Exercícios de Aprendizagem e Fixação – Conjuntos

1) Dos dados do exercício e de conhecimentos sobre quadriláteros, temos:

$P = \left\{\text{quadrado, retângulo, losango, paralelogramo}\right\}$

$L = \left\{\text{quadrado, losango}\right\}$

$R = \left\{\text{quadrado, retângulo}\right\}$

$Q = \left\{\text{quadrado, retângulo, trapézio retângulo}\right\}$

Assim

a) $L \cap P = L$ b) $R \cap P = R$ c) $L \cap R = \left\{\text{quadrado}\right\}$

d) $Q \cap R = R$ e) $L \cap Q = \left\{\text{quadrado}\right\}$

f) $P \cup Q = \left\{\text{quadrado, retângulo, losango, paralelogramo, trapézio retângulo}\right\}$

2) f) $A \cap B$

a) $\overline{\left(\bar{A} \cap \bar{B}\right)} = \overline{\overline{\left(A \cup B\right)}} = A \cup B$

b) $$\begin{aligned}\left(A \cap B\right) \cup \left(\bar{A} \cap B\right) &= \left[(A \cap B) \cup \bar{A}\right] \cap \left[(A \cap B) \cup B\right] = \left[(A \cup \bar{A}) \cap (B \cup \bar{A})\right] \cap \left[(A \cap B) \cup B\right] \\ &= \left[U \cap (B \cup \bar{A})\right] \cap B = (B \cup \bar{A}) \cap B = B\end{aligned}$$

c) $A \cap \bar{B} \cap \bar{A} \cap \bar{B} = (A \cap \bar{A}) \cap \bar{B} = \varnothing \cap \bar{B} = \varnothing$

d) $$\begin{aligned}&\left[A \cap \overline{(B \cup C)}\right] \cup \left[A \cap \overline{(A \cap \bar{B})}\right] \cup \left[A \cap \overline{(A \cap \bar{C})}\right] = \left[A \cap \overline{(B \cup C)}\right] \cup \left[A \cap (\bar{A} \cup B)\right] \cup \left[A \cap (\bar{A} \cup C)\right] \\ &= \left[A \cap \overline{(B \cup C)}\right] \cup \left[(A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B)\right] \cup \left[(A \cap \bar{A}) \cup (A \cap C)\right] \\ &= \left[A \cap \overline{(B \cup C)}\right] \cup \left[\varnothing \cup (A \cap B)\right] \cup \left[\varnothing \cup (A \cap C)\right] \\ &= \left[A \cap \overline{(B \cup C)}\right] \cup \left[A \cap B\right] \cup \left[A \cap C\right] = \left[A \cap \overline{(B \cup C)}\right] \cup \left[A \cap (B \cup C)\right] \\ &= A \cap \left[\overline{(B \cup C)} \cup (B \cup C)\right] = A \cap U = A\end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned}\left[(A \cup B) \cap \bar{A}\right] \cup \overline{A \cup B} &= \left[(A \cup B) \cup \overline{(A \cup B)}\right] \cap \left[\bar{A} \cup \overline{(A \cup B)}\right] = U \cap \left[\bar{A} \cup (\bar{A} \cap \bar{B})\right] \\ &= \bar{A} \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = \bar{A}\end{aligned}$$

f) $\left(A\cap B\cap C\right)\cup\left(A\cap B\cap \bar{C}\right)=\left[(A\cap B)\cap C\right]\cup\left[(A\cap B)\cap \bar{C}\right]=(A\cap B)\cap(C\cup\bar{C})$
$$=(A\cap B)\cap(C\cup\bar{C})=(A\cap B)\cap U=A\cap B$$

3) Para cada exemplo abaixo, existem outras demonstrações e contra-exemplos.

a) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$. (Verdade)

Dem] $x\in\left[(A\cap B)-(A\cap C)\right]\Leftrightarrow x\in(A\cap B)\wedge x\notin(A\cap C)\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in B)\wedge(x\notin A\wedge x\notin C)$
$$\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\in B\wedge x\notin C)\Leftrightarrow x\in A\cap(B-C).$$

b) $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(A\cup C)$. (Falsa)

Contra-exemplo: Sejam os conjuntos $A=\left\{1,2,3\right\}$, $B=\left\{0,1,4\right\}$ e $C=\left\{0,1,5\right\}$, temos que $A\cup(B-C)=\left\{1,2,3,4\right\}$ é diferente de $(A\cup B)-(A\cup C)=\left\{4\right\}$.

c) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$. (Verdade)

Dem] $x\in\left[(A-B)\cup(A-C)\right]\Leftrightarrow x\in(A-B)\vee x\in(A-C)\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in A\wedge x\notin C)$
$$\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\notin B\vee x\notin C)\Leftrightarrow x\in A\wedge\sim(x\in B\wedge x\in C)$$
$$\Leftrightarrow x\in A-(B\cap C).$$

d) $A-(A\cap B)=A-B$. (Verdade)

Dem] $x\in\left[A-(A\cap B)\right]\Leftrightarrow x\in A\wedge\left[x\notin(A\cap B)\right]\Leftrightarrow x\in A\wedge\sim\left[x\in(A\cap B)\right]$
$$\Leftrightarrow x\in A\wedge\sim(x\in A\wedge x\in B)\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\notin A\vee x\notin B)$$
$$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin A)\vee(x\in A\wedge x\notin B)\Leftrightarrow F\vee(x\in A\wedge x\notin B)$$
$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\Leftrightarrow x\in(A-B).$$

e) $A\cap B=A-(A-B)$. (Verdade)

Dem] $x\in\left[A-(A-B)\right]\Leftrightarrow x\in A\wedge\left[x\notin(A-B)\right]\Leftrightarrow x\in A\wedge\sim\left[x\in(A-B)\right]$
$$\Leftrightarrow x\in A\wedge\sim(x\in A\wedge x\notin B)\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\notin A\vee x\in B)$$
$$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin A)\vee(x\in A\wedge x\in B)\Leftrightarrow F\vee(x\in A\wedge x\in B)$$
$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B\Leftrightarrow x\in A\cap B.$$

f) $A\cup B=A\cup(B-A)$. (Verdade)

Dem] $x \in \left[A \cup (B - A)\right] \Leftrightarrow x \in A \vee \left[x \in (B - A)\right] \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin A)$

$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge V$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in A \cup B.$$

g) $A \cup (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (A \cup C)$. (Verdade)

Lembrando que $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$, temos

$$\begin{aligned}(A \cup B)\Delta(A \cup C) &= \left[(A \cup B) - (A \cup C)\right] \cup \left[(A \cup C) - (A \cup B)\right] = \left[A \cup (B - C)\right] \cup \left[A \cup (C - B)\right] \\ &= A \cup (B - C) \cup A \cup (C - B) = A \cup (B - C) \cup (C - B) = A \cup (B \Delta C)\end{aligned}$$

h) $A - (B \Delta C) = (A - B) \Delta (A - C)$. (Falsa)

Contra-exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{0,1\}$, $B = \{1,2,3\}$ e $C = \{1,2,4\}$. Vemos que $A - (B \Delta C) = \{0,1\}$, diferente de $(A - B)\Delta(A - C) = \varnothing$.

i) $A \Delta B = \overline{A} \cap \overline{B}$. (Falsa)

Contra-exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{0,1\}$, $B = \{1,2\}$ no conjunto universo $U = \{0,1,2,3,4\}$. Vemos que $A \Delta B = \{0,2\}$, diferente de $\overline{A} \cap \overline{B} = \{3,4\}$.

j) $A - B = A - (A - B)$. (Falsa)

Contra-exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{0,1\}$, $B = \{0,1,2\}$. Temos que $A - B = \varnothing$, diferente de $A - (A - B) = A$.

4)

a) Se $B \subset C$ e $C \subset A$ então $B \cup C \subset A$.

Dem] Considere $x \in B \cup C$, temos que $x \in B$ ou $x \in C$. Por hipótese, $B \subset C$, então $x \in B$ implica que $x \in C$, como $C \subset A$ temos que $x \in A$. Assim, $B \cup C \subset A$.

b) Se $A \subset B$ e $A \subset C$ então $A \subset B \cap C$.

Dem] Seja $x \in A$, pelas hipóteses, $A \subset B$ e $A \subset C$, temos que $x \in B$ e $x \in C$, isso significa que $x \in B \cap C$. Logo, $A \subset B \cap C$.

c) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

Dem] $X \in \left[P(A) \cap P(B)\right] \Leftrightarrow X \in P(A) \text{ e } X \in P(B) \Leftrightarrow X \subset A \text{ e } X \subset B$
$\Leftrightarrow X \subset (A \cap B) \Leftrightarrow X \in P(A \cap B)$.

d) Se $A \cap B = \varnothing$ então $A \cap \overline{B} = A$.

Dem] (i) $A \cap \overline{B} \subset A$.

(ii) Resta mostrar que $A \subset A \cap \overline{B}$.

Assim, considere $x \in A$, como $A \cap B = \varnothing$, podemos afirmar que se $x \in A$ então $x \notin B$, ou seja, $x \in \overline{B}$. Logo, $x \in (A \cap \overline{B})$, portanto $A \subset A \cap \overline{B}$.

De (i) e (ii) temos que $A \cap \overline{B} = A$.

e) Se $A \cap B = \varnothing$ então $A \cup \overline{B} = \overline{B}$.

Dem] (i) $\overline{B} \subset A \cup \overline{B}$.

(ii) Vamos mostrar que $A \cup \overline{B} \subset \overline{B}$.

Assim, $x \in A \cup \overline{B} \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \notin B$, como $A \cap B = \varnothing$, temos que $x \notin B$, ou seja, $x \in \overline{B}$. Assim $A \cup \overline{B} \subset \overline{B}$.

De (i) e (ii) temos que $A \cup \overline{B} = \overline{B}$.

f) $A \subset B$ se e somente se $A - B = \varnothing$.

Dem] Temos que mostrar duas implicações:

(i) Se $A \subset B$ então $A - B = \varnothing$.

Dem] Suponha que $x \in (A - B)$, ou seja, $x \in A$ e $x \notin B$. Como $A \subset B$, temos que $x \in A$ implica em $x \in B$. Assim, temos que $x \in B$ e $x \notin B$ o que representa contradição. Logo não existe elemento em $A - B$, ou seja, $A - B = \varnothing$.

(ii) Se $A - B = \varnothing$ então $A \subset B$.

Dem] Suponha, por absurdo que A não está contido em B, ou seja, que existe um elemento $x \in A$ tal que $x \notin B$. Isto significa que $x \in (A - B)$, mas isto é uma contradição, pois $A - B = \varnothing$. Assim, $A \subset B$.

De **(i)** e **(ii)** temos que $A \subset B$ se e somente se $A - B = \varnothing$.

g) Se $A \cap B = A$ e $A \cap C \neq \varnothing$ então $B \cap C \neq \varnothing$.

Dem] Notemos que a hipótese $A \cap B = A$ implica que $A \subset B$. Suponha, por absurdo, que $B \cap C = \varnothing$. Da hipótese $A \cap C \neq \varnothing$ temos que existe elemento x tal que $x \in A$ e $x \in C$, como $B \cap C = \varnothing$ podemos afirmar que se $x \in C$ então $x \notin B$, mas como $A \subset B$ podemos dizer que $x \notin A$ o que representa uma contradição. Portanto, $B \cap C \neq \varnothing$.

5) O conjunto X pode ser: $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$ ou $\{1,2,4\}$.

5.1)

a) $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

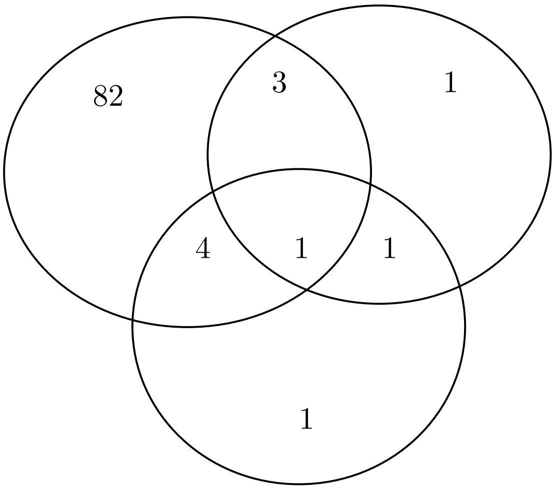
b) $P(B) = \{\varnothing, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}, \{3,4,5\}\}$

c) $P(A \cap B) = \{\varnothing, \{3\}\}$

d) $$P(A \cup B) = \left\{\begin{array}{l} \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \\ \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,4,5\}, \\ \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\}, \{3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\}, \\ \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5\} \end{array}\right\}$$

6) O fato que $A, B \in P(E)$ implica em $A \subset E$ e $B \subset E$, logo $A \cup B \subset E$. Isto e mais as informações de que $E - A = \{4,6,9\}$ e $E - B = \{3,4,6\}$ dadas no exercício, nos levam a deduzir que $A = \{1,3,8\}$, $B = \{1,8,9\}$ e $E = \{1,3,4,6,8,9\}$.

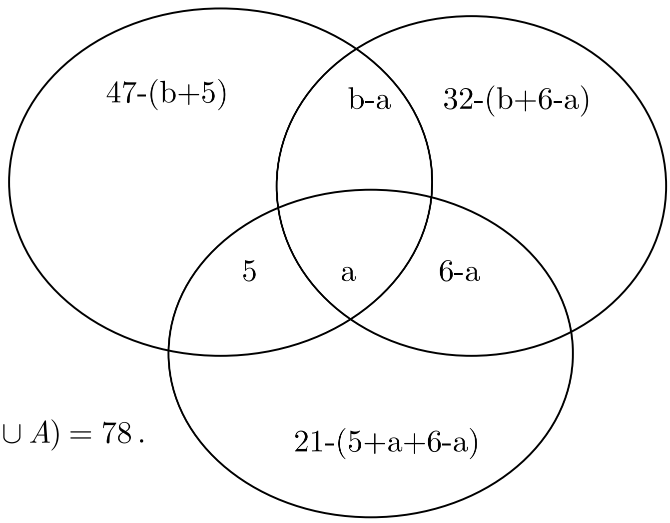
7) Faça um diagrama de Euler-Venn representando as informações dadas. Temos a figura abaixo



a) Não. Para que os dados fossem consistentes deveríamos ter um total de 100% de pesquisados na situação proposta, o que não acontece, pois as contas fornecem apenas 93%.

b) A conclusão é que 7% dos pesquisados não liam qualquer das revistas.

8) Se denominarmos a quantidade de pessoas que estudavam inglês, francês e alemão pelas I, F e A, respectivamente, temos que



Temos:

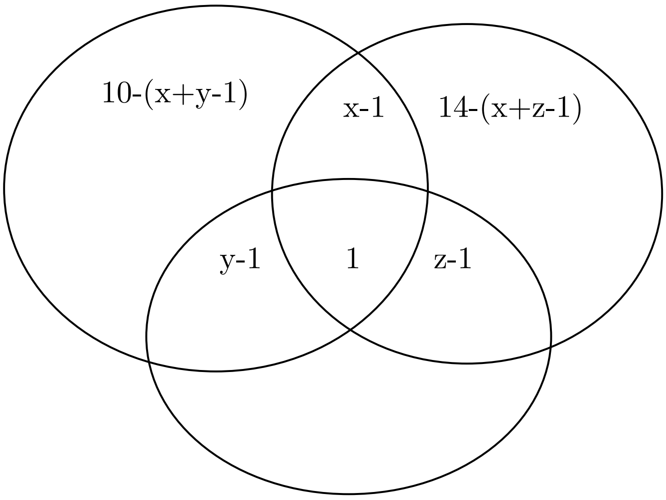
$n(U) = 100$ e $n(I \cup F \cup A) = 78$.

$31 = 47 - (b+5) \;\Rightarrow\; b = 11\,.$

$17 = 32 - (b+6-a) \;\Rightarrow\; a = 2\,.$

Respostas: a) 2 b) 9 c) 10 d) 22 e) 68

9) A partir das informações do exercício, construímos o diagrama abaixo



Temos

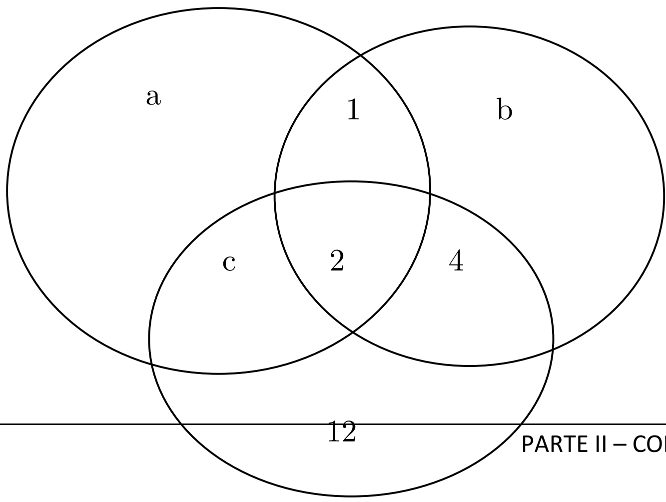
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \;\Rightarrow\; 20 = 10 + 14 - -n(A \cap B)$, logo, $n(A \cap B) = 4\,.$ Daí, $x = 4\,.$

$10 - (x + y - 1) = 2 \;\Rightarrow\; x + y = 9$ nos dá $y = 5\,.$

$140 - (x + z - 1) = 6 \;\Rightarrow\; x + z = 9$ nos dá $z = 5\,.$

Respostas: a) 4 b) 4

10) A partir de algumas informações do exercício, construímos o diagrama abaixo



Temos

De $n\big((A \cup B) - C\big) = 26$ temos que $a + 1 + b = 26 \;\Rightarrow\; a + b = 25$. (I)

De $n\big(A \cup B\big) = 35$ temos $a + c + 1 + 2 + 4 + b = 35 \;\Rightarrow\; a + b + c = 28$. (II)

De $n\big(B \cup C\big) = 37$ temos $b + 7 + c + 12 = 37 \;\Rightarrow\; b + c = 18$. (III)

Dessas equações (I), (II) e (III) temos que $a = 10$, $b = 15$ e $c = 3$. Daí, as respostas

a) 3 b) 10 c) 15 d) 1

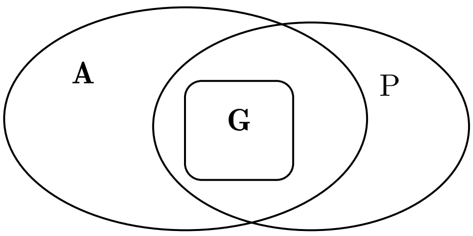
11)

a) P_1 : Todos os girassóis são amarelos.

P_2 : Alguns pássaros são amarelos.

Q : Nenhum pássaro é um girassol.

O diagrama abaixo nos mostra uma situação em que as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa. Logo, **argumento não válido**.

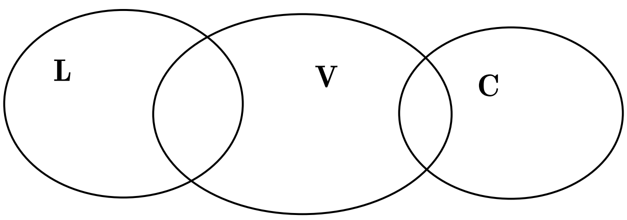


b) P_1 : Alguns livros são verdes.

P_2 : Algumas coisas verdes são comestíveis.

Q : Alguns livros são comestíveis.

O diagrama abaixo nos mostra uma situação em que as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa. Logo, **argumento não válido**.



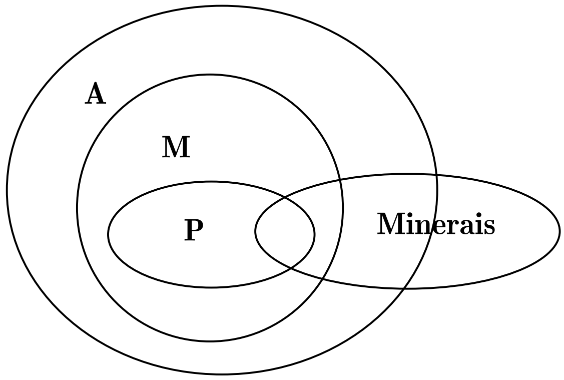
c) P_1 : Todos os peixes são mamíferos.

P_2 : Todos os mamíferos são aves.

P_3 : Existem minerais que são peixes.

Q : Existem minerais que são aves.

Seja qual for o diagrama, teremos, para que as premissas sejam verdadeiras, a conclusão é forçosamente verdadeira. Logo, o **argumento é válido**.

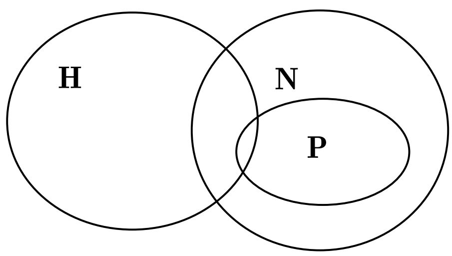


d) P_1 : Alguns homens sabem nadar.

P_2 : Não existem peixes que não sabem nadar.

Q : Os peixes sabem nadar.

Seja qual for o diagrama, teremos, para que as premissas sejam verdadeiras, a conclusão é forçosamente verdadeira. Logo, o **argumento é válido**.



e) i) Q_1 : Alguns baianos são louros. **(Não válida)**

ii) Q_2 : Alguns professores são baianos. **(Não válida)**

iii) Q_3 : Alguns louros são professores. **(Não válida)**

iv) Q_4 : Existem professores louros. **(Não válida)**

12)

a) Toda pessoa pragmática não é sensível. **(Falsa)**

b) Existem artistas que não são determinados. **(Falsa)**

c) Existem pessoas determinadas que são sensíveis. **(Válida)**

d) Nenhuma pessoa pragmática é sensível. **(Falsa)**

e) Existem pessoas determinadas que não são sensíveis e nem são artistas. **(Válida)**

1)

a) Se $x+\alpha=x$ para algum $x\in\mathbb{R}$ então $\alpha=0$.

Dem] Sejam $x+\alpha=x$ e $x+\alpha'=x$ então $x+\alpha=x=x+\alpha'$, logo, $\alpha=\alpha'$.

b) Se $x\beta=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ então $\beta=1$.

Dem] Sejam $x\beta=x$ e $x\beta'=x$ então $x\beta=x\beta'$, logo, para $x\neq 0$ temos $\beta=\beta'$.

c) $x+y=0 \;\Rightarrow\; y=-x$.

Dem] Sejam $x+y=0$ e $x'+y=0$ então $y=-x=-x'$, ou seja, $x=x'$.

d) $xy=1 \;\Rightarrow\; y=x^{-1}$.

Dem] Sejam $xy=1$ e $zy=1$ então $y=x^{-1}=z^{-1}$, ou seja $x=z$.

2)

a) Sejam x e z reais positivos. Se $x<y$ e $z<w$ então $xz<yw$.

Dem] Como x e z são positivos, temos que y e w também são positivos. Assim, pela monotonicidade da multiplicação temos que $x<y \;\Rightarrow\; xz<yz$ e $z<w \;\Rightarrow\; yz<yw$, logo, por trasitividade, $xz<yw$.

b) Se $x^3=y^3$ e $x,\ y$ têm o mesmo sinal então $x=y$.

Dem] $x^3=y^3 \;\Rightarrow\; x^3-y^3=0$ e mais, $(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)=0$, disso, $x-y=0 \;\Rightarrow\; x=y$. O termo x^2+xy+y^2 não pode ser nulo, pois se $x,\ y$ têm o mesmo sinal $x^2+xy+y^2>0$.

3)

a) Se $a>b$ e $c>d$ então $a+c>b+d$.

Dem] $a>b \;\Rightarrow\; a-b>0$ e $c>d \;\Rightarrow\; c-d>0$. Daí, $a-b+(c-d)>0$, isto implica que $a+c>b+d$.

b) Se $a > b > 0$ e $c > d > 0$ então $ac > bd$.

Dem] idem 2) a).

c) Se $a > b \geq 0$ então $a^2 > b^2$.

Dem] $a > b \;\Rightarrow\; a^2 > ab$ e $ab > b^2$, pela transitividade, $a^2 > b^2$.

d) Se $a > 0$ e $b > 0$ e $a^2 > b^2$ então $a > b$.

Dem] $a^2 > b^2 \;\Rightarrow\; a^2 - b^2 > 0 \;\Rightarrow\; (a-b)(a+b) > 0$, como $a + b > 0$ temos que só pode acontecer $a - b > 0$, ou seja, $a > b$.

e) Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$ então $a = b$ se e somente se $a^2 = b^2$.

Dem] (ida). $a = b \;\Rightarrow\; a^2 = ab$ e $ab = b^2$, logo, $a^2 = b^2$.

(volta). $a^2 = b^2 \;\Rightarrow\; a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow (a-b)(a+b) = 0$, isto significa que $a - b = 0$ ou $a + b = 0$, logo $a = b$ ou $a = b = 0$.

f) Se $x < y$ então $x < \dfrac{x+y}{2} < y$.

Dem] $x < y \;\Rightarrow\; x + x < x + y \;\Rightarrow\; 2x < x + y \;\Rightarrow\; x < \dfrac{x+y}{2}$ (I), e também

$x < y \;\Rightarrow\; x + y < y + y \;\Rightarrow\; x + y < 2y \;\Rightarrow\; \dfrac{x+y}{2} < y$ (II). De (I) e (II), por transitividade

$x < \dfrac{x+y}{2} < y$.

4) O erro está na linha "*Dividindo ambos os membros por* $\left(a-b\right)$ *temos* $a + b = b$" pois, como $a = b$ o termo $\left(a-b\right) = 0$ e sabemos que não podemos dividir por termos nulos.

5)

a) $\left[-1,2\right]\cap\left(0,3\right]=\left(0,2\right]$

b) $\left[-1,2\right]\cup\left(0,3\right]=\left[-1,3\right]$

c) $\mathbb{R}\cap\left(0,1\right)=\left(0,1\right)$

d) $\left[-1,4\right]\cup\left(-\infty,3\right]=\left(-\infty,4\right]$

e) $\left[-1,4\right]\cap\left(-\infty,3\right)=\left[-1,3\right]$

f) $\left[-1,2\right]\cap\left(2,5\right]=\varnothing$

g) $\left[0,1\right]\cap\left[1,5\right)=\left\{1\right\}$

h) $\left[1,+\infty\right)\cup\left(-\infty,0\right]=\mathbb{R}-\left(0,1\right)$

i) $\left\{-2\right\}\cup\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$

j) $\mathbb{R}-\left(-\infty,0\right)=\left[0,+\infty\right)$

6)

a) $S=\left\{x\in\mathbb{R};\ x<3\right\}=\left(-\infty,3\right)$

b) $S=\left\{x\in\mathbb{R};\ x>-\dfrac{3}{8}\right\}=\left(-\dfrac{3}{8},+\infty\right)$

c) $S=\left\{x\in\mathbb{R};\ -2<x<1\right\}=\left(-2,1\right)$

d) $S=\left\{x\in\mathbb{R};\ x<-1 \text{ ou } x\geq 1\right\}=\left(-\infty,-1\right)\cup\left[1,+\infty\right)=\mathbb{R}-\left[-1,1\right)$

e) $S=\left\{x\in\mathbb{R};\ 1\leq x\leq 3\right\}=\left[1,3\right]$

f) $S=\left\{x\in\mathbb{R};\ x<-2 \text{ ou } x>1\right\}=\mathbb{R}-\left[-2,1\right]$

7) Não fazer este.

8)

a) $S=\left\{2,4\right\}$

b) $S=\left\{-\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{2}\right\}$

c) $S=\left\{-1,5\right\}$

d) $S=\left\{-1\right\}$

e) $S=\left\{-3,\dfrac{13}{3},3\right\}$

f) $S=\left\{2,3\right\}$

9) Não fazer este exercício.