conjunto verdade V_p é o conjunto vazio.

Indicamos as sentenças abertas que são contradições por **F**.

Exemplos:

1) Em qualquer conjunto U temos p(x): $x \neq x$ é uma contradição.

2) p(x): "$x^2 = -1$", em U = R é uma contradição.

3) p(x): "$x^2 = 1$", em U = R não é uma contradição pois Vp = {-1, 1} $\neq \varnothing$.

Equivalência entre sentenças abertas

Exemplo: Considere as sentenças abertas p(x):"x é par" e q(x): "x + 1 é ímpar" no conjunto Z dos números inteiros temos que $V_p = V_q$ = {números inteiros pares}. Dessa forma, para todo valor fixo de $x \in Z$ as proposições p(x) e q(x) têm mesmos valores lógicos, logo a proposição p(x) $\leftrightarrow$ q(x): "x é par se, e somente se, x + 1 é ímpar" é verdadeira Dizemos, neste caso, que as sentenças abertas p(x) e q(x) são *equivalentes*.

De modo geral temos,

> Dadas as sentenças abertas p(x) e q(x) no conjunto U, se a sentença aberta p(x) $\leftrightarrow$ q(x) é tautológica, dizemos que p(x) e q(x) são *equivalentes.*

Como no exemplo acima, se p(x) e q(x) são equivalentes então seus conjuntos verdade são iguais e, vice-versa, se as sentenças possuem conjuntos verdade iguais então são equivalentes.

Se as sentenças p(x) e q(x) são equivalentes indicamos p(x) $\Leftrightarrow$ q(x)

Exemplos:

Nos exemplos a seguir considere U = N

1) p(x): “x é par” e q(x): “x^2 é par” são equivalentes.

2) p(x): “x é primo, $x \neq 2$” e q(x): “x é ímpar” não são equivalentes”.

Observação: As **definições** em matemática são **sempre equivalências,** como por exemplo,

"ABC é um triângulo retângulo se, e somente se, possui um ângulo reto" .

Mas nem sempre são escritas nesse formato, como por exemplo,

"Um triângulo é retângulo se tem um ângulo reto".

Todas as regras de equivalências vistas para fórmulas proposicionais também são válidas para sentenças abertas, já que ao fixarmos as variáveis de uma sentença obtemos proposições.

Exemplos: 1) Usando as Leis de De Morgan para sentenças abertas:

$\sim (p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow \sim p(x) \vee \sim q(x)$

$\sim (p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow \sim p(x) \wedge \sim q(x)$

temos,

a) Em U = Z é válida a equivalência "**Não é verdade que**: $x > 3$ **e** x é par $\Leftrightarrow$ $x \leq 3$ **ou** x não é par"

b) "**Não é verdade que**: Carlos vai ao cinema **ou** vai ao teatro" é equivalente a "Carlos não vai ao cinema **e** não vai ao teatro"

2) Usando a comutativa para a conjunção

$p(x) \wedge q(x) \Leftrightarrow q(x) \wedge p(x)$

temos,

"x é um número par e é primo" é equivalente a "x é um número primo e x é par"

"Maria se casou e teve filho" é equivalente a "Maria teve filho e se casou"

Implicação entre sentenças abertas

Sejam as sentenças abertas p(x): "O quadrilátero x é um quadrado" q(x): "Todos os ângulos do quadrilátero x são retos" no conjunto U dos quadriláteros. Temos que V_p = {x | x é um quadrado} e V_q = {x | x é um quadrilátero cujos ângulos são retos} são tais que $Vp \subset Vq$. Logo ao fixarmos um quadrilátero x, temos que se a proposição p(x) é verdadeira então a proposição q(x) também é verdadeira e portanto a condicional $p(x) \rightarrow$

$q(x)$: "Se o quadrilátero x é um quadrado então todos os seus ângulos são retos" é verdadeira para qualquer quadrilátero x. Ou seja, a sentença aberta $p(x) \rightarrow q(x)$ é tautológica. Neste caso dizemos que $p(x)$ *implica* $q(x)$ e indicamos $p(x) \Rightarrow q(x)$.

De modo geral temos,

> Dadas as sentenças abertas $p(x)$ e $q(x)$ no conjunto U, se a sentença aberta $p(x) \rightarrow q(x)$ é tautológica, dizemos que $p(x)$ *implica* $q(x)$.

Se as sentenças $p(x)$ e $q(x)$ são tais que $p(x)$ implica $q(x)$ então indicamos $p(x) \Rightarrow q(x)$.

Como no exemplo acima, se $p(x) \Rightarrow q(x)$ então $V_p \subset V_q$ e vice-versa, se as sentenças possuem conjuntos verdade tais que V_p é subconjunto de V_q então $p(x) \Rightarrow q(x)$

> Os teoremas da matemática são constituídos de implicações.

Exemplos de teoremas:

a) "Se $x \in N$ e x é par então x^2 é par".

b) "Se $x \in N$ e x é ímpar então x^2 é ímpar".

c) "Dado um número $x \in Z$ temos, se x é múltiplo de 4 então x é múltiplo de 2".

d) "Seja $a \in Q$, se $a > 0$ então $a^{-1} > 0$".

e) "Sejam $a, b \in N$. Se a é um número par, então ab é par".

f) "A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo é igual a 180^o". Este teorema pode ser reescrito na forma de implicação: " Se a, b e c são as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer então $a + b + c = 180^o$" .

g) "Todo quadrilátero convexo que tem lados opostos congruentes é paralelogramo". Na forma de implicação: "Se um quadrilátero qualquer tem lados opostos congruentes então é um paralelogramo."

> Todas as regras para implicações vistas para fórmulas proposicionais também são válidas para sentenças abertas, já que ao fixarmos as variáveis de uma sentença obtemos proposições.

Vejamos aplicações das *regras de* inferência, apresentadas no capítulo anterior, para sentenças abertas.

Exemplos: 1) Aplicando a regra da adição, $p(x) \Rightarrow p(x) \vee q(x)$, às sentenças $p(x)$: "$x > 2$" e $q(x)$: "$x = 2$", em U = R, temos "$x > 2 \Rightarrow x \geq 2$".

2) Aplicando a regra do modus ponens, $(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge p(x) \Rightarrow q(x)$, às sentenças $p(x)$: "x é múltiplo de 4" e $q(x)$: "x é múltiplo de 2", em U = Z, temos

"Se x é múltiplo de 4 então x é múltiplo de 2, e x é múltiplo de 4. Então x é múltiplo de 2 ".

Esta regra é válida no caso $(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge p(a) \Rightarrow q(a)$ como por exemplo "Se x é múltiplo de 4 então x é múltiplo de 2, e 32 é múltiplo de 4. Então 32 é múltiplo de 2 ".

3) Aplicando a regra do modus tollens, $(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (\sim q(x)) \Rightarrow \sim p(x)$, às sentenças $p(x)$: "x é múltiplo de 3 e $x > 0$" e $q(x)$: "$x \geq 3$", em U = Z, temos

" Se x é múltiplo de 3 e $x > 0$ então $x \geq 3$, e $x < 3$. Então x não é múltiplo de 3 ou $x \leq 0$".

Esta regra é válida no caso $(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (\sim q(a)) \Rightarrow \sim p(a)$, como por exemplo "Se x é múltiplo de 3 e $x > 0$ então $x \geq 3$, e $1 < 3$. Então 1 não é múltiplo de 3 ou $1 \leq 0$". Como não acontece $1 \leq 0$, concluímos que 1 não é múltiplo de 3

4) Aplicando a regra do silogismo hipotético $(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \rightarrow r(x)) \Rightarrow p(x) \rightarrow r(x)$ às sentenças $p(x)$: "x é divisor de 6" , $q(x)$: "x é divisor de 12" e $r(x)$: "x é divisor de 24" definidas em U = N temos,

"Se x é divisor de 6 então x é divisor de 12 e se x é divisor de 12 então x é divisor de 24 $\Rightarrow$ Se x é divisor de 6 então x é divisor de 24".

Para sentenças abertas também usamos termos como contrapositiva, recíproca, condição suficiente, condição necessária, etc.

Segue da equivalência $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$ (vista para fórmulas proposicionais) que $p(x) \rightarrow q(x) \Leftrightarrow \sim q(x) \rightarrow \sim p(x)$. Ou seja, a condicional $p(x) \rightarrow q(x)$ e sua contrapositiva são equivalentes. Dessa forma $p(x) \Rightarrow q(x)$ se, e somente se, $\sim q(x) \Rightarrow \sim p(x)$.

Exemplo: Considere a implicação: "Se João é pai de José então João é mais velho que José". Temos:

1) A sua contrapositiva é "Se João não é mais velho que José então João não é o pai de José (que é também uma implicação).

2) A sua recíproca é "Se João é mais velho que José então é pai de José" (que **não** é uma implicação, nem sempre é verdadeira).

3) João é pai de José é condição suficiente para João é mais velho que José.

4) João é mais velho que José é condição necessária para João é pai de José.

Com os exemplos de implicações, mostraremos a seguir como as equivalências são utilizadas nas demonstrações em Matemática.

Exemplos:

Considere os seguintes Teoremas :

1) Dadas três retas distintas, a, b e c, do plano, se a // b e b // c então a // c.

Provaremos usando **redução ao absurdo**, isto é, usaremos a equivalência $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \sim q \rightarrow F$. Neste caso para provar que a // b e b // c $\Rightarrow$ a // c vamos mostrar que a // b e b // c e a // c $\Rightarrow$ F . \

D]

i) a $\nparallel$ c $\Rightarrow$ a $\cap$ c $\neq \varnothing$

ii) a $\cap$ c $\neq \varnothing$ e a // b e b // c $\Rightarrow$ a = c (axioma das paralelas)

iii) a = c , é uma contradição, pois por hipótese as retas são distintas.

3) Dado $a \in R$ com $a > 0$ então $a^{-1} > 0$.

D] Provaremos usando **redução ao absurdo,** ou seja, $a \in R$, $a > 0$ e $a^{-1} \leq 0 \Rightarrow F$

i) $a > 0 \Rightarrow a \neq 0$

ii) $a \neq 0 \Rightarrow \exists\, a^{-1} \neq 0;\ aa^{-1} = 1$

iii) $a^{-1} < 0$, $a > 0$ e $aa^{-1} = 1 \Rightarrow 1 < 0$, o que é uma contradição.

4) Seja U = N. Se x^2 é par então x é par.

D] Provaremos usando a **contrapositiva ou demonstração por absurdo**, isto é, usaremos a equivalência $p(x) \to q(x) \Leftrightarrow \sim q(x) \to \sim p(x)$.

i) x não é par $\Rightarrow x = 2k + 1, k \in N$.

ii) $x = 2k + 1, k \in N \Rightarrow x^2 = 4k^2 + 4k + 1$

iii) $x^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Leftrightarrow x^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

iv) $x^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow x^2$ é ímpar.

5) Sejam $a, b \in N$, ab é par se, e somente se a é par ou b é par.

D] Provaremos usando a seguinte equivalência: $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$

$\Rightarrow$) Se ab é par então a é par ou b é par. Neste caso usaremos a **contrapositiva**, ou seja, se a é ímpar e b é ímpar então ab é ímpar.

i) a é ímpar e b é ímpar $\Rightarrow a = 2k +1$ e $b = 2j +1$, $j,k \in N$.

ii) $a = 2k +1$e $b = 2j +1 \Rightarrow ab = (2k +1)(2j + 1) = 4kj + 2k + 2j + 1 = 2(2kj + k + j) + 1$

iii) $ab = 2(2kj + k + j) + 1 \Rightarrow$ ab é ímpar.

$\Leftarrow$) Se a é par ou b é par então ab é par.

i) a é par $\Rightarrow a = 2k$, $k \in N$

ii) $a = 2k$, $k \in N \Rightarrow ab = (2k)b = 2(kb)$

iii) $ab = 2(kb) \Rightarrow$ ab é par.

EXERCÍCIOS

1) Dê o conjunto-verdade das seguintes sentenças abertas definidas em U = R.

a) $p(x)$: $x^2 – 5x + 6 = 0$ b) $p(x)$: $\sqrt{x^2 - 1} = 3$

2) Dê o conjunto-verdade das seguintes sentenças abertas definidas em U = AxA, com $A = \{x \in Z; -3 \leq x < 2\}$.

a) $p(x, y)$: $x^2 - y^2 = 0$ b) $p(x, y)$: $| x | > | y |$

3) Identifique entre as sentenças abertas as tautologias e as contradições:

a) Se eu curso o 3º grau então já cursei o 2º grau.

b) Hoje é segunda-feira e amanhã é terça-feira.

c) Se hoje é segunda-feira então amanhã é terça-feira.

d) Se hoje é segunda-feira então amanhã é quarta-feira.

e) Hoje é segunda-feira se, e somente se, amanhã não é terça-feira.

f) p(x): " x é par ou x-1 é par" em U = Z.

g) p(x): " $x^2 < 0$" em U = R.

h) "ABC é um triângulo equilátero ou possui pelo menos um ângulo menor que 60^{o}" em U = {ABC; ABC é um triângulo}

4) Determine as sentenças abaixo que são equivalentes à sentença "Se corre, cansa".

a) Não corre ou cansa.

b) Se não cansa então não corre.

c) Se não corre então não cansa.

d) Não é verdade que: Corre e não cansa.

5) Escrever as condicionais seguintes na forma "se ... então".

a) Para que um triângulo seja equilátero é suficiente que seus ângulos sejam congruentes.

b) A condição x é divisível por 3 é necessária para que x seja divisível por 6.

6) Negue as seguintes sentenças:

a) Chove e molha

b) Vou ao cinema ou vou ao teatro.

c) Quem não chora não mama.

d) Se $x < 3$ então $x \geq 0$, em U = R.

e) Estudar é condição suficiente para passar no vestibular.

f) João será aprovado se, e somente se, estudar

7) Verifique se as sentenças abertas são equivalentes:

a) Dado U = N, p(x): "x é múltiplo de 3" e q(x): "x^2 é múltiplo de 3".

b) p(x): "$x = 3k + 1$, para algum $k \in N$" e q(x): "$x^2 = 3j + 1$, para algum $j \in N$".

8) Use a regra do modus ponens, $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$, ou a regra do modus tollens, $(p \to q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$, para completar as implicações:

a) Se x é divisível por 10 então é divisível por 5. 20 é divisível por 10 então ___________

b) Se chove, uso guarda-chuva. Ontem choveu então ___________________

c) Se bebo, não dirijo. Dirigi então _______________________

d) Se $x \in Q$ e $y \in Q$ então $x + y \in Q$. $1+ y \notin Q$ então ___________________

9) Complete usando a regra do silogismo hipotético $(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow p \to r$

a) Se Marcos vai a Salvador então vai ao Bomfim e se Marcos vai ao Bomfim então compra um patuá. Logo, se Marcos vai a Salvador então ____________________

b) Se x é par e é primo então x = 2 ou x =-2. E se x = 2 ou x =-2 então $x^2 - 4 = 0$. Logo, se x é par e primo então ______________

c) Se um quadrilátero ABCD é um quadrado então tem lados congruentes e se um quadrilátero ABCD possui lados congruentes então é um losango. Logo, se um quadrilátero ABCD é um quadrado então _______________________

10) Complete usando uma das duas regras da simplificação, $p \wedge q \Rightarrow p$ e $p \wedge q \Rightarrow q$.

a) Se José é professor e irmão de Antônio então _________________

b) Se $x \in Q$ e $x > 0$ então ______________________

11) Complete usando uma das duas regras da adição, $p \Rightarrow p \vee q$ e $q \Rightarrow p \vee q$.

a) Se __________________ então $x \geq 4$.

b) Se __________________ então sou professor ou médico.

RESPOSTAS

1. a) $V_p = \{ 2, 3 \}$
   b) $V_p = \{ -\sqrt{10}, \sqrt{10} \}$

2. a) $V_p = \{ (-3, -3), (-2, -2), (-1,-1), (-1, 1), (0, 0), (1, -1), (1, 1) \}$
   b) $V_p = \{ (-3, -2), (-3, -1), (-3, 0), (-3, 1), (-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-1, 0), (1,0) \}$.

3. Tautologias: a), c), f), h). Contradições: e), g) .

4. a), b) e d)

5. a) **Se** os ângulos de um triângulo são congruentes **então** o triângulo é equilátero.

b) **Se** x é divisível por 6 **então** x é divisível por 3.

6. a) Não chove **ou** não molha.

b) Não vou ao cinema **e** não vou ao teatro.

c) Observe que: "Quem não chora, não mama" é equivalente a " Se não chora então não mama". Logo sua negação é não chora e mama.

d) $x < 3$ e $x < 0$.

e) Estuda e não passa no vestibular.

f) João é aprovado e não estuda ou João estuda e não é aprovado.

7. a) São equivalente. Provaremos usando a seguinte equivalência:

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$$

$\Rightarrow$)
i) x é múltiplo de 3 $\Rightarrow x = 3k$, para algum $k \in N$
ii) $x = 3k \Rightarrow x^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$.
iii) $x^2 = 3(3k^2) \Rightarrow x^2$ é múltiplo de 3.

$\Leftarrow$)
i) x^2 é múltiplo de 3 $\Rightarrow$ xx é múltiplo de 3
ii) xx é múltiplo de 3 e 3 é primo $\Rightarrow$ x é múltiplo de 3 ou x é múltiplo de 3
iii) x é múltiplo de 3 ou x é múltiplo de 3 $\Rightarrow$ x é múltiplo de 3.

b) Não são equivalentes, pois $x^2 = 3k + 1, k \in N \nRightarrow x = 3j + 1, j \in N$.
Contra-exemplo: $x = 5$.

8. a) ... 20 é divisível por 5.

b) ... usei guarda-chuva.

c) ... não bebi.

d) $1 \notin Q$ ou $y \notin Q \Rightarrow y \notin Q$

9. a) ... compra um patuá.

b) ... $x^2 - 4 = 0$.

c) ... é um losango.

10. a) ... José é professor ou ... José é irmão de Antônio.

b) ... $x > 0$ ou ... $x \in Q$.

11. a) ... $x > 4$ ... ou ... $x = 4$ ....

b) ... sou médico ou ... sou professor.

2 - Relação entre Lógica e Conjunto.

Vejamos como se pode obter os conjuntos-verdade das sentenças $\sim p(x)$, $p(x) \wedge q(x)$, $p(x) \vee q(x)$, etc. usando os conjuntos-verdade das duas sentenças $p(x)$ e $q(x)$.

Exemplo: Dadas as sentenças abertas $p(x)$: $x^2 = 1$ e $q(x)$: $x^2 + x - 2 = 0$ no conjunto $U = \{ -2, -1, 0, 1, 3\}$, temos que $V_p = \{ -1, 1 \}$ e $V_q = \{-2, 1\}$. Com as operações lógicas vamos determinar outras sentenças e seus conjuntos-verdade.

1) $\sim p(x)$: $x^2 \neq 1$ e $V_{\sim p} = \{-2, 0, 3\}$. Observe que $V_{\sim p} = U - V_p$.

2) $p(x) \wedge q(x)$: $x^2 = 1$ e $x^2 + x - 2 = 0$ e $V_{(p\wedge q)} = \{1\}$. Observe que $V_{(p\wedge q)} = V_p \cap V_q$.

3) $p(x) \vee q(x)$: $x^2 = 1$ ou $x^2 + x - 2 = 0$ e $V_{(p \vee q)} = \{-2, -1, 1\}$. Então $V_{(p \vee q)} = V_p \cup V_q$.

Em geral se $p(x)$ e $q(x)$ são sentenças abertas no conjunto U então valem as igualdades:

1) $V_{\sim p} = U - V_p$

2) $V_{(p\wedge q)} = V_p \cap V_q$

3) $V_{(p \vee q)} = V_p \cup V_q$.

Além disso, segue das equivalências

$p(x) \rightarrow q(x) \Leftrightarrow \sim p(x) \vee q(x)$ e $p(x) \leftrightarrow q(x) \Leftrightarrow [p(x) \rightarrow q(x)] \wedge [q(x) \rightarrow p(x)]$

e de 1) e 2) que

4) $V_{(p \rightarrow q)} = V_{\sim p} \cup V_q$

5) $V_{(p \leftrightarrow q)} = V_{(p \rightarrow q)} \cap V_{(q \rightarrow p)}$

Exemplo: Usando as sentenças $p(x)$ e $q(x)$ do exemplo anterior temos,

1) $p(x) \rightarrow q(x)$: "Se $x^2 = 1$ então $x^2 + x - 2 = 0$". $V_{(p \rightarrow q)} = V_{\sim p} \cup V_q = \{-2, 0, 1, 3\}$.

2) $p(x) \leftrightarrow q(x)$: "$x^2 = 1$ se, e somente se $x^2 + x - 2 = 0$" e $V_{(p \leftrightarrow q)} = V_{(p \rightarrow q)} \cap V_{(q \rightarrow p)} =$
$= \{ 0, 1, 3\}$.

Em seguida, vamos relacionar elementos da Lógica e da Teoria dos Conjuntos. Ou seja, vamos reescrever as relações de igualdade, inclusão, e operações entre conjuntos usando a Lógica.

Considerando um conjunto U qualquer, temos:

Se p(x) é uma contradição em U então $\{x\in U;\ p(x)\} = \varnothing$.

Se p(x) é uma *tautologia* então $\{x\in U;\ p(x)\} = U$.

Sejam A e B subconjuntos do conjunto U e as sentenças abertas p(x): "$x \in A$" e q(x): "$x \in B$". Logo, $V_p = A$ e $V_q = B$. Então:

Como já vimos antes, $V_p = V_q$ se, e somente se, $p(x) \Leftrightarrow q(x)$. Logo,

$A = B$ se, e somente se, $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Também vimos que $V_p \subset V_q$, se e somente se, $p(x) \Rightarrow q(x)$. Logo,

$A \subset B$ se, e somente se, $x \in A \Rightarrow x\in B$.

Assim, se queremos mostrar que um conjunto A está contido em um conjunto B, devemos mostrar a implicação "$x \in A \Rightarrow x \in B$", isto é, assumindo que $x \in A$ é verdade, mostrar que $x \in B$ é verdade. E para mostrar que $A = B$ basta mostrar as duas implicações "$x \in A \Rightarrow x \in B$" e "$x \in B \Rightarrow x \in A$"

A conjunção e a disjunção são operações lógicas que estão relacionadas com a união e interseção entre dois conjuntos da seguinte forma:

Tomando a sentença aberta $p(x) \wedge q(x)$: "$x \in A$ e $x \in B$" temos que $V(p\wedge q) = Vp \cap Vq$ e então

$A \cap B = \{x \in U;\ x \in A$ **e** $x \in B\}$.

Tomando a sentença aberta $p(x) \vee q(x)$: "$x \in A$ **ou** $x \in B$" temos que $V(p\vee q) = Vp \cup Vq$ e então

$A \cup B = \{x \in U;\ x \in A$ **ou** $x \in B\}$.

A negação está relacionada com o complementar. A sentença aberta ~ p(x): "x **não** pertence a A" possui conjunto-verdade $V_{(\sim p)} = U - Vp$ e então

$\overline{A} = \{x \in U;\ x$ **não** pertence a A$\}$

Resumimos na tabela seguinte estas relações

Contradição **F**	**Conjunto vazio** $\varnothing$
Tautologia **V**	**Conjunto universo** **U**
Conjunção $\wedge$	**Interseção** $\cap$
Disjunção $\vee$	**União** $\cup$
Implicação $\Rightarrow$	**Inclusão** $\subset$
Equivalência $\Leftrightarrow$	**Igualdade** $=$
Negação **~**	**Complementar** **C**

Vejamos a utilização da Lógica na Matemática com aplicações na Teoria dos Conjuntos.

Dados A, B e C subconjuntos quaisquer de U temos as seguintes propriedades:

1. $\varnothing \subset A$

2. a) $A \subset A \cup B$ b) $A \cap B \subset A$

3. a) $A \cup A = A$ b) $A \cap A = A$

4. a) $A \cup B = B \cup A$ b) $A \cap B = B \cap A$

5. a) $A \cup \varnothing = A$ b) $A \cap \varnothing = \varnothing$

6. a) $A \cup U = U$ b) $A \cap U = A$

7.a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

8\. a) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$ b) $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

9\). $\overline{\overline{A}} = A$

10\. a) $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$ b) $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$

11\. a) $A\cup\overline{A} = U$ b) $A\cap\overline{A} = \varnothing$

12\. a) $\overline{\varnothing} = U$ b) $\overline{U} = \varnothing$

Todas essas propriedades são demonstradas facilmente, utilizando a lógica e as relações que já estabelecemos. Demonstraremos algumas e deixaremos o restante como tarefa para o leitor.

D] 1. Devemos mostrar que $x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$. Temos:

Para todo $x \in U$ a proposição "$x \in \varnothing$" é falsa e portanto a proposição "$x \in \varnothing \rightarrow x \in A$" é verdadeira.

2\. a) Devemos mostrar que "$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$".

Segue da implicação $p \Rightarrow p \vee q$ (adição) que "$x \in A \Rightarrow x \in A$ ou $x \in B$".

Portanto "$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$"

8\. a) Devemos mostrar que "$x \in A\cap(B\cup C) \Leftrightarrow x \in (A\cap B)\cup(A\cap C)$" ou seja, que .

"$x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$. Esta equivalência segue da propriedade $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

EXERCÍCIOS

1\) Dê o conjunto-verdade das seguintes sentenças abertas definidas em $U = R$

a) $x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0$ b) $x^2 > 4 \leftrightarrow x^2 -5x + 6 = 0$

c) $x < 3 \rightarrow x \geq 0$ d) $x \in Z \wedge |x - 4| < 3$

e) $\sim(\sqrt{x+1} \neq x) \vee x \in N$

2\) Utilizando a lógica e as relações que já estabelecemos, demonstre as propriedades de conjuntos citadas na secção anterior.

Respostas

1.a) R-{2}

1.b) $(-\infty, -2] \cup]2, +\infty) - \{3\}$

1.c) R_+^*

1.d) {0, 1, 2 ,3, 4, 5, 6}

1.e) { $\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\} \cup N$

3. QUANTIFICADORES

Na secção anterior, vimos que uma maneira de transformar sentenças abertas em proposições é fixar suas variáveis. Nesta secção, veremos outro modo que consiste em usar expressões tais como "para todo", "qualquer que seja", "existe", etc.

Exemplos:

1) Consideremos a sentença aberta p(x): $x^2 - 1 = 0$ no conjunto Z. A partir desta sentença podemos formar as seguintes proposições:

Existe x pertencente a *Z*, tal que $x^2 - 1 = 0$

Para todo x pertencente a *Z*, $x^2 - 1 = 0$

A expressão "existe x" significa "existe pelo menos um x". Temos então que a primeira é uma proposição verdadeira (tome por exemplo $x = 1 \in Z$). A segunda é falsa, pois nem todo número inteiro satisfaz a sentença $x^2 - 1 = 0$ (tome por exemplo $x = 2 \in Z$).

2) A proposição "Existe $x \in N$ tal que $\sqrt{x} \in Z$" é verdadeira (tome, por exemplo, x = 9)

3) As proposições "Existe um homem que já foi à Lua" e "Todo homem é mortal" são verdadeiras. Explicitando as variáveis podemos reescrever estas proposições na forma: "Existe um homem x tal que x já foi à Lua" e "Para todo homem x, x é mortal"

Expressões como "para todo", "existe", "existe um único" chamam-se *quantificadores*.

Quantificador Universal

Seja p(x) uma sentença aberta em um conjunto U e seja V_p o seu conjunto-verdade. Considere as seguintes proposições:

"*Qualquer que seja* x ∈ U, p(x)", ou

"*Para todo* x ∈ U, p(x)".

Simbolicamente, escrevemos "$\forall$ x ∈ U, p(x)".

Temos,

Se V_p = U então a proposição "$\forall$ x ∈ U, p(x)" é verdadeira.
Se $V_p \neq$ U então a proposição "$\forall$ x ∈ U, p(x)" é falsa.

Dada a sentença aberta p(x) em U, o símbolo $\forall$ referindo à variável x representa uma operação lógica que transforma a sentença aberta p(x) numa proposição. A esta operação lógica dá-se o nome de *quantificação universal* e o símbolo "$\forall$" é chamado *quantificador universal*.(*)

Exemplos:

1) "$\forall$ x ∈ N, x ≥ 0" é uma proposição verdadeira.

2) "$\forall$ x ∈ Q, $\sqrt{x} \in R$" é uma proposição falsa.

3) "$\forall$ triângulo ABC, a soma dos seus ângulos internos é igual a 180^o " é uma proposição verdadeira.

Quantificador Existencial

Seja p(x) uma sentença aberta em um conjunto U e seja V_p o seu conjunto-verdade. Considere a seguinte proposição:

(*) O símbolo "$\forall$" é um "A" invertido. Tem sua origem na palavra alemã para universalidade que é "Allgemeinheit" e na inglesa "All" que significa todo.

"*Existe* $x \in U$ tal que $p(x)$" que pode ser escrita como "*Existe* pelo menos um $x \in U$ tal que $p(x)$".

Simbolicamente, escrevemos "$\exists\, x \in U;\ p(x)$".

Temos,

Se $V_p \neq \varnothing$ então a proposição "$\exists\, x \in U;\ p(x)$" é verdadeira.

Se $V_p = \varnothing$ então a proposição "$\exists\, x \in U;\ p(x)$" é falsa.

Dada a sentença aberta $p(x)$ em U, o símbolo $\exists$ referindo à variável x representa uma operação lógica que transforma a sentença aberta $p(x)$ numa proposição. A esta operação lógica dá-se o nome de *quantificação existencial* e o símbolo $\exists$ é chamado de *quantificador existencial*.(*)

Exemplos:

1) "$\exists\ x \in N;\ x + 1 < 3$" é uma proposição verdadeira

2) "$\exists\ x \in Z;\ 2x + 1 = 0$" é uma proposição falsa.

3) "$\exists$ um triângulo; seus lados medem 1cm, 1cm e 3cm" é uma proposição falsa.(**)

Quantificadores Numéricos

Além dos quantificadores existencial e universal temos expressões da forma

"*Existe exatamente um*", "*Existe no máximo um*", "*Existe um*" (que é o quantificador existencial), "*Existem dois*" (que significa, existem pelo menos dois), "*Existem exatamente dois* ", "*Existem no máximo dois*", e assim por diante, que ao serem aplicadas transformam sentenças $p(x)$ em proposições e que são chamadas de *quantificadores numéricos*.

(*) Trata-se de um "E" invertido.

(**) Temos da geometria que a soma de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o terceiro lado.

Exemplo:

1) "Existem exatamente dois números pares $x \in Z$ tais que x é primo" é uma proposição verdadeira, pois os primos pares são 2 e -2.

1) "Existem no máximo dois números $x \in R$ tais que $x^2 + 1 = 0$" é uma proposição verdadeira, pois nenhum número real satisfaz a $x^2 + 1 = 0$.

3) "Existem dois números $x \in R$ tais que $x^3 - x = 0$" é uma proposição verdadeira, pois as raízes dessa equação são os números -1,0, 1.

A expressão "Existe exatamente um" é indicada pelo símbolo $\exists!$ e também pelas expressões "Existe um único ", e "Existe apenas um".

Exemplo: " $\exists!\ n \in N;\ n < 1$" é uma proposição verdadeira, pois n = 0 é o único número natural que satisfaz a n < 1.

Negação de proposições com quantificadores

Consideremos a proposição “Todo número primo é ímpar”. A sua negação, "Não é verdade que todo número primo é ímpar”, é equivalente a “Existe um número primo que não é ímpar”. Simbolicamente podemos escrever:

$$\sim(\ \forall \text{ x primo, x é ímpar }) \Leftrightarrow \exists \text{ x primo, x não é ímpar.}$$

De uma maneira geral temos:

$$\boxed{\sim (\ \forall\ x \in U,\ p(x)\ ) \Leftrightarrow \exists\ x \in U;\ \sim p(x).}$$

Mostrar que uma proposição do tipo “$\forall\ x \in U;\ p(x)$" é falsa é mostrar que “$\exists\ x_o \in U;\ V(\ p(x_o)\ ) = F$". Um elemento x_o de U que satisfaz a condição acima é dito um *contra-exemplo*.

Exemplo: A proposição “Todo número primo é ímpar” é falsa, $x_0 = 2$ é um contra-exemplo pois é primo e não é ímpar.

Consideremos a proposição “Existe um triângulo tal que soma dos ângulos internos é menor que 180^o ". A sua negação "Não existe um triângulo tal que a soma dos ângulos internos é menor que 180^o " pode ser escrita na forma "Para qualquer triângulo, a soma dos ângulos internos não é menor que 180^o "

Simbolicamente podemos escrever:

~ (∃ um triângulo x; a soma dos ângulos de x é menor que 180^o) ⇔ ∀ triângulo x, a soma dos ângulos de x não é menor que 180^o

De modo geral temos,

$$\sim(\exists\ x \in U;\ p(x)) \Leftrightarrow \forall\ x \in U,\ \sim p(x).$$

Costuma-se usar o símbolo ∄ para indicar a expressão *não existe*, como no exemplo, "∄ um triângulo x; a soma dos ângulos de x é menor que 180^o ".

A negação de uma proposição da forma " ∃! x ∈ U; p(x)" é equivalente à proposição "∀ x ∈ U, ~p(x) ou existem dois x ∈ U; p(x)".

Exemplo: A negação da proposição "Existe um único mês do ano em que ocorre o Natal". é " O Natal não ocorre em nenhum mês do ano ou o Natal ocorre em dois meses do ano". Usando variáveis podemos reescrever essas proposições na forma " ∃! mês do ano x; o Natal ocorre em x" e "∀ mês do ano x, o Natal não ocorre em x ou o Natal ocorre em dois meses do ano".

Na próxima secção de exercícios veremos mais exemplos com quantificadores numéricos.

Quantificação Múltipla

Vamos considerar quantificadores para sentenças com mais de uma variável. Sejam, por exemplo, as sentenças "$x + y = 1$" e "$\exists\, x \in N;\ x + y = 1$" em $U = N^2$. Ambas são sentenças com duas variáveis sendo que, na segunda delas, a variável x está quantificada.

De modo geral, as variáveis de uma sentença se classificam em *quantificadas* ou *livres*. Isto é:

Variável quantificada é aquela que se apresenta na sentença acompanhada de quantificador.

Variável livre, apresenta - se na sentença sem quantificador.

Dada uma sentença aberta com mais de uma variável, a aplicação de um quantificacador a uma das variáveis, transforma a sentença aberta em outra com menos uma variável livre.

Uma sentença aberta precedida de quantificadores, um para cada variável, isto é, com todas as variáveis quantificadas, é uma proposição.

Por exemplo: "$\exists\, x \in N;\ x + y = 1$" não é uma proposição pois ainda depende do valor de y. Porém a sentença "$\exists\, x \in N,\ \exists\, y \in N;\ x + y = 1$" é uma proposição e tem valor lógico verdade.

Exemplos:

1) Sejam $U = A \times B$, com $A = [0, 1]$ e $B = \{-1, 0, 1\}$, e as proposições a seguir:

a) $\forall\, x \in A,\ \exists\, y \in B;\ x < y$

Esta é uma proposição *falsa* pois para $x = 1$ em A, temos que nenhum elemento de B é maior que x.

b) $\forall\, x \in A,\ \forall\, y \in B,\ x \leq |y| + 1$

Esta proposição é *verdadeira* pois se $x \in A$ então $x \leq 1$. Assim,

para $y = -1$, $|y| + 1 = 2 \geq x,\ \forall\, x \in A$

para $y = 0$, $|y| + 1 = 1 \geq x,\ \forall\, x \in A$

para $y = 2$, $|y| + 1 = 2 \geq x$, $\forall\, x \in A$

c) $\exists\, x \in A;\ \forall\, y \in B,\ y^2 \geq x$

É uma proposição é *verdadeira*, pois existe $x = 0 \in A$, tal que $\forall\, y \in B$, $y^2 \geq 0$.

d) $\exists!\, x \in A,\ \exists!\, y \in B;\ x + y = -1/2$

Esta proposição é verdadeira pois, para $x = 1/2 \in A$ e $y = 1 \in B$ temos $x + y = -1/2$, e somente esses números satisfazem a $x + y = -1/2$.

2) Sejam as proposições:

a) " Todo ser humano possui um pai"

b) "Existe um ser humano que é o pai de todos os seres humanos"

Temos que a proposição em a) é verdadeira e que a proposição em b) é falsa.

Usando variáveis x e y que assumem valores no conjunto dos seres humanos, podemos reescrever essas proposições como: "$\forall$ ser humano x, $\exists$ um ser humano y tal que y é pai de x" e "$\exists$ um ser humano y, tal que $\forall$ ser humano x, y é pai de x.".

3) Seja $U = N^2$ e tomemos as proposições:

a) $\forall\, x \in N,\ \exists\, y \in N;\ x < y$

Esta proposição é *verdadeira*, pois par a cada $x \in N$, basta tomar $y = x + 1 \in N$ e então $y > x$.

b) $\exists\, y \in N;\ \forall\, x \in N,\ x \leq y$.

Esta proposição é falsa pois para todo $y \in N$, basta tomar $x = y + 1 \in N$ e então y é menor que x (Se existisse um tal número, esse seria "o maior de todos os números naturais").

c) $\forall\, x \in N,\ \exists\, y \in N;\ x > y$

É uma proposição falsa, pois $x = 0$ é um contra-exemplo. Isto é, não existe y pertencente N tal que $0 > y$.

Negação de Quantificação Múltipla

A negação de uma proposição com mais de um quantificador se obtém mediante a aplicação sucessiva das regras para a negação de proposições com um quantificador. Como, por exemplo, dada a sentença aberta p(x,y) em $U = A \times B$ então

$\sim(\forall x \in A, \exists y \in B; p(x, y)) \Leftrightarrow \exists x \in A, \forall y \in B ; \sim p(x, y)$

$\sim(\forall x \in A, \forall y \in B; p(x, y)) \Leftrightarrow \exists x \in A, \exists y \in B; \sim p(x, y)$

Exemplos:

1) A negação da proposição "$\forall x \in N, \exists y \in N; x + y = 0$" é "$\exists x \in N; \forall y \in N, x + y \neq 0$

2) A negação da proposição "Para todo $x \in Q$, existe um único $y \in Q$ tal que $x.y = 1$" é "Existe $x \in Q$ tal que, para todo $y \in Q$ $x.y \neq 1$ ou existem dois $y \in Q$ tais que $x.y = 1$"

Comutatividade dos quantificadores

Os quantificadores de uma dada sentença que são da mesma espécie podem ser comutados. Tomemos, por exemplo, uma sentença p(x, y) definida em $U = A \times B$ então,

$\forall x \in A, \forall y \in B; p(x, y) \Leftrightarrow \forall y \in B, \forall x \in A; p(x, y)$

$\exists x \in A, \exists y \in B; p(x, y) \Leftrightarrow \exists y \in B, \exists x \in A; p(x, y)$

$\exists x \in A$, existem exatamente dois $y \in B$; p(x, y) $\Leftrightarrow$ Existem exatamente dois $y \in B$, $\exists x \in A$; p(x, y)

Exemplo: Temos as equivalências,

a) $\forall x \in Z, \forall y \in N, x + y \in N \Leftrightarrow \forall y \in Z, \forall x \in N, x + y \in N.$

b) $\exists x \in R, \exists y \in R; \sqrt{x.y} \notin R \Leftrightarrow \exists y \in R, \exists x \in R; \sqrt{x.y} \notin R$

c) Existe $x \in R$ e existem exatamente dois $y \in R$ tais que $(x-1).(y^2 - 4) = 0$ $\Leftrightarrow$ Existem exatamente dois $y \in R$ e existe $x \in R$ tais que $(x-1).(y^2 - 4) = 0$

Os quantificadores de espécies diferentes numa sentença nem sempre podem ser comutados.

Exemplos:

1) A proposição "$\forall x \in N, \exists y \in N; y > x$" é verdadeira, enquanto a proposição "$\exists y \in N, \forall x \in N; y > x$" é falsa.

2) A proposição "$\forall$ ser humano x, $\exists$ um ser humano y; y é pai de x" é verdadeira e a proposição "$\exists$ um ser humano y; $\forall$ ser humano x, y é pai de x" é falsa.

EXERCÍCIOS

1) Reescreva as proposições usando quantificadores e variáveis:
a) Alguns homens são professores
b) Todos os pintores são artistas.

2) Sendo U = {1, 2, 3}, determine o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:
a) $\exists x \in U; x^2 + x - 6 = 0$ b) $\sim(\forall x \in U; x^2 + x = 6)$
c) $\forall x \in U; x^2 - 1 < 0$ d) $\sim(\exists x \in U; |x - 1| \leq 2)$
e) $\exists! x \in U; x < 2$ f) Existem dois $x \in U; x \leq 3$

3) Reescreva as proposições substituinado as sentenças aberta como indicado :
a) "$\forall x \in R, \exists y \in R; p(x,y) \vee q(x)$" para p(x,y): "x.y =1" e "q(x):"x = 0"
b) "$\exists x \in N$ e $\exists y \in N; p(x) \wedge \sim p(y)$" para p(x): "x < 0"
c) "$\forall x \in R$ e $\forall y \in R, p(x,y) \leftrightarrow q(x,y)$" para p(x,y): "(x,y) = (y,x)" e q(x,y):"x = y"

4) Seja U = {1, 2, ... 9, 10}, determine o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:
a) $\forall x \in U, \exists y \in U ; x + y = 14$
b) $\forall x \in U$ e $\forall y \in U, x + y < 14$
c) $\exists x \in U$ e $\exists y \in U; x + y > 14$
d) $\exists x \in U \mid \forall y \in U, x + y = 14$

5) Dados os conjuntos A = {-1, 0, 1} e B = [-1, 1], determine o valor lógico das seguintes proposições:
a) $\forall x \in A, \exists y \in B \mid x^2 = -y$
b) $\forall x \in A$ e $\forall y \in B, |x - y| < 2$
c) $\forall x \in A$ e $\forall y \in B, |x| = -y$
d) $\exists x \in A \mid \forall y \in B, |y - x| \leq 1$
e) $\exists x \in A$ e $\exists y \in A \mid x^2 + y^2 \leq 1$

6) Classifique as proposições em falsa ou verdadeira:

a) $\forall$ a, b, c $\in$ R, existem dois números reais x tais que $ax^2 + bx + c = 0$.

b) Se $U \neq \emptyset$, " $\forall x \in U; p(x) \rightarrow \exists x \in U; p(x)$".
c) $\forall$ a, b, c $\in$ R, existem no máximo dois números reais x tais que $ax^2 + bx + c = 0$.

7) Dê a negação das seguintes proposições:
a) $(\forall x \in U; p(x)) \wedge (\exists x \in U; q(x))$
b) $(\exists x \in U; p(x)) \rightarrow (\forall x \in U; \sim q(x))$

8) Dê a negação das seguintes proposições:
a) Se neste navio existe algum passageiro com cólera então todos os passageiros ficarão de quarentena.
b) Todas as pessoas dessa sala sabem ler e sabem escrever.
c) Existem pessoas inteligentes que não sabem ler nem escrever.
d) Para todo x em R, $|x| \geq x$ e existe x pertencente a R* tal que $\frac{|x|}{x} \neq 1$
e) Para toda reta r e para todo ponto P, existe uma reta tal que é paralela a r e passa por P.
f) Para todo número natural, a condição necessária e suficiente para ser par e primo é ser igual a 2.

9) Em uma cidade litorânea é rigorosamente obedecida a seguinte ordem do prefeito: "Se não chover, então todos os bares à beira-mar deverão estar abertos".
Pode-se afirmar que:
a) Se todos os bares à beira mar estão abertos, então choveu.
b) Se todos os bares à beira-mar estão abertos, então não choveu.
c) Se choveu então todos os bares à beira mar não estão abertos.
d) Se um bar a beira-mar não está aberto então choveu.

Respostas:

1) a) $\exists$ homem x; x é professor.
   b) $\forall$ pintor x, x é artista.

2) a) V b) V c) F d) F e) V f) V

3) a) $\forall x \in R, \exists y \in R; x.y = 1 \vee x = 0$.
   b) $\exists x \in N$ e $\exists y \in N; x < 0 \wedge y \geq 0$.
   c) $\forall x \in R$ e $\forall y \in R, (x,y) = (y,x) \leftrightarrow x = y$

4) a) F b) F c) V d) F

5) a) V b) F c) F d) V e) V

6) a) F b) V c) V

7) a) $(\exists\, x \in U;\ \sim p(x)) \vee (\forall\, x \in U;\ \sim q(x))$.
b) $(\exists\, x \in U;\ p(x)) \wedge (\exists\, x \in U;\ q(x))$.

8) a) Neste navio existe algum passageiro com cólera e algum passageiro não ficará de quarentena.
b) Existe alguma pessoa nesta sala que não sabe ler ou não sabe escrever.
c) Toda pessoa inteligente sabe ler ou escrever.
d) Existe $x \in R$, $|x| < x$ ou para todo $x \in R^*$ tal que $\frac{|x|}{x} = 1$.
e) Existe uma reta r , existe um ponto P, tal que toda reta não é paralela a r ou não passa por P.
f) Existe um número natural, tal que é par e primo e não é igual a 2 ou não é par ou não é primo e é igual a 2 .

9) d) Se um bar a beira-mar não está aberto então choveu (é a contrapositiva da afirmação dada).