



UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB

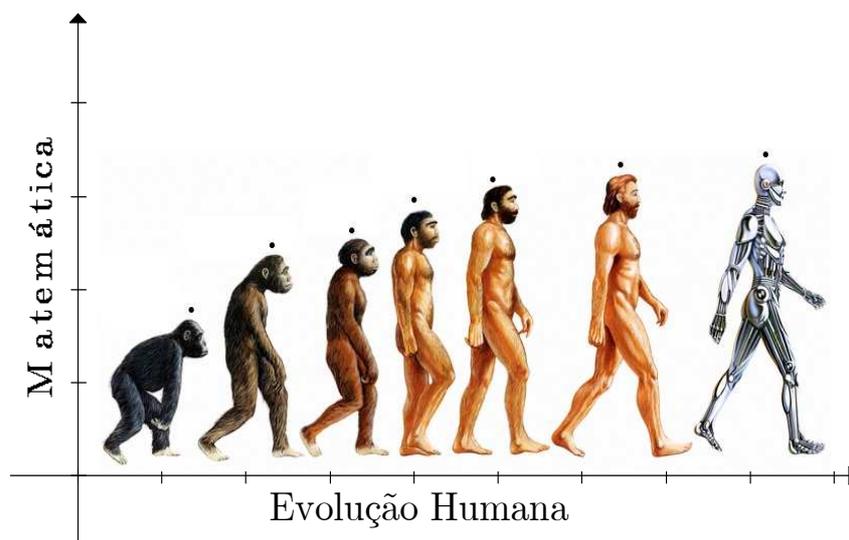
PROGRAD – DCET

CAMPUS I – SALVADOR

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA



# ANOTAÇÕES SOBRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA



**ERON**

Salvador, outubro de 2011.

## APRESENTAÇÃO DA DISCIPLINA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

### EMENTA

Considerações gerais sobre os principais eventos do desenvolvimento histórico da matemática. Desenvolvimento da aritmética, geometria, álgebra, trigonometria e algumas funções elementares através dos tempos antigos até tempos modernos, com enfoque para as descobertas e trabalhos desenvolvidos no Egito, Mesopotâmia, Grécia, Índia, China e povos pré-colombianos, por matemáticos célebres como Pitágoras, Aristóteles, Euclides, Arquimedes e outros. Desenvolvimento da Matemática no Brasil.

### OBJETIVOS

Possibilitar ao aluno

- compreender o desenvolvimento da matemática como processo construído historicamente;
- instrumentar-se intelectualmente do conteúdo histórico científico matemático para que possa exercer a sua função docente de forma qualificada, reflexiva, criativa e contextualizada, adequando aos dias de hoje os processos que foram desenvolvidos anteriormente.
- reconhecer a contribuição dos principais matemáticos para o desenvolvimento desta ciência, destacando as regiões a que pertenciam.
- desenvolver o espírito investigativo do aluno e habilitá-lo para as práticas da pesquisa científica e da intervenção social, tendo como princípios a promoção da interdisciplinaridade, do trabalho colaborativo e da práxis pedagógica, como norteadora na construção da identidade profissional.

### PROGRAMA

- História e Matemática
- Matemática: possíveis origens
- Desenvolvimento dos conteúdos matemáticos:

- Contagem e sistemas de numeração
- Números e medidas
- Notação, álgebra e equações
- Geometria plana, espacial e analítica
- Trigonometria

Nas civilizações: Egípcia, Mesopotâmica, Grega, Chinesa, Indiana, Andina, Árabe.

- Matemática na Europa medieval e moderna
- Matemática Contemporânea
- Matemática no Brasil e na Bahia

## **METODOLOGIA**

Aulas expositivas, leitura de textos, seminários e trabalhos em sala de aula.

## **AVALIAÇÕES**

- Atividades em sala de aula: leitura, trabalhos e resolução de exercícios
- Apresentação de temas (seminários)
- Avaliação escrita individual.

## **BIBLIOGRAFIA**

### **Livros sobre História das Ciências**

- [1] CHASSOT, A. **A ciência através dos tempos**. São Paulo: Editora Moderna, 1994. (Coleção Polêmica)
- [2] LOPES, J. L. **Ciência e Liberdade – Escritos sobre ciência e educação no Brasil**. Rio de Janeiro: UFRJ-CBPF/MCT.....

- [3] MORRIS, R. **Uma breve história do infinito: dos paradoxos de Zenão ao universo quântico**. Rio de Janeiro: Ed. Jorge Zahar, 1998.
- [4] HENRY, J. **A Revolução Científica e as origens da ciência moderna**. Rio de Janeiro: Ed. Jorge Zahar, 1998. (Ciência e Cultura)
- [5] HELLMAN, H. **Grandes debates da Ciência: dez maiores contendidas de todos os tempos**. São Paulo: Ed. UNESP, 1999.
- [6] RONAN, C. A. **A História Ilustrada da Ciência**. Rio de Janeiro: Ed. Jorge Zahar, 1987.

#### Livros sobre História da Matemática (geral)

- [7] AABOE, A. **Episódios da história antiga da matemática**. SBM, 2002.
- [8] BAUMGART, J. K. **História da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula).
- [9] BERLINGOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.
- [10] BOYER, C. B. **Cálculo**. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula)
- [11] BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
- [12] DAVIS, H. T. **História da Computação**. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula)
- [13] EVES, H. **História da Geometria**. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula)
- [14] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 1997.
- [15] GUNDLACH, B. H. **História dos números e numerais**. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula)
- [16] IFRAH, G. **Os números – a história de uma grande invenção**. Globo, 2ª. ed, 1989.

- [17] IFRAH, G. **História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.
- [18] KENNEDY, E. S. **História da Trigonometria**. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula)
- [19] MENDES, I. A. **Números – o simbólico e o racional na história**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.
- [20] STRUIK, D. **História Concisa das Matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1992. (Ciência e Cultura).

#### **Livros sobre História da Matemática (no Brasil)**

- [1] CASTRO, F. M. O. **A matemática no Brasil**. Campinas: Editora da UNICAMP, 1992. (Coleção Repertórios).
- [2] D'AMBROSIO, U. **Educação matemática: da teoria a prática**. Campinas: Papyrus, 1997.
- [3] SILVA, C. P. **Matemática no Brasil: história de seu desenvolvimento**. São Paulo: Edgard Blücher, 2003.

#### **Livros sobre História e Educação da Matemática**

- [1] CADERNOS CEDES 40 – **História e Educação Matemática**. São Paulo: Papyrus, 1996.
- [2] GONZALEZ J. L. et al. **Cultura e Aprendizagem – Números Inteiros**, 1985.
- [3] MENDES, I. A.; Fossa, J. A. e Vaidés, J. E. N. **A história como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Sulina, 2006.
- [4] MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. (Tendências em Educação Matemática, 10)
- [5] OLIVERO, M. **História da matemática através de problemas**. Rio de Janeiro: UFF/CEP – EB, 2010. (Curso de Instrumentação para o Ensino de Matemática)

## Livros de divulgação da Matemática (leitura colateral)

- [1] ACZEL, A. **O mistério do Alef**. São Paulo: Ed. Globo, 2003.
- [2] ATALAY, B. **A Matemática e a Mona Lisa**. São Paulo: Ed. Mercury, 2007.
- [3] DEWDNEY, A. K. **20.000 Léguas matemáticas: um passeio pelo misterioso mundo dos números**. Rio de Janeiro: ed. Jorge Zahar, 2000. (Ciência e Cultura)
- [4] DU SAUTOY, M. **A música dos números primos: a história de um problema não resolvido na matemática**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2007.
- [5] GARBI, G. **A Rainha das Ciências**. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2006.
- [6] GARBI, G. **O romance das equações algébricas – história da Álgebra**. São Paulo: Makron Books, 1997.
- [7] GUEDJ, D. **O teorema do papagaio: um thriller da história da matemática**. São Paulo: Cia. Das Letras, 1999.
- [8] LIVIO, M. **Razão Áurea: A história de  $\Phi$ , um número surpreendente**. Rio de Janeiro: Record, 2007.
- [9] LIVIO, M. **A equação que ninguém conseguia resolver: como um gênio da matemática descobriu a linguagem da simetria**. Rio de Janeiro: Record, 2008.
- [10] MAOR, E. **e: A História de um número**. Rio de Janeiro: Record, 2008.
- [11] MLODINOV, L. **A Janela de Euclides**. São Paulo: Geração Editorial, 2004.
- [12] NETZ, Reviel & NOEL, William. **Códex Arquimedes**. Rio de Janeiro: Record, 2009.
- [13] O'SHEA, D. **A solução de Poincaré**. Rio de Janeiro: Record, 2009.
- [14] PAPPAS, T. **Fascínios da Matemática: a descoberta da matemática que nos rodeia**. Lisboa: Replicação, 1998.
- [15] STEWART, I. **Será que Deus joga dados? A nova matemática do caos**. Rio de Janeiro: Ed. Jorge Zahar. 1991.
- [16] SINGH, S. **O último teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos**. Rio de Janeiro: Record, 1998.

- [21] BARDI, J. S. **A Guerra do Cálculo. Newton, Leibniz e o maior embate matemático de todos os tempos.** Rio de Janeiro: Record, 2008.
- [22] KAPLAN, R. **O nada que existe. Uma história natural do zero.** Rio de Janeiro: Rocco, 2001.

#### Artigos e revistas

- [1] BROLEZZI, A. C. **História da matemática no ensino superior** na *História e tecnologia no ensino da matemática*, volume 1, p 79-87. Editora IME-UERJ.
- [2] D'AMBROSIO, U. **A interface entre História e Matemática: uma visão histórico-pedagógica.....**
- [3] D'AMBRÓSIO, U. **Reflexões sobre História, Filosofia e Matemática** no *BOLEMA. Boletim de Educação Matemática*, Especial, n°2, 1992; p 42-60.
- [4] D'AMBROSIO, U. **Há 500 anos, que Matemática?** Revista Impulso, Piracicaba/SP – Vol 12, Número 27, páginas 47–57, 2000.
- [5] DO CARMO, M. P. **Geometrias Não-Euclidianas.** Matemática Universitária, Dez/1987, Número 6 da SBM.
- [6] MARTINS, A. **História da Matemática no ensino da Matemática.** IREM de Lyon in Bouvier, A. (coord), *Didactique des Mathématiques*, Cedic/Nathan, 1986.
- [7] SCIENTIFIC AMERICAN (Brasil). **As diferentes faces do infinito** – Edição especial, n° 15.
- [8] SCIENTIFIC AMERICAN (Brasil). **Etnomatemática** – Edição especial, n° 11.

# INTRODUÇÃO

Este material resume textos sobre alguns tópicos da história da Matemática, foram quase totalmente inspirados em fontes das referências. Não está isento de erros e aperfeiçoamentos. Ajudará numa breve introdução aos temas que seguem e deverão ser aprofundados com o estudo das referências mais consagradas nos diversos assuntos.

## Sumário em capítulos

- 1 – Introdução à história da Matemática
- 2 – Números, numerais e sistemas de numeração
- 3 – Sistemas numéricos antigos
- 4 – Sistema de numeração indo-arábico
- 5 – Conjuntos numéricos
- 6 – Geometria plana
- 7 – Geometria espacial e analítica
- 8 – Álgebra: o simbolismo algébrico
- 9 – Álgebra: equações e soluções
- 10 – Trigonometria

## CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO À HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

- História da Matemática
- História da matemática para o professor de matemática
- Implicações sociais e políticas da Matemática
- Síntese

### História da Matemática

Há vários milênios, pessoas de todo o mundo estudam, aprendem e usam a matemática. Com o estabelecimento da educação universal, mais atenção frequentemente tem sido dada a questões de *como*, *o que* e *por que* ensinar a matemática.

Segundo Maria Teresinha Gaspar (2003)

É amplamente reconhecido que a matemática desempenha um papel importante na formação do aluno desde o início dos sistemas educacionais, que o modo como ela é ensinada afeta o desempenho dos estudantes e que muitos daqueles que vieram a fazer contribuições para o desenvolvimento da matemática foram influenciados por alguns dos seus professores. Com relação à dimensão histórica no ensino da matemática, vários pesquisadores consideram que a história da matemática como um recurso pedagógico a ser incorporado ao trabalho do professor é benéfico e que é importante saber como ela pode ser introduzida em atividades de sala de aula, contribuindo para o ensino-aprendizagem da matemática e, como pode facilitar o alcance dos objetivos dentro do currículo de matemática.

Nos últimos anos, o recurso pedagógico história da matemática foi oficialmente reconhecido como importante para o ensino em todos os níveis, já constando nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's).

Quando estudamos a história da matemática, a descobrimos como uma criação humana que, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos, e estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e atuais,

possibilita ao professor o desenvolvimento de atitudes/valores favoráveis do aluno frente ao conhecimento. Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem-se em veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. Nesse sentido, a História da Matemática é um instrumento de resgate da própria identidade cultural.

Vejamos, no trecho abaixo, o que o importante matemático Ubiratan D'Ambrósio (1999) diz sobre História e Matemática:

Como todo professor, o professor de matemática, deve ter conhecimento de sua disciplina. Mas, a construção desse conhecimento através do ensino depende de sua compreensão de como esse conhecimento se originou, de quais as principais motivações para o seu desenvolvimento e quais as razões de sua presença nos currículos escolares. Destacar esses fatos é um dos principais objetivos da História da Matemática. Essas questões nos conduzem a inúmeras reflexões, mas embora não possam ser respondidas com uma simples definição, vamos ver o que se diz de História e de Matemática.

Podemos resumir o que diz o importante Novo Aurélio nas suas 17 acepções para o verbete história, dizendo que história é a narrativa de fatos, datas e nomes associados à geração, à organização intelectual e social e à difusão do conhecimento – no nosso caso conhecimento matemático – através das várias culturas ao longo da evolução da humanidade.

Para Matemática, o Aurélio nos dá três acepções. A mais interessante diz “1. Ciência que investiga relações entre entidades definidas abstrata e logicamente”.

Nas conceituações acima, os estudos de História dependem fundamentalmente do reconhecimento de fatos, de datas e de nomes e de interpretação ligados ao objeto de nosso interesse e de uma definição desse mesmo objeto. No nosso caso, a História da Matemática depende do que se entende por Matemática. Uma vez identificados os objetos do estudo, a relação de fatos, datas e nomes dependem de registros, que podem ser de natureza muito diversa: memórias, práticas, monumentos e artefatos, escritos e documentos. Essas são as chamadas fontes históricas.

A interpretação das fontes históricas depende muito de uma ideologia e de uma metodologia de análise dessas fontes. O conjunto dessas metodologias, não só na análise, mas também na identificação das fontes é o que se chama historiografia. Obviamente, a historiografia reflete uma ideologia e depende de uma filosofia de suporte, no nosso caso, da filosofia da matemática.

A Matemática tem, como qualquer outra forma de conhecimento, a sua dimensão política e não se pode negar que seu progresso tem tudo a ver com o contexto social, econômico, político e ideológico. Fato este, muitas vezes ignorado e mesmo negado. Os reflexos dessa reação na Educação Matemática são evidentes e dificultam a contextualização. Com isso, muitos orientam o ensino destacando o fazer matemática como um ato de gênio, reservado a poucos, iluminados que são vistos como privilegiados pelo toque divino. O resultado disso é uma educação matemática de

reprodução, formadora de indivíduos subordinados, passivos e acríticos.

Pode-se propor um programa de História da Matemática voltado à educação matemática com essencialmente cinco questões norteadoras:

1. Por que isso não foi descoberto antes?
2. A partir de que problemas esse tema se desenvolveu?
3. Quais eram as forças que o impulsionavam?
4. Por que foi essa descoberta tão importante?
5. Por que foi ela praticamente não notada pelos seus contemporâneos (não matemáticos) e continua assim até hoje?

Na opinião de Freudenthal, o programa formulado nas cinco questões acima, reconhece que “a história da matemática deveria ser conhecimento integrado, mais guiado pela história que pela matemática, analisando mais os processos que os produtos”. Um fato isolado e descontextualizado, geralmente dá uma impressão falsa. Ele também alerta para o perigo de se fazer uma história de anedotas, quando diz que “notas históricas em livros escolares muitas vezes são pequenas histórias, isoladas, muitas vezes enganadoras e mais entretenimentos que verdades”. Porém é possível fazer uma história da matemática interessante e atrativa, evitando todas essas distorções.

Ainda segundo Ubiratan D’Ambrósio, algumas das finalidades principais da História da Matemática são:

- situar a Matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução;
- mostrar que a Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de Matemática desenvolvidas pela humanidade;
- destacar que essa Matemática teve sua origem nas culturas da Antigüidade mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média e somente a partir do século XVII se organizou como um corpo de conhecimentos, com um estilo próprio;
- saber que desde então a Matemática foi incorporada aos sistemas escolares das nações colonizadas, se tornou indispensável em todo o mundo em consequência do desenvolvimento científico, tecnológico e econômico, e avaliar as consequências sócio-culturais dessa incorporação.

## História da matemática para o professor de matemática

A matemática moderna, essencialmente teórica, criou a tendência de nos fazer esquecer o papel prático da matemática. Grande parte dos conceitos matemáticos teve sua origem na necessidade de resolver problemas práticos cotidianos e, ao perder de vista esses problemas, a matemática enfraqueceu o seu sentido. A teoria torna-se necessária e torna-se a via fundamental, quando os problemas se multiplicam e a sua resolução é laboriosa.

Conhecer a história da matemática permite tentativas de pôr de pé situações didáticas mais pertinentes para conseguir aprendizagens, graças ao conhecimento que se pôde ter sobre a origem da noção (ou conceito) que se pretende ensinar, sobre o tipo de problema que se visava resolver, as dificuldades que surgiram e o modo como foram superadas.

A História da Matemática no ensino deve ser encarada, sobretudo, pelo seu valor de motivação para a Matemática. É positivo divulgar curiosidades históricas que envolvem elementos de matemática: conteúdo e/ou personagens, coisas interessantes que poderão motivar alguns alunos.

É importante dizer que não é necessário que o professor seja um especialista para introduzir História da Matemática em suas aulas. Se em algum tema, o professor tem uma informação ou sabe de uma curiosidade histórica, deve compartilhar com os alunos. Não é necessário desenvolver um currículo, linear e organizado de História da Matemática. Se conseguir colocar aqui e ali algumas reflexões, já é um bom começo! Isto pode gerar muito interesse nas aulas de Matemática e pode ser feito sem que o professor tenha se especializado nesta área específica.

Enfim, para a formação dos professores, bem como para a formação dos alunos, é bom desmistificar a matemática mostrando que ela é uma obra humana, feita por homens em tempos historicamente datados, em evolução constante mesmo hoje e não uma obra de iluminados ou deuses numa eternidade mítica. É interessante notar que no Brasil, e o mesmo se dá em todo o mundo, os cursos (e temas) de História da Matemática vem sendo crescentemente procurados por estudantes, professores e outros profissionais de diversas áreas de atuação e conhecimento.

### Implicações sociais e políticas da Matemática

Inegavelmente, hoje não se pode ser operacional no mundo sem dominar Matemática, mesmo que não se reconheça no fazer os componentes matemáticos. Por exemplo, a capacidade

de encontrar um endereço, fazer uma chamada telefônica, lidar com dinheiro, operar um aparelho de televisão e um automóvel, e assim por diante, tem fortes componentes matemáticos. Também, que o modelo de mundo que temos hoje segue o modelo europeu, que se impôs a todo o planeta durante o período colonial.

Esse modelo é impregnado de matemática – a urbanização, a comunicação, a produção, a tecnologia, a economia e assim por diante, tudo tem matemática embutida. A Economia se tornou a ciência por excelência da sociedade moderna, à qual tudo se subordina. Pode-se afirmar que os sistemas de produção e a economia moderna se desenvolveram paralelamente, quase em simbiose, com o desenvolvimento da Matemática ocidental, ainda mais que a Física, a Química, a Biologia e a tecnologia modernas.

### Síntese

Vimos que precisamos observar alguns aspectos quando ensinamos matemática, principalmente *como* ensinar, *o que* ensinar e *porque* ensinar os conceitos que atravessaram os séculos e que usamos até os dias de hoje. Segundo Ubiratan D’Ambrósio precisamos resgatar a história da matemática para darmos sentido às coisas que se estudam se baseando em cinco questões que norteiam esta aplicação na educação matemática, e observando quais as principais finalidades de se estudar a história da matemática. Vimos também que a história da matemática pode ser utilizada como fonte de motivação para os alunos quando se resgata o principal objetivo de se estudar matemática, lembrando das suas origens históricas.

### Leituras complementares

2. **A interface entre História e Matemática: uma visão histórico-pedagógica** de Ubiratan D’Ambrósio.
3. **Uma aula de matemática no ano 1000** de Ana Catarina Hellmeister.

Neste capítulo vamos ver um pouco da história e do desenvolvimento de alguns conceitos importantes da matemática: numeração, processo de contagem e um dos mais antigos sistemas de numeração, o Egípcio.

- História da numeração
- Processos de contagem
- Sistemas antigos
- Numeração egípcia
- Síntese

### História da Numeração

As nossas primeiras concepções de número e forma datam de tempos muito remotos, desde a idade da pedra, a era paleolítica. Durante as centenas de milhares de anos (ou mais) deste período, os homens viviam em cavernas, em condições pouco diferentes das dos animais e as suas principais energias eram orientadas para o processo elementar de recolher alimentos onde fosse possível encontrá-los. Eles faziam instrumentos para caçar e pescar e desenvolveram linguagem para comunicação uns com os outros e enfeitavam suas habitações com certas formas de arte criativa.

Pouco progresso se fez no conhecimento de valores numéricos e de relações entre grandezas até que acontecesse a transição da mera coleta de alimentos para a sua produção; da caça e da pesca para a agricultura.

Com esta transformação fundamental – uma revolução na qual a atitude do homem perante a natureza deixou de ser passiva para se tornar ativa – inicia-se um novo período da idade da pedra: o neolítico. Durante o neolítico existia uma atividade comercial considerável entre as diversas povoações promovendo a formação de linguagens. As palavras dessas linguagens exprimiam coisas muito concretas e pouquíssimas abstrações.

Não temos dados suficientes para fixar o período da história primitiva em que foram descobertos os números cardinais. Os mais antigos documentos escritos de que dispomos mostram a presença do conceito igualmente na China, Índia, Mesopotâmia e Egito. Todos esses documentos contêm a questão “*Quantos...?*”. Esta questão pode ser respondida de forma mais adequada em termos de números cardinais. Portanto, quando esses documentos foram escritos, e provavelmente muito antes dessa época, o conceito de número cardinal já se tinha formado.

### O processo de contagem

Em todas as formas de cultura e sociedade, mesmo as mais rudimentares, encontramos algum conceito de número e, a ele associado, algum processo de contagem. Pode-se dizer que o processo de contagem consistia, a princípio, em fazer corresponder os objetos a serem contados com os objetos de algum conjunto familiar (chamado conjunto de contagem): os dedos da mão, do pé, pedras, etc.

Com a necessidade de contagem de uma quantidade maior de objetos (como, por exemplo, o número de cabeças de gado, árvores ou de dias), o homem sentiu que era necessário sistematizar o processo de contagem, e os povos de diversas partes do mundo desenvolveram vários tipos de sistemas de contagem. Estabelecia-se, então, um conjunto de símbolos, juntamente com algumas regras que permitiam contar, representar e enunciar os números. Alguns desses conjuntos continham cinco, outros dez, doze, vinte ou até sessenta símbolos, chamados “*símbolos básicos*”.

Hoje, o processo de contagem consiste em fazer corresponder os objetos a serem contados com o conjunto  $\{1, 2, 3, \dots\}$ . Para se chegar à forma atual, aparentemente tão semelhante à anterior, foram necessárias duas grandes conquistas que estão intimamente relacionadas: o *conceito abstrato de número* e uma *representação adequada* para esses.

Para dar uma idéia da dificuldade da questão relativa à representação dos números, lembremos que, a princípio, nossos mais antigos antepassados contavam somente até dois, e a partir daí diziam “muitos” ou “incontáveis” (É fato que, ainda hoje, existem povos primitivos que contam objetos dispondo-os em grupos de dois). Os gregos, por exemplo, ainda conservam em sua gramática uma distinção entre um, dois e mais de dois, ao passo que a maior parte das línguas atuais só faz a distinção entre um e mais de um, isto é, entre singular e plural.

### Sistemas de numeração antigos

As linguagens também desempenharam um papel primordial nas mudanças da ênfase matemática da numeração para o número. Do ponto de vista moderno, tende-se a considerar a numeração como ligada a meios de expressar números — isto é, à criação de símbolos para certas idéias. Na abordagem moderna do ensino da matemática elementar, distinguimos desde o início numeral de número.

A numeração não posicional precedeu em muito a numeração posicional na maioria das regiões civilizadas do mundo antigo. Uma vez escolhido um conjunto de símbolos básicos, os primeiros sistemas de numeração, em sua maioria, tinham por regra formar os numerais pela repetição de símbolos básicos e pela soma de seus valores. Assim eram, por exemplo, os sistemas egípcio, grego e romano.

### **Numeração Egípcia**

Durante muito tempo, o nosso campo da história da matemática mais rico repousava no Egito, devido a descoberta, em 1858, do chamado *Papiro de Rhind*, escrito por volta de 1650 a.C., mas que continha material ainda mais antigo. Os Egípcios usaram o papiro em uma grande parte dos seus escritos que se conservaram devido ao clima seco. A maior parte dos nossos conhecimentos sobre a matemática egípcia deriva, então, de dois papiros: O *Papiro de Rhind*, que contém 85 problemas, e o chamado *Papiro de Moscou*, talvez dois séculos mais antigo, que contém 25 problemas.

Os Egípcios da Antiguidade criaram um sistema muito interessante para escrever números, baseado em agrupamentos, que consistia em separar os objetos a serem contados em grupos de dez, mas não tinham símbolo para o zero. Portanto, para representar cada múltiplo de dez, eles utilizavam um símbolo diferente dos básicos. Um número era formado, então, pela justaposição desses símbolos, os quais podiam estar escritos em qualquer ordem, já que a posição do símbolo não alterava o seu valor.

No sistema de numeração egípcia os números são representados por símbolos especiais para 1, 10, 100, 1000 e de uma forma aditiva:

1 era representado por uma marca parecida com um bastão | ;

2 era representado por duas marcas || ;

E assim por diante. Veja a figura abaixo

3	4	5	6	7	8	9

Quando chegavam a 10, eles trocavam as 10 marcas ||||| por  $\cap$  que indicava o agrupamento.

Feito isto, continuavam até ao 19...

10	11	12	13	14
$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$
15	16	17	18	19
$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$

O 20 era representado por  $\cap \cap$ .

Tinha-se, então, que até 90..

30	40	...	90
$\cap \cap \cap$	$\cap \cap \cap \cap$	...	$\cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap$

Para registrar 100, em vez de  $\cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap$  trocavam este agrupamento por um novo símbolo, que parecia um pedaço de corda enrolada:  $\text{?}$ .

Juntando vários símbolos de cem, escreviam o 200, 300, ..., 900.

Dez marcas de 100 eram substituídas por um novo símbolo, que era a figura da flor de lótus:  $\text{?}$ .

Desta forma, trocando cada dez marcas iguais por uma nova, eles escreviam todos os números de que necessitavam.

Vejamos os símbolos usados pelos egípcios e o que significava cada marca:

Símbolo Egípcio	Descrição do símbolo	O número na nossa notação
	Bastão vertical	1
∩	Ferradura	10
ϩ	Rolo de pergaminho	100
⊃	Flor de lótus	1000
☞	Dedo encurvado	10000
𐊖	Peixe	100000
𐊕	Homem	1000000

Alguns exemplos:

Para representar 213, os egípcios escreviam:

$$\rho\rho\cap\cap|||, \text{ ou seja, } 100+100+10+1+1+1.$$

Para representar 2435, os egípcios escreviam:

$$\rho\rho\rho\rho\cap\cap\cap|||,$$

No entanto, este sistema de numeração pode tornar-se muito trabalhoso em relação à representação de números grandes.

**Síntese**

Neste capítulo, vimos que os processos de contagem são muito antigos. As primeiras formas de contagem associavam a quantidade de objetos com os dedos das mãos, dos pés, pedras, etc. Com a necessidade de contar grandes quantidades, surgiu a representação destas contagens por símbolos. Hoje, utilizamos os símbolos que são denominados números cardinais. Foram os egípcios que começaram a agrupar elementos de dez em dez, fazendo troca de símbolos a cada grupo formado.

### Questões

- 1 – Escreva alguns números no sistema egípcio antigo e compare com a nossa notação moderna.
- 2 – Leia sobre os papiros Rhind e Moscow.

Neste capítulo vamos ver um pouco da história e do desenvolvimento de alguns sistemas de numeração antigos, tais como o Babilônico, o Grego e o Romano.

- Numeração babilônica
- Numeração romana
- Numeração grega

### Numeração Babilônica

Na Mesopotâmia, numa época anterior ao ano 2000 a.C., pode-se detectar o desenvolvimento de uma matemática mais avançada do que no Egito. Os textos mais antigos, datados do terceiro milênio do último período sumério, revelam já uma grande habilidade para calcular e o uso da base 60 e potências de 60 para contar. Transmitidas, em seguida, aos matemáticos e astrônomos babilônios (sucessores dos sumérios na Mesopotâmia), estes elaboraram um avançado sistema de numeração, legado que nos foi transmitido pelos astrônomos gregos e árabes.

O sistema de numeração babilônico era uma mistura de base dez com base sessenta, no qual os números menores que 60 eram representados pelo uso de um sistema de base 10 simples, por agrupamentos; e o número 60 e os maiores eram designados pelo princípio da posição na base sessenta.

Trata-se de uma tabua de multiplicação por 25, provinda de Susa e datando da primeira metade do II milênio a.C., em que os números considerados são expressos no sistema posicional sexagesimal dos sábios babilônios.

A notação aditiva tem um grande inconveniente: à medida que números maiores são escritos mais símbolos devem ser introduzidos para representá-los (já que utilizar apenas os símbolos antes empregados torna a representação do número demasiadamente extensa). Entretanto essa dificuldade é superada atribuindo-se importância à posição que um símbolo ocupa na representação de um número.

TRANSCRIÇÃO		TRADUÇÃO (sistema posicional decimal)	
1	25	1	25
2	50	2	50
3	1;15	3	75
4	1;40	4	100
5	2;05	5	125
6	2;30	6	150
7	2;55	7	175
8	3;20	8	200
9	3;45	9	225
10	4;10	10	250
11	4;35	11	275
12	5;	12	300
13	5;25	13	325
14	5;50	14	350
15	6;15	15	375
16	6;40	16	400

Figura.... símbolos ...

Enquanto os egípcios indicavam cada unidade mais elevada através de um novo símbolo, os Babilônios usavam o mesmo símbolo, mas indicavam o seu valor pela sua posição. Assim já era o sistema desenvolvido pelos babilônios por volta de 1800 a.C. Estes usavam grupos de 60 elementos e seus símbolos eram combinações de cunhas verticais



(representando a unidade) e angulares



(representando a dezena), dando origem ao que se chama sistema sexagesimal. Ainda hoje utilizamos este sistema ao medir o tempo em horas, minutos e segundos e os ângulos em graus. Um símbolo em uma seqüência fica, então, multiplicado por 60 cada vez que avançamos uma casa à esquerda.

Por exemplo, 1 seguido por outro 1 significava 61 e 5 seguido por 6 e por 3 (5,06,03) significava  $5 \cdot 60^2 + 6 \cdot 60 + 3 = 18363$ . Este sistema de posição não diferia essencialmente do nosso próprio sistema de escrita de números, em que o símbolo 343 representa  $3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3$ . Tal sistema tinha vantagens enormes para o cálculo, como podemos

verificar facilmente ao tentarmos realizar uma multiplicação no nosso próprio sistema e no sistema de numeração romana.

Os babilônios também não tinham um símbolo que representasse o zero, mas nas posições em que ele deveria aparecer era deixado um espaço em branco, ficando a cargo do leitor a tarefa de adivinhar, pelo contexto, o valor correto que estava sendo representado. Observe que um espaço vazio pode conter um ou mais zeros na representação de um número.

Por exemplo:  $\nabla$  podia tanto representar 1 unidade ou 60 unidades ou  $60^2$  unidades. A representação do número 25 podia ser facilmente confundida com a de 615 ou de 4305.



Como passar de um número de representação babilônica para a representação árabe? Por exemplo, os números 3,42,09 e 23,37 estão em representação babilônica.

$$3,42,09 = 3 \cdot 60^2 + 42 \cdot 60 + 9 = 13329$$

$$23,37 = 23 \cdot 60 + 37 = 1417$$

Resultam 13329 e 1417 respectivamente na nossa representação decimal (árabe).

Como passar de um número de representação árabe para a representação babilônica?

Por exemplo, para o número 2492 que está representado em nossa notação usual.

Este número está entre 60 e  $60^2$ , portanto vamos dividir 2492 por 60.

$$\begin{array}{r|l}
 2492 & 60 \\
 \hline
 092 & 41 \\
 32 &
 \end{array}$$

Então,  $2492_{(10)} = 41,32_{(60)} = 41 \cdot 60^1 + 32 \cdot 60^0$ .

## Numeração Romana

Roma foi o centro de uma das mais notáveis civilizações da Antiguidade, período que se manteve entre os anos 753 a.C. (data atribuída à sua fundação) e 1453 (data atribuída à queda do Império Romano do Oriente).

Sabe-se muito pouco a respeito da origem da notação romana para números. Os romanos nunca usaram as letras sucessivas de seu alfabeto para propósitos de numeração, como faziam algumas outras civilizações antigas.

Os Romanos utilizaram letras do seu alfabeto para representar números. Como foram senhores de um grande Império, deixaram-nos monumentos, pontes, etc. as marcas da sua cultura. Ainda hoje utilizamos a numeração Romana na leitura de datas, nos mostradores dos relógios, etc.

Como funcionava o sistema de numeração Romana?

As 7 letras que os Romanos utilizavam como numerais são mostradas na figura ao lado.

<b>I</b>	<b>1</b>
<b>V</b>	<b>5</b>
<b>X</b>	<b>10</b>
<b>L</b>	<b>50</b>
<b>C</b>	<b>100</b>
<b>D</b>	<b>500</b>
<b>M</b>	<b>1000</b>

Repetindo cada símbolo duas ou três vezes (nunca mais que três) o número fica duas ou três vezes maior. Os símbolos V, L e D não se repetem. As letras I, X ou C colocam-se à esquerda de outras de maior valor para representar a diferença deles, obedecendo às seguintes regras:

<b>II</b>	<b>2</b>
<b>III</b>	<b>3</b>
<b>XX</b>	<b>20</b>
<b>XXX</b>	<b>30</b>
<b>CC</b>	<b>200</b>
<b>CCC</b>	<b>300</b>
<b>MM</b>	<b>2000</b>

I só se coloca à esquerda de V ou de X;

X só se coloca à esquerda de L ou de C;

C só se coloca à esquerda de D ou de M;

<b>VII (5+2)</b>	<b>7</b>
<b>XII (10+2)</b>	<b>12</b>
<b>LII (50+2)</b>	<b>52</b>
<b>CX (100+10)</b>	<b>110</b>

Se a um símbolo colocarmos à sua direita um símbolo de menor valor, este último símbolo soma o seu valor ao valor do outro como na figura ao lado. Se a um símbolo colocarmos à sua esquerda um símbolo de menor valor, este símbolo diminui o seu valor ao valor do outro.

<b>IV (5 - 1)</b>	<b>4</b>
<b>IX (10 - 1)</b>	<b>9</b>
<b>XL (50 - 10)</b>	<b>40</b>
<b>XC (100 - 10)</b>	<b>90</b>
<b>CD (500 - 100)</b>	<b>400</b>
<b>CM (1000 - 100)</b>	<b>900</b>

Cada barra sobreposta a uma letra ou a um grupo de letras multiplica o seu valor por mil.

$\bar{V}$	<b>5000</b>
$\overline{XV}$	<b>15000</b>
$\overline{\overline{IV}}$	<b>4000000</b>
$\bar{L}$	<b>50000</b>

Uma curiosidade:

Os Romanos, freqüentemente, escreviam IIII (4) em vez de IV. Isto, ainda hoje, pode observar-se nas esferas de alguns relógios.

Era comum o uso de numerais romanos em contabilidade em alguns países europeus, bem depois da difusão do moderno sistema indo-arábico. Em 1300, o uso de numerais indo-arábicos era proibido em bancos de certas cidades européias. O argumento era que esses

numerais eram mais fáceis de falsificar ou alterar do que os numerais romanos. A numeração romana foi utilizada também na numeração de livros nos países europeus até ao século XVIII.

### Numeração Grega

Dos vários sistemas de numeração usados pelos gregos, mencionaremos dois. O mais antigo é conhecido como ático (porque os símbolos ocorrem com frequência em inscrições atenienses) ou herodiânico (devido ao nome do escritor que o descreveu no século II d.C.) e era usado já no ano 600 a.C. Neste sistema, I era usado para 1, Γ era usado para 5, Δ para 10, H para 100, X para 1000 e M para 10000. Os últimos cinco símbolos são simplesmente as letras iniciais das palavras-número gregas correspondentes, formas que se preservaram no português nos prefixos “penta”, “deca”, “hecto” e “quilo” e na palavra “miríade”. Este sistema usava o princípio aditivo, com qualquer número representado pelo grupo mínimo de símbolos cujos valores somassem o do número.

Algumas fusões foram efetuadas através de combinação de símbolos.

Ϟ	Ϛ	ΜϞΔΓΠ
50	500	10 517

Por volta de 400 e 200 a.C., os gregos utilizavam 27 letras para representar os números, era o sistema jônico aditivo. Mais precisamente era usado um sistema que consistia na separação dos números em grupos de nove elementos, que eram simbolizados por letras: as nove letras iniciais representavam os números de 1 a 9; as nove letras seguintes representavam as dezenas de 10 a 90 e os nove últimos símbolos representavam as centenas de 100 a 900. Assim, temos a seguinte tabela:

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ϛ	Ζ	Η	Θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
Ρ	Ϛ	Τ	Υ	Ϙ	Χ	Ψ	Ω	Μ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Alguns símbolos (isto é, letras) mudaram sua forma com o tempo; os símbolos relacionados com os números 6, 90 e 900 foram abandonados no alfabeto grego de 24 letras, mas permaneceram em uso (com aparências que evoluíram com o tempo) na representação de números.

É interessante observar que aqui também a ordem dos símbolos não altera o valor do número. Para representar 1000, por exemplo, os gregos de então utilizavam um sinal à esquerda do símbolo empregado para representar 1, ou seja,  $1000 = 'A$  e  $3000 = 'Γ$ . Vários métodos foram inventados para distinguir palavras de numerais, sendo os mais comuns um acento ao fim do sinal do número ou um traço sobre ele.

### Síntese

Neste capítulo vimos como os babilônios tinham seu próprio processo de representação das quantidades. Eles usavam símbolos para representar quantidades de dez em dez e de sessenta em sessenta (base sexagesimal). As quantidades eram diferenciadas pelas posições que os símbolos eram colocados. Apesar de parecer um sistema avançado, era fácil confundir a representação de números, e, além disto, eles não tinham como fazer a representação do número zero. Os sistemas de numeração romano e grego utilizavam letras para representar as quantidades. Muitas formas de fazer com que se distinguíssem os numerais das palavras foram desenvolvidos sendo o mais comum deles a colocação de acentos ou traços sobre a representação.

### Questões

- 1 – Até hoje em nossas aulas mencionamos o sistema de numeração romano. Para você, qual a maior dificuldade em trabalhar com este sistema de numeração?
- 2 – Leia sobre os sistemas de numeração Chinesa e Maia.

Neste capítulo, ainda estamos estudando um pouco dos sistemas de numeração antigos, mas, agora, estamos interessados em saber como o sistema de numeração moderno (decimal posicional) e os algarismos indo-arábicos se estabeleceram na Europa ocidental - de onde nós, brasileiros, herdamos o nosso sistema. Veremos um pouco da numeração hindu, o nascimento dos algarismos arábicos, como estes foram introduzidos na Europa e discutiremos um pouco o que aconteceu na disputa dos abacistas versus algoristas.

- Numeração hindu
- O nascimento dos algarismos arábicos
- Introdução dos algarismos (hindu) arábicos na Europa
- Abacistas versus algoristas
- Entendendo os sistemas de numeração posicional

### Numeração Hindu

A que povo se deve atribuir descobertas tão importantes como as do fogo, da roda, da máquina a vapor – a da numeração moderna?

Durante muito tempo se delegou aos gregos tal desenvolvimento. Longe disto, foi no norte da Índia, por volta do século V da era cristã, que nasceu o ancestral de nosso sistema moderno e foram estabelecidas as bases do cálculo escrito tal como é praticado hoje em dia.

Os mais antigos espécimes dos numerais utilizados pelos indianos foram encontrados em pilares erguidos na Índia por volta de 250 a.C. Entretanto, nesses antigos escritos ainda não existe um símbolo para o zero e a notação posicional tampouco é empregada.

Eles usavam um sistema de numeração com nove símbolos representando os números de 1 a 9 e nomes para indicar cada potência de 10. Por exemplo, escreviam 3 *sata*, 2 *dasan*, 7 para representar o número 327 e escreviam 1 *sata*, 6 para representar 106. A data exata da introdução na Índia da notação posicional e de um símbolo para o zero não é conhecida, mas

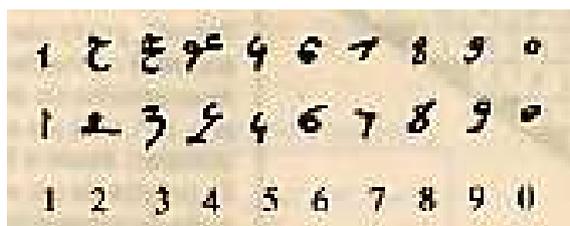
deve ter sido anterior a 800 d.C., pois o matemático persa Al-Khowarizmi (~780–850) descreve num livro escrito em 825 d.C. um sistema hindu assim complementado.

### O nascimento dos algarismos arábicos

Como o império arábico-muçulmano se desagregou muito cedo, no século IX o norte da África e a Espanha já não faziam mais parte do califado de Bagdá. Mas assim mesmo as relações entre as diferentes regiões ocupadas pelos povos de língua árabe não foram rompidas, sobretudo por causa das peregrinações regulares a Meca, do intercâmbio comercial, das guerras, das migrações de populações e das idas e vindas de inúmeros viajantes individuais.

Uma vez conhecida pelos árabes, a aritmética hindu — graças às múltiplas relações desses povos — ganhou também rapidamente todos os “países irmãos” do Magreb e da Espanha. Até então, os calculadores árabes ocidentais haviam se servido de métodos arcaicos. Mas a partir da metade do século IX eles também se tornaram especialistas em “cálculo na areia” e passaram a manejar números elevados com mais facilidade ainda, na medida em que os algarismos e métodos de origem hindu facilitavam a prática de todas as operações aritméticas.

Como no império dos califas, estes algarismos tiveram no início uma forma bastante próxima da grafia hindu de origem. Mas, com a passagem dos séculos, eles evoluíram e assumiram pouco a pouco, nos países mouros, um aspecto bastante diferente da grafia *hindi* de seus primos do Oriente próximo.



É o que os árabes ocidentais denominaram “algarismos *ghobar*”, palavra que significa “poeira”, por causa da poeira fina com a qual os calculadores costumavam salpicar suas tábuas para traçar os algarismos e efetuar deste modo todo tipo de operações.

Apesar das variações entre os algarismos *hindi* e *ghobar*, percebe-se que a influência hindu ainda é evidente, tanto para uns quanto para outros. Estas diferenças dizem respeito, sem dúvida aos hábitos dos escribas e copistas árabes ocidentais, que desenvolveram um estilo gráfico muito original: a escrita árabe denominada “magrebina”, à qual adaptaram os algarismos de origem indiana.

De qualquer modo, é exatamente esta grafia própria dos árabes ocidentais que atingirá os povos cristãos da Europa medieval a partir da Espanha, antes de dar origem aos algarismos que hoje conhecemos. Como os árabes atingiram nesta época um nível científico e cultural superior aos dos povos ocidentais, estes signos receberam por gerações consecutivas a denominação de “algarismos arábicos”.

### **Introdução dos algarismos (hindu) arábicos na Europa**

Quando se viram diante da numeração e dos métodos de cálculo vindos da Índia, os árabes souberam apreciar suas vantagens, reconhecer sua superioridade e adotá-los. Ao contrário, os cristãos da Europa ficaram tão agarrados a seus sistemas arcaicos e tão reticentes diante da novidade que foi preciso esperar durante séculos até que o triunfo do “algoritmo”, como era então denominado o cálculo escrito, fosse definitivo e total.

Da queda do Império Romano até o final da Idade Média a “instrução” na Europa foi muito rudimentar. Os raros privilegiados que recebiam algum ensino aprendiam inicialmente a ler e escrever. Depois aprendiam a gramática, a dialética, a retórica e às vezes a teoria musical. Em seguida recebiam aulas muito sumárias de astronomia e geometria. Ao mesmo tempo, lhes ensinavam a contar nos dedos e a escrever e ler os algarismos romanos. Mas não aprendiam mais nada, já que a iniciação à arte do cálculo não chegava a fazer parte do programa.

É preciso notar que a prática das operações aritméticas, mesmo as mais elementares não estava nessa época ao alcance de qualquer um. Era o domínio de uma casta muito privilegiada de especialistas, que através dos longos e aborrecidos estudos tinham chegado ao uso misterioso e muito complicado dos velhos ábacos romanos. O grande respeito votado aos calculadores nesta época demonstra a que ponto as técnicas operatórias eram de fato difíceis.

Nesta época, a Itália se encontrava em contato com os árabes e bizantinos e suas escolas tinham rapidamente se especializado em operações complexas, enquanto as universidades francesas e alemãs só se ocupavam, ainda nos séculos XIV e XV, das operações ordinárias. Também, nas administrações européias esta situação permaneceu substancialmente a mesma por períodos consecutivos através da baixa Idade Média e Renascimento, até os séculos XVII e XVIII. No entanto, bem antes da época das Cruzadas já estavam à disposição dos ocidentais as imensas vantagens do cálculo à maneira hindu, que os árabes trouxeram até as fronteiras da Europa a partir do século IX.

Foi preciso esperar o final das Cruzadas, seguido por um abandono das formas precedentes e por um retorno às grafias de origem, para uma estabilização progressiva dos algarismos denominados arábicos.

A partir dos séculos XIII e XIV eles adquiriram a aparência definitiva que hoje conhecemos. Quando aconteceu a invenção da imprensa, em 1440, o próprio Gutenberg não fez nenhuma modificação substancial, limitando-se esta descoberta a fixar a forma desses números de acordo com protótipos bastante determinados e definitivamente adotados...

(por volta de 1524) temos a segunda forma dos algarismos europeus.

Digitos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Século XIII	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Século XIV	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Século XV	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Forma usada em 1524	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

De 1095 a 1270, aproximadamente, os poderosos príncipes e cavaleiros cristãos tentaram impor pela espada sua tradição e religião aos infiéis do Oriente. Graças aos inúmeros intercâmbios com a cultura muçulmana, que estas guerras introduziram pelo poder dos fatos, parte do clero das Cruzadas aprendeu o cálculo ao modo de al-Khowarizmi, desenhando os números na areia sem recorrer às colunas do ábaco. Surgiram, assim, os primeiros “algoristas” europeus. Mas, contrariamente aos “abacistas”, estes foram obrigados a adotar o zero e as técnicas do cálculo escrito de origem hindu.

### Abacistas versus algoristas

A partir do século XI, a atividade dos tradutores e dos compiladores de obras árabes, gregas ou hindus floresceu na Espanha. Os contatos culturais entre os dois mundos passaram a ser cada vez mais freqüentes. Lenta e irremediavelmente, este período (séculos XII-XIII) trouxe ao conhecimento da Europa as obras de Euclides, Ptolomeu, Aristóteles, al-Khowarizmi, al-Biruni e de muitos outros.

As novas técnicas foram, assim, difundidas por toda Europa. Este movimento foi acentuado no início do século XIII, graças à influência determinante de um grande matemático italiano: Leonardo de Pisa, conhecido como *Fibonacci*, que visitou a África muçulmana e

conheceu o Oriente Próximo. Foi ele que encontrou os mestres árabes, que lhe explicaram a fundo seu sistema numérico, as regras do cálculo algébrico e os princípios fundamentais da geometria. Iniciado nesta ciência, ele redigiu em 1202 um admirável tratado que viria a se transformar no breviário de todos os defensores do “algorismo”, contribuindo em grande parte também para a difusão e o desenvolvimento da álgebra.

Tratado que explica todas as regras do cálculo por algarismos na areia, o qual seu autor curiosamente denominou *Liber abaci* (“Tratado do ábaco”), com certeza para evitar a ira daqueles que detinham então o monopólio do domínio numérico e que preconizavam antes de tudo o cálculo no ábaco de fichas.

Em todo o caso, a partir desse momento os entusiastas do cálculo moderno se tornaram cada vez mais numerosos. Era o início do movimento de democratização da matemática na Europa. No entanto, a resistência às novas técnicas ainda era muito forte, os calculadores que praticavam as operações no ábaco queriam conservar para si os segredos dessa arte: preocupados em preservar seu monopólio, vendo seu ganha-pão ameaçado, não queriam ouvir falar desses métodos revolucionários que colocavam as operações ao alcance de todos.

Mas havia também uma razão de ordem ideológica para a resistência à numeração indo-árabe. Desde o renascimento do saber na Europa, a Igreja assumiu de fato o controle da ciência e da filosofia, exigindo que sua evolução se submetesse estritamente à fé absoluta em seus dogmas e que seu estudo se harmonizasse inteiramente com a teologia. Em vez de liberar o espírito curioso, este saber o aprisionou por muitos séculos e está na origem de inúmeras tragédias. Do mesmo modo, determinadas autoridades eclesiásticas espalharam o boato de que, sendo tão fácil e tão engenhoso, o cálculo ao modo árabe devia ter algo de mágico ou até de demoníaco: “tinha que ser coisa do demônio!”

Quando o zero entrou no Ocidente (o que se deu no século XII), várias denominações lhe foram atribuídas, todas elas transcrições mais ou menos latinizadas da palavra *sifr* (“o vazio”), que os árabes tinham atribuído ao *sunya* de origem hindu. No seu *Liber abaci*, Leonardo de Pisa (1170-1250, aproximadamente) lhe deu o nome *zephirum*, que será usado até o século XV. Depois de algumas modificações, esta palavra chegou ao *zefiro* italiano, que veio dar na nossa palavra *zero* a partir de 1491.

Na época da baixa Idade Média existe uma verdadeira recusa eclesiástica e um endurecimento por parte das castas de calculadores profissionais, recusa que será mantida em vários lugares até o século XV. Na verdade, parece que a Igreja não pretendia favorecer uma

democratização do cálculo, que ocasionaria seguramente a perda de seu monopólio em matéria de ensino e, em conseqüência, a perda de poder. Ela preferia que o cálculo continuasse sob alçada exclusiva dos especialistas, que pertenciam quase todos ao clero. Desse modo, os algarismos arábicos ainda ficam proibidos por algum tempo. Os amadores do cálculo moderno são obrigados a usá-los escondidos, como se fosse um código secreto.

A querela entre “abacistas” (defensores dos números romanos e do cálculo em ábaco de fichas) e os “algoristas” (defensores do cálculo por algarismos de origem hindu) durou vários séculos. Mesmo após a vitória dos novos métodos, o uso do ábaco ainda permaneceu. No século XVIII, ele ainda era ensinado, e por prudência as pessoas ainda verificavam todos os cálculos feitos por escrito, refazendo-os no ábaco (de fichas). Foi preciso a Revolução Francesa para resolver a questão e para tornar claro que o “o cálculo por meio dos algarismos tem sobre o cálculo por meio de fichas na tábua de contar as mesmas vantagens que um pedestre livre e sem carga tem sobre um pedestre muito carregado”. Pois foi por causa do peso que o uso do ábaco foi abolido das escolas e administrações.

A partir de então, o cálculo e a ciência moderna puderam desenvolver-se sem entraves. Eles acabavam de abater para sempre seu temível e resistente inimigo...

### **Entendendo os sistemas de numeração posicional**

Atualmente, quase todos os povos do mundo usam o mesmo sistema de numeração, o hindu-arábico (ou indo-arábico), e aproximadamente os mesmos algoritmos para efetuar as operações básicas da aritmética. Este sistema é *decimal posicional*. Ele é decimal, pois faz uso de dez símbolos (chamados *algarismos*): nove para representar os números de um a nove e outro para representar posições vazias ou o número zero. Usamos os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. É posicional, pois todos os números podem ser expressos por meio desses algarismos, que tem o valor alterado à medida que eles avançam para a esquerda na representação do número: cada mudança para a esquerda multiplica seu valor por dez.

A cada sistema de numeração posicional está associado um conjunto de símbolos (algarismos), a partir dos quais escrevemos todos os outros números. Chamamos de *base do sistema* à quantidade destes símbolos. Por exemplo, os babilônios usavam um sistema sexagesimal (isto é, de base 60), os maias usavam um sistema *vigesimal* (de base 20) e hoje utilizamos o sistema decimal, ou seja, de base 10.

A razão de utilizarmos base 10 é convencional e, provavelmente, é consequência do fato de quase todos os povos terem usado os dedos das mãos para contar. Temos, então que no nosso sistema todo número pode ser representado por uma seqüência:

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0,$$

Em que cada algarismo  $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . O que cada algarismo representa depende de sua posição nessa seqüência, de acordo com a seguinte regra: cada vez que deslocamos uma casa para a esquerda na seqüência anterior, o valor do algarismo fica multiplicado por 10.

Por exemplo, para representar o número de dias do ano na base 10, o nosso primeiro passo consiste em formar grupos de dez dias, obtendo o seguinte diagrama, em que cada “+” representa um dia e cada “0” indica um grupo de dez dias:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & + & + & + \\ + \end{array}$$

Como o número de grupos de dez dias é superior a nove, o nosso próximo passo será repetir o processo anterior, formando novamente grupos de dez:

$$\begin{array}{|cccccccccc|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & + & + & + \\ + \end{array}$$

Obtemos, assim, três grupos com dez grupos de dez dias, seis grupos de dez dias e cinco dias. Podemos, então, representar o número de dias do ano por 365: o algarismo 3 representa a quantidade de grupos formados por 10 grupos de 10 dias; o algarismo 6 o número de grupos de

10 dias excedentes a estes; e o algarismo 5 representa o número de dias que sobraram quando da divisão em grupos de dez.

Em outras palavras, como o algarismo 6 está deslocado uma casa à esquerda na seqüência 365, seu valor é de 6 vezes 10, e como o algarismo 3 está deslocado duas casa à esquerda, seu valor é de 3 vezes 10 vezes 10. Isto significa que

$$365 = 3 \cdot 10 \cdot 10 + 6 \cdot 10 + 5 = 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 5$$

Generalizando: se o número de elementos de um conjunto é representado por uma seqüência  $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ , esse conjunto tem  $a_n$  grupos de  $10^n$  elementos, mais  $a_{n-1}$  grupos de  $10^{n-1}$  e assim por diante, até  $a_1$  grupos de 10 mais  $a_0$  elementos; ou seja, ele tem

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \quad \text{elementos.}$$

### Síntese

Vimos neste capítulo que os hindus foram os primeiros povos a utilizar algarismos para representar quantidades, e palavras para representar as posições numéricas. Os algarismos que originaram os que conhecemos hoje foram por muito tempo considerados algarismos arábicos pelo fato dos árabes terem se desenvolvido culturalmente e cientificamente mais que os ocidentais. Vimos também a disputa entre os abacistas (defendiam os cálculos com numerais romanos e ábaco de fichas) e os algoristas (defendiam o uso dos algarismos arábicos) e como a religião influenciava nas atitudes naquela época. A abolição do ábaco das escolas se deu devido ao fato de tentar liberar a carga de peso que os estudantes tinham que carregar todos os dias. Foi feita também uma abordagem sobre os sistemas de numerações posicionais.

### Questões

- 1 – Você acha importante a apresentação do ábaco em sua aula? Porque?
- 2 – Se hoje não tivéssemos o sistema de numeração decimal, qual dos sistemas apresentados seria de mais fácil trabalho na sua opinião?
- 3 – Leia sobre sistemas de numeração de base diferente de dez.
- 4 – Leia sobre o uso (criação) de um símbolo para Zero e faça uma síntese histórica.

Agora que já conhecemos como os números e os sistemas numéricos de diversos povos surgiram e se estabeleceram, queremos entender a natureza dos diversos “tipos” de número e suas propriedades, tentando responder como surgiram, se estabeleceram e o que os diferencia. Neste capítulo, veremos os números naturais, os números negativos, números racionais e os números irracionais.

- Números naturais
- Números inteiros
- Números racionais
- Números irracionais

### Introdução

Na história, os números e os conjuntos numéricos não apareceram exatamente do modo como estão descritos nos livros didáticos. Os números naturais e racionais positivos são os tipos de números mais antigos e os inteiros negativos são os mais “jovens” por assim dizer. Através dos tempos, várias simbologias foram utilizadas para descrever números, incidindo, atualmente, na notação indo-arábica em quase todo mundo.

Imagina-se que depois de ter utilizado os números para contar, medir, calcular, o homem começou a especular sobre a *natureza e propriedades* dos números. Desta curiosidade nasceu a Teoria dos Números, um dos ramos mais importantes da matemática.

### Números naturais

A necessidade de contar objetos levou ao aparecimento do conceito de número Natural. Todas as nações que desenvolveram formas de escrita introduziram o conceito de número Natural e desenvolveram um sistema de contagem. Quando estudamos os sistemas antigos de numeração e as operações que estes permitiam realizar com os números, estávamos estudando os números naturais.

Modernamente, o conjunto dos números naturais é dado por  $\{1, 2, 3, \dots\}$ , representado quase sempre pelo símbolo  $\mathbb{N}$ . Historicamente, imagina-se que tenha surgido naturalmente da necessidade de contagem, que se realiza por meio da operação de “fazer corresponder”. A idéia de “correspondência” é uma das idéias básicas de toda a matemática. Contar significa estabelecer uma correspondência, um para um, entre cada item de uma coleção qualquer de objetos e a sucessão de números naturais.

Na sucessão dos números naturais podemos passar de um número para o seguinte juntando-lhe uma unidade. Assim, passamos do 1 para o 2, do 2 para o 3, e, dessa maneira, podemos ir tão longe quanto quisermos, isto é, dado um número  $n$  qualquer, por maior que ele seja, podemos sempre obter um número  $n + 1$ , maior do que ele. Este fato exprime-se por qualquer dos seguintes enunciados:

- (a) a sucessão dos naturais é ilimitada (não há um número natural maior que todos os outros).
- (b) dado um número natural, por maior que ele seja, existe sempre outro maior do que ele.
- (c) O conjunto dos números naturais tem infinitos elementos.

Uma das deficiências apresentadas pelo conjunto dos números naturais é a impossibilidade da subtração entre certos seus elementos. Suponhamos que um móvel, partindo de um ponto P sobre uma linha reta e movendo-se sempre com uma velocidade de 1 m/s, siga para a direita durante 5 segundos e retroceda, com a mesma velocidade, durante 8 segundos. Ao fim dos 13 segundos, ele estará numa posição a 3 metros a esquerda do ponto P. Este resultado é impossível de obter no conjunto dos números naturais, pois não existe nenhum número natural que represente o resultado da operação  $5 - 8$ .

### **Numeri absurdi: números negativos**

Devido à deficiência dos naturais em resolver operações do tipo  $a - b$  com  $b > a$  é que foi ampliado o conjunto dos naturais formando o conjunto dos números inteiros  $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ , denotado pelo símbolo  $\mathbb{Z}$  (da palavra alemã *Zahl*, que significa número).

Na Índia, a necessidade de realizar com maior rapidez os cálculos da astronomia fez com que os sábios hindus se preocupassem em idealizar formas de representação numérica que simplificassem esses cálculos. Os matemáticos hindus se mostraram virtuosos no cálculo aritmético e manipulações algébricas que permitiram conceber um novo tipo de símbolo para representar dívidas que posteriormente o Ocidente chamaria de negativo.

A primeira vez que explicitamente as regras que regem a aritmética com os números negativos apareceram foi na obra de Brahmagupta, que data do ano 628 d.C.; esse matemático indiano não só utilizou os negativos em seus cálculos como os considerou entidades separadas e os dotou de uma aritmética concordante com a dos naturais. Muitos séculos se passaram para que o interesse pelos números negativos fosse retomado.

Alguns historiadores escreveram que foram problemas com dinheiro que interpretaram o número negativo como perda. *Negativo* — esta palavra pode ter vindo desta época que eram os valores *negados* quando se obtinha raízes negativas de uma equação.

Diofanto (século III) encontrou muitas vezes com os números negativos. Eles apareciam constantemente em cálculos intermediários em muitos problemas do seu “Aritmetika”. No entanto, havia certos problemas para o qual as soluções eram valores inteiros negativos como, por exemplo,  $4 = 4x + 20$ . Nestas situações Diofanto limitava-se a classificar o problema de absurdo. Nos séculos XVI e XVII, muitos matemáticos europeus não apreciavam os números negativos e, se esses números apareciam nos seus cálculos, eles consideravam-nos falsos ou impossíveis.

Exemplo deste fato seria Michael Stifel (1487–1567) que se recusou a admitir números negativos como raízes de uma equação, chamando-lhes de “numeri absurdi”. Cardano usou os números negativos embora os tivesse chamado de “numeri ficti”. A situação mudou (a partir do século XVIII) quando foi descoberta uma interpretação geométrica dos números positivos e negativos como sendo segmentos de direções opostas.

Foi no Renascimento que apareceu um número negativo ligado a uma equação algébrica, na obra do matemático francês Nicolás Chuquet (1445–1500). Trata-se de seu “Triparty”, escrita em 1484, que contém uma expressão que poderíamos escrever hoje como  $4x = -2$ . Na época, ainda não eram usados os símbolos “ $x$ ”, “ $=$ ”, “ $-$ ”.

Simon Stevin (1548–1620) aceita os números negativos como raízes e coeficientes de equações. Admite a adição de  $x + (-y)$  em lugar de considerá-la como subtração de  $y$  a  $x$ . Também tratou de justificar geometricamente a regra de sinais fazendo uso da identidade algébrica:  $(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd$ .

O matemático Albert Girard (1590–1639) foi o primeiro a reconhecer, explicitamente, a utilidade algébrica de admitir as raízes negativas e imaginárias como soluções formais das equações, porque ele permitia uma regra geral de resolução na construção de equações através de suas raízes.

Na Época Moderna, mais precisamente no final do século XVII, surgiu a obra de François Viète. Esta obra, mais tarde ampliada, admitiu que as expressões literais pudessem tomar valores negativos. No entanto, a Álgebra não teria conhecido tal avanço se esta generalização do número não tivesse sido acompanhada por uma descoberta igualmente fundamental, realizada por Viète (1591) e aperfeiçoada por René Descartes (1637): *a notação simbólica literal*.

A legitimidade dos números negativos deu-se definitivamente por Hermann Hankel (1839– 1873) em sua obra “Teoria do Sistema dos números Complexos”, publicada em 1867. Hankel formulou o *princípio de permanência e das leis formais* que estabelece um critério geral de algumas aplicações do conceito de número.

### Números racionais

As frações foram conhecidas na antiguidade, mas, na falta de numerações bem constituídas, suas notações foram, durante muito tempo, mal fixadas e inadaptadas às aplicações práticas. Não foram consideradas desde sua origem como números nem se concebia a noção de fração geral  $\frac{m}{n}$  como  $m$  vezes o inverso de  $n$ . Os egípcios, por exemplo, só conheciam as frações denominadas “unitárias” (as de numerador igual a 1) e só exprimiam as frações ordinárias através de somas de frações desse tipo (por exemplo:  $\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ ).

Com o passar do tempo, ficou claro que as frações se submetiam às mesmas regras que os inteiros e que eram, portanto, assimiláveis aos números (sendo um inteiro uma fração de denominador igual a 1). Graças a esta extensão, os números, que outrora serviam apenas para recenseamento, tornaram-se “marcas” adaptadas a inúmeros usos. Daí em diante, não só foi possível comparar duas grandezas “por estimação”, mas também dividi-las em parcelas ou pelo menos supô-las divididas em partes iguais de uma grandeza da mesma espécie escolhida como padrão. Mas, apesar desse progresso, por causa de suas notações imperfeitas os antigos não foram capazes nem de unificar a notação de fração, nem de construir um sistema coerente para suas unidades de medida.

Assim como os números naturais surgiram da necessidade de contar, os números racionais, que são expressos pela razão entre dois inteiros, surgiram da necessidade de medir. Medir é comparar. Para isso é necessário estabelecer um padrão de comparação para todas as grandezas da mesma espécie, por exemplo, 1 cm para comprimentos, 1 segundo para tempo, etc. Este padrão estabelece uma unidade de medida da grandeza (comprimentos, áreas, tempo,

etc). Medir, portanto, é determinar quantas vezes a unidade estabelecida cabe, por exemplo, no comprimento que se quer medir. O resultado desta comparação, que é a medida da grandeza em relação à unidade considerada, deve ser expresso por um número.

Na figura abaixo, se considerarmos o segmento CD como a unidade de medida, teremos que o segmento AB mede 4 unidades. Tomando-se CE como unidade, a medida deste mesmo segmento será de 8 unidades.



Só em casos muito especiais a grandeza a ser medida contém um número inteiro de vezes a unidade de medida. O caso mais frequente é o caso da figura abaixo onde, tomando-se a medida  $u$  do segmento CD como unidade, a medida de AB é maior que  $3u$  e menor que  $4u$



É claro que neste exemplo, podemos subdividir a unidade em partes menores para que cada uma delas caiba um número inteiro de vezes na grandeza a medir, mas o que se pode dizer da medida de AB em relação à CD? a dificuldade surge porque, neste caso, a medida  $m$  de AB não é divisível pela medida  $u$  de CD.

No conjunto dos números inteiros existe a impossibilidade da divisão, isto é, neste conjunto nem sempre é possível expressar o resultado de uma medição ou de uma razão. Para resolver esse problema criou-se um novo conjunto de números, chamado conjunto dos números racionais e denotado pelo símbolo  $Q$  (de quociente). Um número racional  $p$  é, portanto, aquele que pode ser escrito na forma  $p = \frac{m}{n}$ , onde  $m$  e  $n$  são inteiros e  $n \neq 0$ . (Lembre-se que a divisão por zero não tem sentido, pois não existe nenhum número que multiplicado por zero seja diferente de 0 e, portanto, expressões do tipo  $\frac{3}{0}$  não estão definidas e expressões do tipo  $\frac{0}{0}$  são indeterminadas).

Os babilônios, através de sua numeração de posição com base sessenta, foram os primeiros a atribuir às frações uma notação racional, convertendo-as em frações sexagesimais

(cujo denominador é igual a uma potência de 60) e exprimindo-as mais ou menos como se exprimem as frações de horas em minutos e segundos:

$$33 \text{ min } 45 \text{ s} = \frac{33}{60} \text{ h} + \frac{45}{3600} \text{ h}.$$

Mas os babilônios não chegaram ao uso da “vírgula” para diferenciar os inteiros das frações sexagesimais da unidade. A expressão (33;45) tanto podia significar 33h 45 min quanto 0h 33 min 45s. O entendimento ficava estabelecido pelo contexto.

Depois deles, os gregos tentaram atribuir uma notação geral às frações ordinárias, mas sua numeração alfabética complicou muito simbolização, o que os levou a desistir de adotar a notação sexagesimal de origem babilônica em seus cálculos com frações.

A notação moderna das frações ordinárias se deve aos hindus, que, devido a sua numeração decimal posicional chegaram a simbolizar frações mais ou menos como fazemos hoje. Esta notação foi depois adotada e aperfeiçoada pelos árabes, que inventaram a famosa barra horizontal.

Em seguida, graças à descoberta das frações “decimais” (aquelas cujo denominador é uma potência de 10) foi pouco a pouco transparecendo o interesse em prolongar a numeração decimal de posição no outro sentido, isto é, em termos modernos, na representação de números “depois da vírgula”. O que permitiu a notação sem nenhuma dificuldade de todas as frações, além de mostrar nitidamente os inteiros como frações particulares: aquelas cuja representação não comporta nenhum algarismo depois da vírgula.

Na Europa, foi o belga Simon Stevin que, em 1582, deu o passo decisivo rumo a nossa notação atual, ao anotar o número 679,567 do seguinte modo:

$$679(0) 5(1) 6(2) 7(3)$$

(simbolizando deste modo: 679 unidades inteiras, 5 “unidades decimais de primeira ordem” ou décimos, 6 “unidades decimais de segunda ordem” ou centésimos e 7 “unidades decimais de terceira ordem” ou milésimos).

Dez anos depois, o suíço Jost Bürgi simplificou a notação ao eliminar a menção inútil da ordem das frações decimais consecutivas, colocando no alto das unidades simples o símbolo °:

$$679^{\circ}567.$$

No mesmo ano, o italiano Magini substituiu esta bolinha por um ponto colocado entre o algarismo das unidades e o das dezenas. Foi assim que nasceu a notação usada até os dias atuais nos países anglo-saxões: 679.567.

Quanto à nossa vírgula, foi o neerlandês Wilbord Snellius que a inventou, no início do século XVII: 679,567.

As conseqüências desta racionalização da noção e da representação das frações foram incalculáveis em todos os domínios, a começar pela invenção do sistema métrico. Sistema metrológico fundado sobre a base dez, coerente e perfeitamente adaptado ao cálculo numérico. Desenvolvido na Revolução Francesa (1792) em substituição aos velhos sistemas de unidades arbitrárias incoerentes e variáveis.

### Números irracionais

A numeração decimal de posição introduziu também a infinita complexidade do universo dos números, e levou os matemáticos a um avanço prodigioso.

Desde o século VI a.C., os matemáticos gregos, a começar por um certo Pitágoras, já tinham descoberto que a diagonal de um quadrado “não tem medida comum” com o seu lado. De fato, tanto pela medida quanto pelo raciocínio, o comprimento de sua diagonal não corresponde a um número inteiro de metros. Ou seja, uma vez que tal é o seu comprimento matemático, a  $\sqrt{2}$  é um número “incomensurável”. Foi a descoberta do que hoje denominamos “números irracionais”, os que não são nem inteiros nem frações.

Esta descoberta provocou uma grande consternação entre os Pitagóricos, que pensavam até então que “os números regem o Universo”, isto é, os inteiros naturais e suas combinações mais simples, as frações ordinárias positivas. O próprio nome destas grandezas é uma prova desde que foram denominadas “inexprimíveis”.

A categoria dos números irracionais ficou ainda pouco precisa durante séculos por causa das notações imperfeitas de outrora, que não permitiam a representação destes números de um modo coerente, já que eles eram designados por palavras e valores aproximados aparentemente sem nenhuma relação uns com os outros. Como não era possível defini-los corretamente, constatou-se simplesmente a sua existência, sem poder implicá-los num raciocínio geral.

Beneficiados por uma notação numérica muito eficaz e por uma ciência cada vez mais avançada, os matemáticos europeus dos tempos modernos conseguiram ter sucesso onde seus antecessores tinham falhado. Eles descobriram *que estes números eram identificáveis a*

números decimais sem fim, cujos algarismos após a vírgula nunca se reproduzem na mesma ordem.

Alguns exemplos

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097\dots$$

$$\pi = 3,1415926535897932384626433832795\dots$$

(a letra grega “pi” representa a área e também metade do perímetro de um círculo de raio 1)

$$e = 2,7182818284590452353602874713\dots$$

(base do sistema de logaritmos, inventado em 1617 pelo escocês John Napier)

Descoberta fundamental que permitiu uma melhor compreensão desta categoria de números, já que eles têm por característica esta propriedade...

Se o número é irracional a parte decimal não segue um padrão, isto é, não se repete nunca! Com o auxílio de um computador, podemos calcular a representação decimal de  $\sqrt{2}$  e de  $\pi$  com muitas casas decimais para nos convencer deste fato. Embora estes números com suas aproximações vistas em computador com até bilhões de casas decimais sejam convincentes, isto não basta como uma prova matemática. É possível demonstrar logicamente que  $\sqrt{2}$  é irracional e também que os números  $\pi$  e  $e$  são irracionais.

**$\sqrt{2}$  não é um número racional.** Aristóteles (384–322 a.C.), como exemplo de uma demonstração por redução ao absurdo, demonstrou que  $\sqrt{2}$  não é um número racional, isto é, não se pode escrever como uma fração de dois inteiros.

Por absurdo, suponha que existem dois números naturais  $p$  e  $q$ , primos entre si, tais que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ [isto é, suponhamos a fração } \frac{p}{q} \text{ pode ser escrita na forma irredutível]} \text{ e } \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Então,  $p^2 = 2q^2$ , isto implica que  $p^2$  é um número par e, conseqüentemente,  $p$  também é par [porque se fosse ímpar teríamos  $p = 2k + 1$  para algum número natural  $k$  e  $p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$  seria ímpar]. Se  $p$  é um número par, existe um natural  $k$  tal que  $p = 2k$  e assim  $4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2$ . Então  $q$  seria par [orque  $q^2$  é par], o que é absurdo visto que  $p$  e  $q$  são primos entre si.

## Síntese

Neste capítulo vimos a construção histórica dos conjuntos numéricos. Inicialmente, gerado pela necessidade de contar, o conceito de número natural apareceu; mas como não é possível realizar todo tipo de subtração com estes números, este conjunto foi ampliado formando assim os números inteiros. O primeiro registro encontrado sobre estes números datado ano de 628 d.C., na obra de Brahmagupta. As frações foram conhecidas na Antigüidade, mas suas notações eram mal fixadas e inadaptadas. Foram os hindus que mais se aproximaram da notação que usamos hoje. Finalmente, a numeração decimal de posição introduziu a complexidade dos números, chegando assim aos números irracionais.

## Questões

- 1 – Faça uma pesquisa e reflita sobre a construção do conjunto dos números reais.
- 2 – Leia sobre os seguintes tópicos:
  - a) números algébricos e transcendententes.
  - b) O número  $\pi$
  - c) Pitágoras e os números
  - d) A construção dos números reais nos ensinos fundamental e médio.

Neste capítulo veremos como se deu a “construção” da geometria e em que momento da história ela se fez necessária. Veremos também quais os principais matemáticos que participaram da evolução deste ramo da matemática, relacionando suas principais obras e descobertas.

- A geometria primitiva
- Os gregos e a geometria
- Principais matemáticos gregos
- Escola pitagórica

### A geometria primitiva

A origem etimológica da palavra **Geometria**. Do grego *Geo*, que significa terra e *metron* que significa medida, acredita-se que geometria surgiu inicialmente no Egito, sendo descoberta pelos habitantes do vale do Rio Nilo.

De acordo com o historiador Heródoto, do século V a.C., o rei egípcio Sesostri III (1900 a.C.) dividiu as terras no Egito de maneira igual, de forma que todas as famílias que habitassem as terras pagassem os mesmos impostos. Como na região deste rio ocorriam periódicas inundações, parte das terras levava épocas sem ser exploradas e, o imposto cobrado era o mesmo para todas as famílias. Assim, os habitantes deste vale sentiram a necessidade de uma divisão mais justa, de forma que pagassem exatamente pela área de terra explorada. A faixa de terra, rica e fértil, era muito disputada entre os interessados e isto requeria medições muito rigorosas de forma a não prejudicar os habitantes.

Esta necessidade de delimitar a terra levou a noção de figuras geométricas – hoje tidas como elementares – tais como retângulos, quadrados, triângulos e círculos. Outros conceitos geométricos simples, como a noção de vertical, paralelas e perpendiculares, teriam surgido pela construção de moradias e observações das árvores na natureza.

A observação do mundo ao seu redor deve ter levado o homem primitivo à concepção de curvas, superfícies, sólidos, como por exemplo, a associação da forma do círculo com a forma do sol e da lua.

Os mais antigos registros da atividade do homem no campo da geometria são algumas tábulas de argila cozida desenterradas na Mesopotâmia, datando do tempo dos sumérios, por volta do ano 3000 a.C. Existem muitas tábulas cuneiformes babilônicas de períodos posteriores, da época do rei Hamurabi, do rei Nabucodonosor II e das eras persa e selêucida que se seguiram. Exemplos concretos mostram que os egípcios e babilônios já conheciam regras gerais para cálculo de áreas, volumes de prismas e cilindros, o número  $\pi$  como aproximadamente 3, o teorema de Pitágoras entre outras.

Imagina-se que no início o homem só considerava problemas geométricos concretos, que se apresentavam individualmente e entre os quais não era observada nenhuma ligação. Mais tarde, a inteligência humana tornou-se capaz de extrair (a partir de certo número de observações relativas a formas, tamanhos e relações espaciais de objetos físicos específicos) certas propriedades gerais e relações que incluíam as observações anteriores como casos particulares. A geometria surge, então, como um conjunto de receitas práticas e resultados empíricos, alguns corretos, outros aproximados, referentes a tamanhos, distâncias, áreas, volumes e relações entre várias figuras sugeridas por objetos físicos e necessidades específicas.

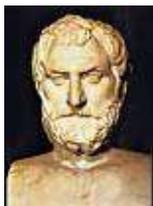
É muito provável que realizações em geometria semelhantes às do Egito e Babilônia antigas tenham ocorrido também na Índia e na China antigas, mas pouco se sabe a respeito delas com algum grau de certeza.

### **Os gregos e a geometria**

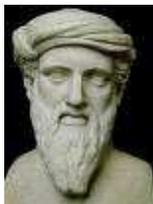
As mudanças econômicas e políticas dos últimos séculos do segundo milênio a.C. fizeram com que o poder do Egito e da Babilônia diminuíssem. Novos povos passaram ao primeiro plano, e os desenvolvimentos posteriores da geometria foram passados aos gregos, que transformaram a matéria em algo muito diferente do conjunto de conclusões empíricas produzido por seus predecessores. Com os gregos, a Geometria deixou de ser puramente empírica e passou ser dedutiva, indutiva e racional.

Dois nomes surgem como balizadores do início da geometria grega:

- Tales de Mileto (em torno do século VI a.C.), foi um digno fundador da chamada “geometria demonstrativa”.



- Pitágoras (aproximadamente 572 a.C.) continuando e desenvolvendo a obra de Tales.



Os três geômetras gregos mais importantes da antiguidade foram Euclides (cerca de 300 a.C.), Arquimedes (287–212 a.C.) e Apolônio (aproximadamente 225 a.C.). Tudo que se fez até hoje em geometria tem sua semente em trabalhos de algum desses três grandes eruditos. O maior templo da Geometria foi a biblioteca de Alexandria, no Egito, fundada em 290 a.C. por Ptolomeu. Euclides, juntamente com Arquimedes, Apolônio e outros estudiosos da época se dedicaram intensamente aos vetustos e novéis pergaminhos e papiros da Biblioteca. Esta, infelizmente vitimou-se pela ganância do povo romano e, mais tarde, pelo fanatismo religioso de mulçumanos e cristãos.

Daremos ênfase agora aos últimos três geômetras citados: Euclides, Arquimedes e Apolônio.

### **Euclides (c. 325 – c. 265 a.C.)**

Não se sabe ao certo o ano e o local do nascimento de Euclides. É muito provável que tenha conhecido os primeiros ensinamentos sobre matemática através dos discípulos de Platão. Sua chegada em Alexandria foi viabilizada por Ptolomeu I, que nesta época era general macedônio favorito de Alexandre. Euclides fundou a escola de matemática na renomada Biblioteca de Alexandria, que se acredita ter conseguido a marca dos 700.000 rolos (entre papiros e pergaminhos).

Sua obra, *Os Elementos*, representou o mais alto grau de desenvolvimento da matemática grega. Neste compêndio de treze volumes foi estruturado e sistematizado todo o conhecimento matemático da época, o que compreendia a matemática egípcia, a mesopotâmica e a matemática grega.

O mérito, entretanto, não estava nos conteúdos apresentados, que já eram conhecidos, mas na metodologia empregada na compilação dos mesmos. Euclides utilizou de maneira rigorosa e continuada a lógica estruturada e desenvolvida por Aristóteles, adequando os

conhecimentos matemáticos de então às exigências da perfeição nas idéias e na forma, que impregnavam a filosofia idealista platônica predominante.

Esta obra atingiu uma celebridade e uma influência tão grande que alguns chegaram a afirmar somente a *Bíblia* a teria suplantado. De fato, a Geometria plana de Euclides influenciou tão decisivamente a cientistas e filósofos ao longo dos últimos vinte séculos, que foi considerada o mais perfeito paradigma da ciência. Tamanha celebridade se deve ao filho da lógica aristotélica, ao método dedutivo ou axiomático empregado por Euclides. Ele fixou dez afirmações primitivas, não demonstradas, pois são consideradas auto-evidentes, derivando destas, com raciocínios lógicos dedutivos, todos os teoremas, isto é, todas as verdades comprováveis da Geometria plana. Desta forma, e isso constitui-se na essência do método partindo-se da verdade e da consistência (não-contradição) das afirmações primitivas, admitia-se a verdade completa e a consistência de toda Geometria. Justamente estes ideais, de verdade completa e absoluta e consistência, aliados ao próprio conhecimento matemático obtido, foram os responsáveis pela grande aceitação e até mitificação da Geometria euclidiana.

Filósofos, como Spinoza (1632-1677) e Kant (1724-1804), assumiram-na como paradigma da ciência ideal e perfeita. A obra *Ethica* de Spinoza tem argumentos em forma de teoremas deduzidos de definições e axiomas, enquanto que Kant colocou a Geometria euclidiana plana como a única verdade absoluta e imutável sobre o espaço físico real.

Segundo Carl B. Boyer, em **História da Matemática** (1998),

A Universidade de Alexandria evidentemente não diferia muito de instituições modernas de cultura superior. Parte dos professores provavelmente se notabilizou na pesquisa, outros eram melhores como administradores e outros ainda eram conhecidos pela sua capacidade de ensinar. Pelos relatos que possuímos, parece que Euclides definitivamente pertencia à última categoria. Nenhuma descoberta nova é atribuída a ele, mas era reconhecido pela sua habilidade ao expor. Essa é a chave do sucesso de sua maior obra – **Os Elementos**.

### **Arquimedes (287 – 212 a.C.)**

Nascido na ilha grega da Sicília, na cidade de Siracusa, Arquimedes quando jovem estudou em Alexandria com os discípulos de Euclides. Não se conformava em estudar a matemática pela matemática, e sim estudá-la como forma de aplicar em resolução de problemas de natureza física. Visando esta aplicação, abandonou os argumentos exclusivamente

geométricos em favor de argumentos analíticos ou algébricos. Seus trabalhos nesta área lhe renderam o título de *Pai da Matemática Aplicada*.

Uma das mais importantes descobertas de Arquimedes é hoje considerada a lei básica da Hidrostática: “Todo corpo mergulhado num fluido recebe um impulso de baixo para cima igual ao peso do volume do fluido deslocado”. Esta lei é conhecida como o princípio de Arquimedes e, segundo o historiador Vitruvius, foi descoberta quando o rei Heron solicitou a Arquimedes uma comprovação de que sua coroa, encomendada a um ourives, era realmente feita de ouro puro. Arquimedes, então, descobriu que se mergulhasse blocos de ouro e de prata, com o mesmo peso da coroa, em recipientes com água, estes deslocariam quantidades de água distintas. A fraude comprovou-se, pois a coroa do rei deslocou água semelhante ao do bloco de prata.

As seguintes obras também se destacam como descobertas de Arquimedes: Sobre a esfera e o cilindro; Medidas do círculo; Sobre conóides e esferóides; Sobre espirais; Sobre equilíbrios planos; Psamites; Quadratura da parábola; Corpos flutuantes; Stomachion; O método. Atribuiu-se também a Arquimedes os primeiros conceitos sobre limites e cálculo diferencial.

#### **Apolônio de Perga (262 – 190 a.C.)**

Sabe-se que Apolônio e Arquimedes eram rivais cordiais. Nascido em Perga, sul da Ásia Menor, muito pouco se sabe sobre sua vida. Acredita-se que Apolônio estudou em Alexandria, e com o apoio de Lísimaco, general de Alexandre, seguiu para Pérgamo onde havia uma biblioteca e uma “Universidade” que seria inferior apenas às de Alexandria.

Os antigos atribuíram a Apolônio o título de **Grande Geômetra**, o que nos faz uma surpresa, pois associamos sempre este símbolo a Euclides. De fato, Euclides tornou-se um símbolo para a geometria pela sua obra *Os Elementos*, enquanto que a maior parte dos trabalhos de Apolônio desapareceu.

Deve-se ao Pappus de Alexandria (séc. IV d.C.) as informações sobre estas obras perdidas, pois fez uma breve descrição de toda a sua produção matemática. Infere-se que estas obras continham uma matemática bastante avançada e informações sobre o que hoje conhecemos como Geometria Analítica.

O tratado **As Cônicas** suplantou todas as obras existentes na Antigüidade, e era composto de 8 livros dos quais 7 sobreviveram. Sabe-se que foi Apolônio quem introduziu os

nomes *elipse* e *hipérbole*, quando as cônicas ainda não possuíam terminologia apropriada. O nome *parábola* deve-se provavelmente a Arquimedes.

Segundo Carl B. Boyer, em **História da Matemática** (1998):

Foi a Matemática Pura de Apolônio que permitiu, cerca de 1800 anos mais tarde, os **Principia** de Newton; este, por sua vez, deu aos cientistas de hoje condições para que a viagem de ida e volta à Lua fosse possível.

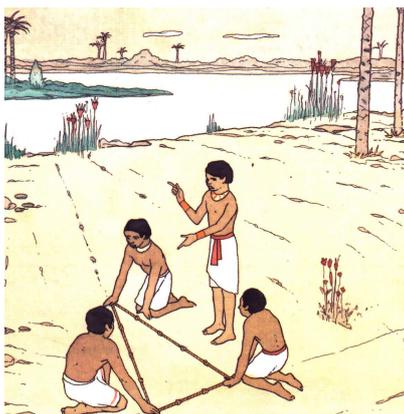
Enfim, segundo Leibniz:

Quem entende Arquimedes e Apolônio, admirará menos as realizações dos homens mais célebres de épocas posteriores.

### A Escola Pitagórica

Fundada por um matemático grego chamado Pitágoras, a escola pitagórica foi reconhecida como a “primeira Universidade do mundo”. Todos os resultados matemáticos da época e que eram obtidos por estudiosos desta escola foram creditados a Pitágoras, mesmo não participando da descoberta de muitos deles. Pitágoras nasceu na ilha de Samos, provavelmente em 570 a.C.

Seu resultado mais famoso, **Teorema de Pitágoras**, era conhecido pelos orientais. Deve-se a Pitágoras a demonstração sistemática do teorema. De maneira geral, a Escola Pitagórica desenvolveu o primeiro estudo axiomático da geometria.



Esta escola teve suas atividades envoltas por muitas lendas. Era uma entidade parcialmente secreta, onde as centenas de alunos formavam uma irmandade religiosa e intelectual com algumas práticas de rituais de purificação, proibição da ingestão de vinho e carne e purificação da mente pelo estudo da Geometria, Aritmética, Música e Astronomia.

Pitágoras morreu no exílio em Tarentium na Itália. Os seguintes resultados são geralmente atribuídos a esta escola:

- O teorema de Pitágoras;
- A soma dos ângulos de um triângulo é igual à soma de dois ângulos retos;
- O descobrimento de números irracionais;
- Métodos numéricos para aproximar a raiz quadrada de um número;
- As figuras cósmicas - os cinco poliedros regulares;
- A construção do pentágono regular;
- A construção das cônicas;
- Inúmeros resultados em álgebra geométrica, astronomia e música.

### Síntese

Neste capítulo vimos que o início da geometria se deu no Egito, por conta de necessária re-divisão das terras, após as constantes enchentes do rio Nilo. Os primeiros nomes a quem relacionamos o estudo da geometria são Tales de Mileto e Pitágoras. Os temas que estudamos hoje em geometria são baseados nos estudos de outros três geômetras: Euclides, Arquimedes e Apolônio. Vimos um histórico das suas vidas e das suas principais obras.

### Questões

- 1 – A obra de Euclides foi baseada em axiomas e postulados. Qual o conceito de um axioma? Qual a diferença básica entre um axioma e um postulado?
- 2 – Faça uma pesquisa e descreva quais os cinco axiomas e os cinco postulados que Euclides apresentou em sua obra *Os Elementos*.
- 3 – Existe hoje, uma geometria denominada Geometria não-euclidiana. Esta geometria difere da chamada Geometria Euclidiana pelo fato de não considerar verdadeiro todos os postulados de Euclides. Qual o postulado não considerado pela Geometria não-euclidiana?

Neste capítulo veremos um histórico da Geometria Espacial e da Geometria Analítica. Serão apresentados dois importantes documentos antigos, nos quais são encontrados diversos problemas relacionados a estas duas geometrias. Veremos também a associação de elementos geométricos (poliedros) com elementos da natureza.

- O papiro Rhind
- O papiro Moscow
- A geometria espacial
- A geometria analítica

### Introdução

Sabemos que a Matemática é a mais antiga das ciências e que a sua origem esconde-se nas areias das antigas civilizações egípcias. O estudo da geometria espacial pelos povos da Mesopotâmia (região situada no Oriente Médio, no vale dos rios Tigre e Eufrates) é datado desde, aproximadamente, dois mil anos antes de Cristo e todo o conhecimento que temos hoje se baseia em documentos que denominamos papiros. Dentre os principais podemos citar o “papiro de Rhind” e o “papiro de Moscou”.

### Papiro de Rhind



Este documento, considerado um dos mais importantes quando nos referimos aos conhecimentos matemáticos egípcios, traz instruções de como conhecer todas as coisas secretas. Não se sabe ao certo, quais as intenções deste papiro, se tinham pretensões pedagógicas ou se eram simples anotações. Basicamente este papiro traz informações sobre trigonometria, aritmética, equações, progressões, cálculo de volumes e áreas.

### Papiro de Moscou



O papiro de Moscou tem o seu escritor desconhecido. Sabe-se apenas que sua linguagem é o hierático e que data de mais ou menos 1850 a.C.. Com aproximadamente 8 centímetros de largura e 5 metros de comprimento contém 25 problemas, que devido ao seu grau de degradação, não puderam ser todos interpretados. A imagem acima mostra um pedaço do papiro em que está relatado o seu 14º problema, que soluciona o volume de uma pirâmide que possui 6 cúbitos de altura, 4 cúbitos de base por 2 cúbitos no topo.

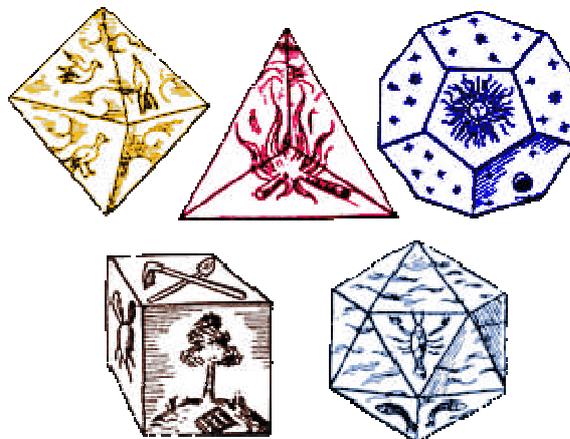
### A Geometria Espacial

Alguns filósofos gregos, em particular Pitágoras e Platão, associavam o estudo da Geometria Espacial ao estudo da metafísica e da religião, devido às formas abstratas que os sólidos apresentam.

Pitágoras trabalhou em especial com o tetraedro, o cubo, o dodecaedro e a esfera. A harmonia das esferas era para os pitagóricos a origem de tudo. Já para Platão, a explicação de tudo o que existia, estava nos cinco sólidos perfeitos: o cubo, o tetraedro, o octaedro, o icosaedro e o dodecaedro. Estes sólidos estavam relacionados com os elementos terra, fogo, ar, água e o cosmo (universo). Vejamos quais associações Platão faz entre os sólidos e os elementos da natureza:

- O cubo é associado a terra, pelo fato de ser o único a possuir faces quadradas e, portanto mais apto a adquirir estabilidade.
- O tetraedro é associado ao fogo, pelo fato de ser o mais pontudo e com arestas mais cortantes.

- O octaedro e o icosaedro são associados respectivamente a água e ao ar, pela sua mobilidade.
- O dodecaedro é associado ao cosmo, tido como o quinto elemento.



Pelo fato de Platão ter construído suas teorias cosmogônicas associadas aos cinco poliedros regulares, estes sólidos ficaram sendo conhecidos como sólidos platônicos. Para conhecimento, um sólido é regular quando todas as faces são polígonos regulares congruentes, todas as arestas são congruentes e todos os vértices são congruentes.

Os interesses pelos Poliedros e o estudo da Geometria Espacial, que era assunto privilegiado entre matemáticos e filósofos gregos, parece ter ficado adormecido por mais de mil anos (Idade das Trevas), até despertar novamente o interesse dos pensadores durante os séculos que se seguiram ao “Renascimento Italiano”.

Um dos principais problemas da geometria espacial é a duplicação do cubo. Este problema surgiu quando uma peste dizimou 25% da população de Atenas, matando inclusive Péricles. Diz-se que foi enviado ao oráculo de Apolo, um grupo de sábios para descobrir como a peste poderia ser eliminada. O oráculo respondeu que se deveria duplicar o altar cúbico de Apolo que nesta época tinha 1m de aresta. Os atenienses, logo dobraram as medidas das arestas do cubo. A peste não cessou, e logo viram que algum erro haveria sido cometido. É claro, o que os atenienses fizeram foi octuplicar o volume do altar pois,

$$V = 1^3 = 1\text{m}^3 \quad \text{e} \quad V = 2^3 = 8\text{m}^3 .$$

Nesta época descobrir que a aresta correta deveria ser igual a  $\sqrt[3]{2}$  era muito difícil, pois eles só dispunham de régua e compasso. O problema foi resolvido por Menaecmus ainda no século IV a.C., e vale lembrar que ele não utilizou apenas a régua e o compasso. Ele traçou parábolas e hipérbolas e analisou intersecções entre elas. Já estavam abertas as portas para a Geometria Analítica.

## A Geometria Analítica

A Geometria foi desenvolvida de maneira extraordinária pelos matemáticos gregos que inclusive já foram citados em outra aula: Euclides, Arquimedes e Apolônio de Perga. Porém, estes estudiosos não desenvolveram uma notação algébrica adequada para descrever as suas atividades.

Com o desenvolvimento da álgebra **Pierre de Fermat**, em 1629, concluiu o manuscrito *Ad locos planos et sólidos isagoge* (Introdução aos lugares planos e sólidos). Apesar da contestação de alguns historiadores, este manuscrito representa o marco inicial do estudo da Geometria Analítica. É clara a percepção de Fermat, enquanto uma Geometria Analítica em três dimensões: “Se o problema proposto envolve três incógnitas, deve-se achar, para satisfazer a equação, não apenas um ponto ou uma curva, mas toda uma superfície”.

Depois dos estudos de Fermat, a Geometria Analítica trouxe muitas facilidades ao desenvolvimento da Geometria Plana e Espacial. Euclides, num dos volumes da sua obra *Os Elementos*, escreveu um tratado sobre elipsóides, parabolóides, hiperbolóides, além de esfera, cilindro e cone. Arquimedes desenvolveu dois tratados, com muitos detalhes, sobre os sólidos de revolução, que foram nomeados *Sobre conóides e esferóides* e *Sobre esfera e cilindro*. Estas obras estão entre os principais trabalhos de Arquimedes, listados na aula anterior.

Na obra *Sobre conóides e esferóides*, Arquimedes descreveu os sólidos de revolução gerados pelas cônicas (parábola, elipse e hipérbole) e calculou a área de uma elipse ( $S = \pi ab$ ). Em *Sobre esfera e cilindro* fez rigorosas demonstrações sobre cálculo de volume e área dos referidos sólidos; e mais, estuda áreas e volumes das superfícies obtidas por secções planas sobre a esfera e sobre o cilindro.

Uma curiosidade: Arquimedes, a seu pedido, tem gravado na lápide de seu túmulo a representação de uma esfera inscrita num cone circular reto. Veja esta representação:

(colocar o desenho de uma circunferência inscrita num cone)

Finalmente, deve-se a Leonhard Euler (1707–1783) uma das mais significativas contribuições para a geometria na espaço. Ele mostrou que superfícies quádricas do espaço podem ser expressas por expressões algébricas de 2º grau. Esta publicação foi feita em seu livro *Introductio in Analysis Infinitorum* (Introdução à Análise Infinita) publicado em 1748. Diz-se que Euler escrevia 800 páginas por ano, e que a coletânea completa de suas obras é composta por aproximadamente 75 volumes.

## Síntese

O estudo da história da geometria baseou-se no estudo de papiros, onde se destacam o papiro de Moscou e o papiro de Rhind. Estes documentos traziam problemas e suas resoluções. Foi relatado que o início do estudo das formas geométricas do espaço deu-se com o estudo da metafísica e da religião.

Entre os matemáticos citados, destaca-se Platão e a relação que ele fez entre os poliedros e os elementos da natureza (fogo, água, ar terra e cosmo). Foram abordadas as obras que Arquimedes desenvolveu no campo da Geometria Analítica, e a forma que Euler utilizou para representar as superfícies no espaço, fazendo uso neste último caso, da álgebra, assunto da próxima aula. Até lá.

## Questões

1 – Temos cinco poliedros regulares. Pesquise o número de faces, o formato de cada face e o ângulo interno de cada polígono da face dos cinco poliedros regulares citados no texto.

2 –

3 –

Nos capítulos anteriores, tentamos explicar e entender relações gerais numéricas e/ou geométricas utilizando expressões analíticas (ou algébricas). Neste capítulo, veremos o surgimento da utilização de alguns símbolos e letras na tentativa de simplificar e expressar idéias gerais em matemática, o que deu origem à *álgebra*.

- Álgebra: a palavra
- Simbolismo algébrico
- Álgebra nos povos antigos
- Simbolismo algébrico na Europa

### Álgebra: a palavra

A origem da palavra “álgebra” não é muito clara como ocorre, por exemplo, com a palavra “aritmética” que deriva do grego *arithmos* significando “quantidade” ou “número”.

O nome *álgebra* foi, pela primeira vez, usado pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi (Maomé, filho de Moisés, de Khowarizm) que publicou em Bagdad, por volta do ano 825, um tratado sobre equações ao qual denominou *Hisab al-jabr w'al-muqabalah*, expressão que pode ser traduzida como “ciência da restauração (ou reunião) e redução”, mas para a matemática seria melhor “ciência da transposição e cancelamento”. Por isso é que se diz que a palavra *álgebra* é uma variante latina da palavra árabe *al-jabr*, sendo às vezes transliterada *al-jabr*. É interessante notar que a palavra “algorismo” (ou algoritmo), que significa qualquer processo de calcular, é derivada do nome al-Khowarizmi porque ele também escreveu um livro cuja tradução latina é geralmente designada como *Liber algorismi* (*Livro de al-Khowarizmi*).

### A simbologia algébrica

O importante historiador da matemática, Howard Eves (2002) nos diz o seguinte:

Em 1842, G. H. F. Nesselman caracterizou, com propriedade, três estágios no desenvolvimento da notação algébrica. Primeiro se tem a álgebra retórica em

que os argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos. A seguir vem a álgebra sincopada em que se adotam abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem mais frequentemente. Finalmente chega-se ao último estágio, o da álgebra simbólica, em que as resoluções se expressam numa espécie de taquigrafia matemática formada de símbolos que aparentemente nada têm haver com os entes que representam... Embora a aparição da álgebra simbólica se desse na Europa Ocidental no século XVI, somente pela metade do século XVII esse estilo acabou se impondo. Não raro passa despercebido que o simbolismo usado em nossos textos de álgebra elementar ainda não tem 400 anos.

### Álgebra nos povos antigos

As fontes históricas mais antigas que contém números datam de milhares de anos antes de Cristo, algumas nos levam a observar que a matemática deve ter sido criada e usada por muito tempo antes de ser escrita.

A álgebra surgiu no Egito quase ao mesmo tempo que na Babilônia. A álgebra do Egito como da Babilônia era retórica. Para equações lineares, os egípcios usavam um método consistindo em uma estimativa inicial seguida de uma correção final – mais tarde este método recebe o nome de “regra da falsa posição”.

Já muitos séculos antes de Cristo, os sumérios (povo que deu origem aos babilônios) desenvolveram um idioma escrito que chamamos de escrita cuneiforme. Arqueólogos obtiveram em suas escavações cerca de 500000 tábuas de barro com escrita cuneiforme. Cerca de 360 dessas tábuas contém textos matemáticos e estas foram traduzidas depois de 1920 especialmente pelo historiador da matemática Otto Neugebauer. O sistema de escrita cuneiforme deu aos babilônios superioridade sobre os demais sistemas antigos.

Um documento antigo que se refere às relações que podem ser denominadas algébricas são as famosas tábuas de Ahmes, papiro egípcio escrito por um sacerdote (Ahmes) e que atualmente se encontra no Museu Britânico. Esse papiro data de aproximadamente 1600 a 1700 anos a.C. e apresenta solução para equações algébricas, como por exemplo,  $x - \frac{x}{7} = 17$ .

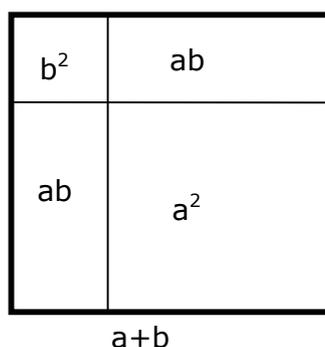
O que se pode dizer é que cerca do ano 2000 a.C. a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra (retórica) bem desenvolvida. Não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao da substituição numa fórmula geral, seja pelo

método de completar quadrados, como também se discutiam algumas cúbicas e biquadradas (grau quatro). Foram encontradas nas tábuas aproximações de raízes quadradas (e não quadrados perfeitos) e tábuas astronômicas que fazem uso explícito da regra de sinais da multiplicação.

A álgebra dos antigos gregos (conforme foi formulada pelos pitagóricos, 540 a.C. e por Euclides, 300 a.C., Arquimedes e Apolônio, 500-200 a.C.) era geométrica devido à sua dificuldade lógica com números irracionais e mesmo fracionários e suas dificuldades práticas com os numerais gregos, que eram semelhantes aos numerais romanos e igualmente difíceis de operar. Era natural, para os matemáticos gregos desse período, usar em estilo geométrico, por exemplo, o que nós escrevemos como

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

era concebido pelo gregos em termos do diagrama apresentado na figura



Os gregos da época de Euclides pensavam o produto  $ab$  (como escrevemos hoje) como um retângulo de base  $b$  e altura  $a$ . Não há dúvida de que os pitagóricos conheciam bem a álgebra babilônica e, de fato, seguiam os métodos-padrão babilônios de resolução de equações.

A matemática grega estagnou quando da ocupação romana. Todavia, alguns séculos mais tarde o matemático grego Diofanto deu novo impulso à álgebra introduzindo o método *sincopado* de escrever equações.

A álgebra hindu era amplamente verbal (*retórica*), ainda que no enunciado do problema seja feito uso de abreviações (estilo *sincopado*). Eles usavam corretamente números negativos e operavam livremente com números irracionais, conheciam e trabalhavam com progressões aritméticas e geométricas, resolveram equações lineares, quadráticas (grau dois) e alguns tipos de equações de grau maior que dois.

A álgebra arábica proveio da álgebra dos hindus e gregos. Os árabes tratavam a álgebra numericamente, como os hindus, e geometricamente como os gregos, mas em geral, seu estilo era *retórico*.

Primitivamente os árabes escreviam os problemas em palavras, por extenso. Após contatos com outros povos, eles foram gradualmente incorporando os símbolos e os numerais hindus. Mas posteriormente escritores árabes voltaram a escrever problemas inteiros por extenso, revelando talvez a influência dos métodos gregos.

O maior escritor árabe no campo da matemática foi, provavelmente, al-Khowarizmi. Ele resolvia equações lineares e quadráticas, numérica e geometricamente. A edição original arábica do trabalho mais conhecido de al-Khowarizmi, *Hisab al-jabr w'al-muqabalah*, perdeu-se, mas restou uma edição latina (datada do século XII). Álgebras arábicas e medievais subsequentes basearam-se neste trabalho.

Uma curiosidade: o termo árabe para incógnita era *shai* (coisa), traduzido para o latim como *res* e para o italiano como *cosa*; por isso a álgebra foi conhecida por algum tempo na Inglaterra como *coassic art* e na Alemanha como *die coss*.

### **Simbolismo algébrico na Europa**

Vamos conhecer um pouco sobre alguns personagens que contribuíram para a introdução do simbolismo algébrico na Europa.

É no século IV d.C., na *Aritmética* de Diofanto, que encontramos pela primeira vez o uso de uma letra para representar a incógnita de uma equação que o autor chamava de *o número do problema*. Como os manuscritos originais de Diofanto não chegaram até nós, não sabemos com toda certeza quais os símbolos que ele usava, mas acredita-se que representava a incógnita pela letra  $\zeta$ , uma variante da letra  $\sigma$  quando aparece no fim de uma palavra (por exemplo, *αριθμος* - *arithmos*). Ele usava também nomes para designar as várias potências da incógnita, como quadrado, cubo, quadrado-quadrado (para a quarta potência), quadrado-cubo (para a quinta potência) e cubo-cubo (para a sexta).

A partir de então, os métodos e notações de Diofanto foram se aperfeiçoando muito lentamente. Mesmo os símbolos hoje tão comuns para representar as operações demoraram a ser introduzidos. Muitos algebristas usavam  $p$  e  $m$  para representar a adição e a subtração por serem as iniciais das palavras latinas *plus* e *minus*. O símbolo  $=$  para representar a igualdade foi introduzido só em 1557 por Robert Recorde e não voltou a aparecer numa obra impressa

até 1618. Autores como Kepler, Galileu, Torricelli, Cavalieri, Pascal, Napier, Briggs e Fermat, entre outros, ainda usavam alguma forma retórica em vez de um símbolo, como as palavras *aequales*, *esgale*, *faciunt*, *gheljck* ou a abreviatura *aeq*.

A notação de expoentes é usada por Nicolas Chuquet (1455?-1500?) na sua *Tripary*, onde escreve expressões como  $12^3$ ,  $10^3$  e  $120^3$  para representar o que hoje escreveríamos como  $12x^3$ ,  $10x^3$  e  $120x^3$  e também  $12^0$  e  $7^{1m}$  para  $12x^0$  e  $7x^{-1}$ .

Os primeiros passos para a introdução do conceito de *polinômio* e seu uso para a formulação de problemas de resolução de equações foram dados por Simon Stevin (1548-1620). Nascido em Bruges, mudou para Leyden em 1582, foi tutor de Maurício de Nassau e serviu o exército holandês. Na sua obra mais conhecida *De Thiende*, publicada em Flamengo em 1585 e traduzida ao francês, sob o título *La Disme*, encontramos os símbolos como  $\overset{\textcircled{0}}{}$   $\overset{\textcircled{1}}{}$   $\overset{\textcircled{2}}{}$ , etc. para indicar as posições das unidades, dízimas, centésimas, respectivamente. Assim, por exemplo, ele escreve 875,782 como  $\overset{\textcircled{0}}{875} \overset{\textcircled{1}}{7} \overset{\textcircled{2}}{8} \overset{\textcircled{3}}{2}$ . No seu livro seguinte “*L’Arithmetique*”, publicado em 1585, ele introduz uma notação exponencial semelhante para denotar as várias potências de uma variável. As potências que nós escreveríamos com  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ , etc são denotadas por ele como  $\overset{\textcircled{0}}{}$   $\overset{\textcircled{1}}{}$   $\overset{\textcircled{2}}{}$  e assim, por exemplo, o polinômio  $2x^3 + 4x^2 + 2x + 5$  se escreveria, na sua notação como:

$$2 \overset{\textcircled{3}}{ } + 4 \overset{\textcircled{2}}{ } + 2 \overset{\textcircled{1}}{ } + 5 \overset{\textcircled{0}}{ }$$

Ele denomina estas expressões de *multinômios* e mostra como operar com eles.

Da leitura dos trabalhos de Diofanto, Cardano, Tartaglia, Bombelli e Stevin, Viète teve a idéia de utilizar letras para representar quantidades e sua principal contribuição à Álgebra aparece no seu livro *In Artem Analyticam Isagone* – Introdução à Arte Analítica – impresso em 1591, onde trata das equações algébricas de um novo ponto de vista. Ele fez importantes progressos na notação e seu verdadeiro mérito está em ter usado letras *não somente para representar a “incógnita”, mas também para representar os coeficientes ou quantidades conhecidas*. Ele usava consoantes para representar quantidades conhecidas e reservava as vogais para representar as incógnitas. Assim, por exemplo, a equação que nós escreveríamos como  $bx^2 + cx = d$  era representada por ele na forma

$$B \text{ in } A \text{ quadratum plus } C \text{ plano in } A \text{ aequalia } D \text{ sólido.}$$

Como Viète pensava geometricamente, requeria, para suas equações, *um princípio de homogeneidade*, isto é, todos os termos de uma dada equação deveriam ter a mesma “dimensão”, por exemplo, todos os termos de uma dada equação quadrática, tal como a dada acima, deveriam representar volumes. É por causa disso que o coeficiente  $C$  da variável é acompanhado do adjetivo *plano*, pois devia representar uma área. Da mesma forma,  $D$  é acompanhado do termo *sólido* para enfatizar que representa um volume.

Viète chamava sua álgebra simbólica de *logística speciosa* por oposição à *logística numerosa* que trata dos números. É importante observar que Viète tinha plena consciência de que seu emprego de letras lhe permitia trabalhar com *classes de equações*, por oposição ao emprego dos números, que permite apenas trabalhar com um exemplo de cada vez. Com isto, ele tornou explícita a diferença entre Álgebra e Aritmética: para ele, a Álgebra – *logística speciosa* – era um método para operar com espécies ou formas de coisas e a Aritmética – *logística numerosa* – lidava apenas com números.

Também tentou “trabalhar algebricamente”, provando, por exemplo, as identidades que os gregos tinham exibido por métodos geométricos. Assim, no seu *Zeticorum Libri Quinque* – Cinco Livros de Análise – publicado em 1593, ele utiliza o método de “completar quadrados” numa equação de segundo grau e também encontramos ali identidades gerais do tipo:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

que ele escreve na forma

$$a \text{ cubus} + b \text{ in } a \text{ quad.}^3 + a \text{ in quad.}^3 + b \text{ cubo aequalia } \overline{a + b} \text{ cubo}$$

Um episódio ilustra bem o talento matemático de Viète e fama que chegou a desfrutar ainda em vida. Durante a guerra com a Espanha, a serviço de Henrique IV, Viète pode decifrar o código utilizado pelos espanhóis a partir de cartas que foram interceptadas e, dali em diante, conhecer o conteúdo de novas cartas escritas nesse código. Os espanhóis achavam que seu código era tão difícil de ser quebrado, que acusaram a França, perante o Papa, de usar feitiçaria.

O uso de letras para representar classes de números e assim tratar das equações de forma mais geral demorou a ser aceito. Um aperfeiçoamento desta notação foi devido a René Descartes (1596-1650) que utiliza pela primeira vez a prática hoje usual de utilizar as primeiras letras do alfabeto para representar quantidades conhecidas e as últimas, como  $X, Y, Z$  para as

incógnitas. É precisamente nesta obra que Descartes apresenta as idéias que deram origem à Geometria Analítica, junto com as contribuições de Pierre de Fermat

O progresso final, em relação ao uso da notação consistiu em usar uma letra também para representar o *grau* de uma equação. Nossa notação moderna que utiliza expoentes negativos e fracionários foi introduzida por Isaac Newton (1642-1727) numa carta dirigida a Oldenburg, então secretário da Royal Society, em 13 de junho de 1676, onde diz:

*Como os algebristas escrevem  $a^2, a^3, a^4$ , etc., para  $aa, aaa, aaaa$ , etc., também eu escrevo  $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{2}{3}}, a^{\frac{3}{4}}$  para  $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a^2}, \sqrt[4]{a^5}$ ; e escrevo  $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}$ , etc., para  $\frac{1}{a}, \frac{1}{aa}, \frac{1}{aaa}$ , etc.*

O primeiro a usar o símbolo  $+$  tal como o conhecemos foi Robert Recorde (1510-1558), que em 1557 publicou o primeiro texto de álgebra da Inglaterra, chamado *The Whetstone of Witte*. Ali ele introduz o símbolo dizendo:

*Usarei, como faço frequentemente no trabalho, uma par de linhas paralelas, do mesmo comprimento assim  $:=$ , porque duas coisas não podem ser mais iguais.*

Vale a pena mencionar que os símbolos  $+$  e  $-$  hoje usados para denotar adição e subtração respectivamente aparecem impressos pela primeira vez num texto de Johannes Widman, professor da universidade de Leipzig nascido em torno de 1460. O sinal “ $+$ ” deriva aparentemente da palavra latina *et*, usada em vários manuscritos para designar a adição e o sinal “ $-$ ” da letra *m* que como vimos, era usada para abreviar *minus*. Eles são usados num livro de aritmética comercial publicado em 1489, mas estes sinais já aparecem em notas manuscritas de um aluno em 1486 que se conservam na biblioteca de Dresden.

## Síntese

Vimos que a álgebra surgiu há muito tempo e dependendo da localidade, foi desenvolvida de formas diferentes. Alguns povos tratavam a álgebra da maneira retórica, outros com o estilo sincopado. O uso das letras para representar a classe de números e tratar das equações demorou a ser aperfeiçoado e aceito. Foi René Descartes quem utilizou pela primeira vez uma notação que se aproxima mais com a que usamos hoje.

No capítulo anterior vimos como surgiu e se desenvolveu um pouco da simbologia que utilizamos em matemática. Agora, queremos saber como eram descobertas (e escritas) soluções de equações algébricas, que hoje, chamamos de lineares e quadráticas, dando maior ênfase para a equação do segundo grau.

- Equações algébricas
- A equação do segundo grau
- A fórmula de Bhaskara

### Equações algébricas

O desenvolvimento da notação algébrica já foi abordado anteriormente, e relembramos aqui que esta notação evoluiu ao longo de três estágios: o retórico, o sincopado e o simbólico. A fase antiga, que abrange o período de 1700 a.C. a 1700 d.C., aproximadamente, foi caracterizada pela descoberta gradual do simbolismo e por técnicas de resolução de equações, com o intuito de fornecer soluções gerais para vários tipos de equação. Poucos progressos, neste sentido, foram apresentados até se chegar a solução geral das equações cúbicas e quadráticas, e a um tratamento das equações polinomiais em geral feito por François Viète (1540 – 1603).

Como a álgebra provavelmente se originou na Babilônia, inicialmente as equações eram resolvidas no estilo retórico, onde a solução era apresentada de maneira descritiva, e sempre baseada em ilustrações com figuras geométricas. Por exemplo, um sistema de equações de duas variáveis, que hoje seria resolvido pelo método da substituição, era resolvido pelos babilônios através do método paramétrico, onde se expressa as variáveis do problema em função de uma terceira. Vale salientar que os babilônios também sabiam resolver sistemas por substituição, mas o método paramétrico facilitava a sua escrita. Mesmo assim, deve-se notar que os babilônios eram capazes de resolver uma variedade surpreendente de equações, inclusive alguns tipos especiais de equações cúbicas, salientado que todas tinham coeficientes numéricos.

Alguns séculos depois, outro grego, Diofanto, também usou a abordagem paramétrica em seu trabalho com equações “diofantinas”. Estas equações são estudadas até hoje nos cursos

de álgebra que são oferecidos em graduações em matemática. Diofanto deu início ao simbolismo moderno introduzindo abreviações de palavras e evitando o estilo da álgebra geométrica.

### A equação do segundo grau

Faremos uma abordagem histórica sobre o desenvolvimento da equação do 2º grau no mundo antigo.

Inicialmente, não se encontrou registros de soluções para equação de 2º grau desenvolvido pelos egípcios, mas suspeita-se que eles já dominavam alguma técnica de resolução dessas equações pelo fato de ter-se encontrado no papiro de Kahun um escrito sobre a equação que hoje escreveríamos como  $x^2 + y^2 = k$ .

Já na Mesopotâmia, os primeiros registros sobre soluções de problemas envolvendo equações de 2º grau datam de 1700 a.C., e foram encontrados em tábuas de argila descritos através de palavras. A solução era apresentada como uma “receita matemática” e considerava como solução apenas uma raiz positiva. Na Grécia, as soluções destas equações eram sempre apresentadas de forma geométrica; acredita-se que este desenvolvimento foi adotado pela falta de praticidade que os gregos tinham com os números racionais e irracionais.

A Matemática hindu teve a contribuição de grandes nomes, destacando-se entre eles *Bhaskara de Akaria* e *Sridhara*. Estes dois matemáticos desenvolveram métodos importantes para a solução das equações de 2º grau. O primeiro, no século XII, usou a solução que mais se assemelha com a utilizada atualmente, e o segundo foi responsável pela determinação da regra que originou a fórmula atual.

Com o fim da Biblioteca de Alexandria, *Al-Mamun* fundou em Bagdá, no século IX, um centro científico denominado de Casa da Sabedoria, para onde convergiram vários matemáticos, entre eles, *Al-Khowarizmi* que escreveu, dentre outras obras, o material de grande potencial didático, traduzido como *Ciência das equações*. Neste material, ele apresenta a solução da equação do 2º grau, de uma forma retórica, atrelada a uma comprovação geométrica denominada por *método de completar quadrados*, que é um método geométrico distinto do utilizado pelos gregos.

Os europeus, embora não usassem ainda o formalismo atual, resolviam problemas com equações do 2º grau através da receita fornecida por *Bhaskara*. No período compreendido entre o século XV e XVII, muitos matemáticos desenvolveram formas distintas de representação e solução das tais equações. Em 1637, o francês René descartes, além de possuir uma notação que

se assemelhava muito com a de hoje, diferindo apenas pelo sinal da igualdade, desenvolveu um método geométrico para o cálculo da solução positiva.

Hoje em dia, ao estudarmos esta equação, usamos a representação herdada dos europeus e a solução herdada dos hindus. Porém, sabe-se que desde 1700 a.C., houve preocupação com o trato e o desenvolvimento desse tipo de equação, analisando as relações entre os seus coeficientes e suas raízes, a fim de se determinar mais facilmente o seu sinal, módulo e valores.

### A fórmula de Bhaskara

Vale aqui, lembrar a fórmula que hoje utilizamos, para solução de equações do 2º grau:

*Dada a equação  $ax^2 + bx + c = 0$  onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  representam números reais com  $a \neq 0$ , tem-se*

$$\text{que } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Por volta do ano de 1960, se estabeleceu no Brasil o hábito de nomear a fórmula apresentada acima, como fórmula de Bhaskara. Este costume, aparentemente brasileiro não é estritamente adequado, pois os problemas que recaem em equações do 2º grau já apareciam há quase quatro mil anos, em textos escritos pelos babilônios. Além disto estes textos continham as chamadas “receitas” (escrita em prosa, sem uso de símbolos) que ensinava como proceder para determinar as raízes em exemplos concretos com coeficientes numéricos. Foi a partir de François Viète (1540–1603), que começaram a se representar os coeficientes da equação através de letras.

Bhaskara nasceu na Índia em 1114 e viveu até cerca de 1185, sendo um dos mais importantes matemáticos do século XII. Dentre os seus trabalhos os mais conhecidos foram *Lilavati* e *Vijaganita* que tratam de aritmética e álgebra, respectivamente, e contém numerosos problemas sobre equações lineares e quadráticas, progressões aritméticas e geométricas, radicais entre outros.

Embora não se deva negar a importância e a riqueza da obra de Bhaskara não é correto atribuir ao seu nome à conhecida fórmula de resolução da equação do segundo grau.

### Síntese

Aprendemos que as equações algébricas já eram conhecidas desde 1700 a.C. embora se utilizassem métodos geométricos para resolvê-las e o método retórico para representá-las. Isto limitava as equações a apenas soluções positivas. Vimos o desenvolvimento das soluções de equações do 2º grau no mundo antigo, destacando-se os trabalhos realizados no Egito, Mesopotâmia, Grécia e Índia. Também a importante contribuição que Bhaskara deu para a fórmula que hoje utilizamos para a solução da equação do 2º grau, embora não se possa atribuir apenas a ele o desenvolvimento e formalização desta fórmula.

### Questões

1 – Faça uma pesquisa e apresente uma solução para equação de segundo grau na forma geométrica, sem o uso da fórmula usual de Bhaskara.

2 – Leia sobre:

- a) Uma abordagem histórica da equação do 2º grau.
- b) Resolução de equações algébricas por radicais.

Neste capítulo veremos como surgiu a trigonometria e quais as relações que tinha com o mundo e com áreas das ciências como a Astronomia. O número  $\pi$ , e qual o caminho percorrido para que se descobrisse o seu real valor e dois problemas relacionados com a Trigonometria que até hoje são considerados muito interessantes.

- Surgimento da trigonometria
- Funções trigonométricas
- O número pi ( $\pi$ )
- Quadratura do círculo

### O surgimento da trigonometria

Antigamente, os povos observavam os corpos celestes e, com estas observações, surgiu uma preocupação em poder determinar as posições relativas entre estes corpos. Assim, surgiu a trigonometria, que veio ajudar a resolver os problemas gerados pela Astronomia.

Trigono – do grego *trigonos* – que representa triângulo e metria – do grego *metron* – que representa medida, a trigonometria estuda as medidas de um triângulo, levando em consideração a medida dos seus lados e dos seus ângulos.

Um dos diretores, da nossa já conhecida, Biblioteca de Alexandria, Eratóstenes (276 – 194 a.C.) comprovou através da trigonometria a esfericidade da Terra e mediu com certa precisão o perímetro da sua circunferência. Para isto usou uma engenhosa técnica que descreveremos a seguir.

Eratóstenes, analisando um dos rolos de papiro da biblioteca, encontrou uma informação interessante. Lá constava que na cidade de Siena (hoje, Assuã), ao meio-dia do solstício verão (o dia mais longo do ano, 21 de junho, no hemisfério norte) colunas verticais não projetavam qualquer sombra; ou seja, o Sol se situava a prumo. Mas, ele também observou que no mesmo dia e horário, as colunas verticais de Alexandria produziam sombra em distância perfeitamente calculável. Sendo assim, aguardou o dia 21 de junho do ano seguinte e determinou que se instalasse uma grande estaca em Alexandria e que cavassem um profundo poço em Siena. Ao

meio-dia, enquanto o Sol iluminava as profundezas do poço em Siena, portanto fazendo um ângulo de  $90^\circ$ , em Alexandria Eratóstenes mediu o ângulo entre a estaca e os raios solares. Com esta medida, chegou ao ângulo de  $\theta = 7^\circ 12'$  que representa  $\frac{1}{50}$  da circunferência de  $360^\circ$ . Portanto, concluiu, o comprimento do meridiano terrestre deveria ser 50 vezes maior do que a distância entre Siena e Alexandria. Assim, conjecturou que o perímetro da Terra era de 46.250km, quando hoje sabemos é de 40.076km.

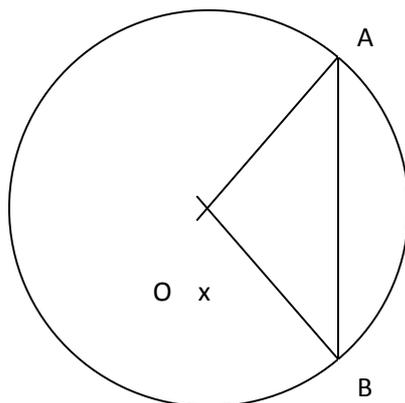
Esta história tem um detalhe muito interessante. A distância entre Alexandria e Siena era grande, e, portanto, desconhecida. Para medir esta distância Eratóstenes determinou que uma equipe formada por instrutores com camelos e escravos a pé, seguissem em linha reta de Alexandria a Siena, enfrentando todos os percalços, inclusive tendo que atravessar o rio Nilo. A distância encontrada, na época, foi de 5.000 estádios ou cerca de 925 km.

Eratóstenes foi um matemático brilhante, e também desenvolveu trabalhos como poeta, escritor, geógrafo e atleta. Suicidou-se após ter sido acometido por uma doença que o deixou cego.

Considerado pai da trigonometria, Hiparco de Hicéia, na segunda metade do século II a.C. fez um tratado em doze livros em que apresentou o que acredita-se ter sido a primeira tabela trigonométrica, incluindo uma tábua de cordas. Hiparco fez estes cálculos para aplicá-los na Astronomia, e uma das suas produções foi a descoberta da duração do mês e do ano e o tamanho da Lua.

### **As funções trigonométricas**

Como já vimos, Hiparco estudou sobre as cordas e estabeleceu uma tábua para elas. Como era muito forte a relação entre a Astronomia e a Trigonometria, desenvolveu-se estudos sobre triângulos de lados curvilíneos que se formavam sobre a superfície esférica. Para os estudos realizados, considera-se um círculo de raio unitário, idéia aplicada por árabes e hindus. Através das cordas destes arcos, foram descobertas as primeiras noções sobre o seno de um ângulo. De fato, o seno de um ângulo não é a medida da corda de um arco, mas o seno da medida da metade do arco é a metade da corda. Vejamos um desenho para exemplificar tal definição:



$$x = A\hat{O}B$$

$$\text{sen} \frac{x}{2} = \frac{\overline{AB}}{2}$$

O recurso sistemático ao círculo trigonométrico e a aplicação da Trigonometria à resolução de problemas algébricos é feita por Viète— séc. XVI – que estabeleceu também alguns resultados importantes. Contudo, foi Euler (séc. XVIII) que, ao usar sistematicamente o círculo de raio um, introduziu o conceito de seno, de cosseno e de tangente como números, bem como as notações atualmente utilizadas. A Trigonometria necessita da Aritmética para estabelecer as tabelas, da Álgebra para estabelecer as fórmulas, e da Geometria, embora tenha tido um desenvolvimento mais tardio que esta.

### O número pi ( $\pi$ )

O símbolo  $\pi$  é a primeira letra da palavra grega que significa circunferência. Matematicamente sabemos que o número  $\pi$  representa a razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência, ou seja, uma circunferência de diâmetro 1cm tem comprimento igual a  $\pi$  cm.

Arquimedes foi o primeiro matemático a utilizar um método científico para determinar o valor do número  $\pi$ . Em seu tratado *Sobre as Medidas do Círculo* descreveu como encontrou um valor aproximado para o  $\pi$ ; ele inscreveu e circunscreveu um polígono de 96 lados e obteve a seguinte desigualdade:

$$3\frac{10}{11} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

ou

$$3,1408 < \pi < 3,1428.$$

Embora Arquimedes tivesse descoberto um valor aproximado para o  $\pi$ , este símbolo só apareceu em 1706, e foi Willian Jones, um amigo de Newton, que o utilizou pela primeira vez.

Muitos matemáticos discutiam a irracionalidade do número  $\pi$ , e muitos se dispuseram a fazer cálculos enormes com o intuito de achar um valor exato. Em 1873 o inglês W. Shanks calculou o  $\pi$  com 707 casas decimais, e fez todo o processo manualmente, sem o auxílio de máquinas. Levou aproximadamente 5 anos para terminar todo o processo. Em 1947 descobriu-se que o cálculo de Shanks estava errado a partir do 527º algarismo. Com auxílio de uma maquininha manual, o valor de  $\pi$  foi então calculado com 808 algarismos decimais exatos. Já em 1988, e com a ajuda dos computadores, o japonês Yasumasa Kanada conseguiu expressar o seu valor com 200 milhões de casas decimais. O computador em que foi feito este cálculo trabalhou por cerca de apenas 6 horas.

Não há uma razão específica, ou um interesse prático em se determinar o valor deste número com tantas casas decimais. Sabe-se que com 40 casas decimais, o cálculo da circunferência envolvendo todo o universo dará o valor com a precisão da ordem do diâmetro de um próton. Lembre-se que isto é menor do que qualquer coisa ou objeto que o olho humano possa enxergar.

### A Quadratura do Círculo

Durante muitos anos se tentou resolver um problema conhecido como a quadratura do círculo. Eis o problema:

“Com o auxílio de régua e compasso, construa um quadrado que tenha a mesma área que um círculo dado.”

Para resolver este problema teremos que construir, com régua e compasso, o número  $\sqrt{\pi}$  pois dada uma circunferência de raio 1cm, cuja área é igual a  $\pi^2$  cm<sup>2</sup>, o quadrado de área equivalente tem lado medindo  $\sqrt{\pi}$ .

Para se construir um número com régua e compasso precisamos repetir, um número finito de vezes, as operações básicas:

- Traçar a reta que une dois pontos básicos;
- Traçar a circunferência com centro e raio dados.

Assim, um número construído com régua e compasso, só pode ser obtido com intersecções entre duas retas, duas circunferências ou uma reta e uma circunferência. Considerando o sistema de coordenadas cartesianas  $xOy$ , um número que se pode construir é sempre a solução de um sistema de 2 equações, com 2 variáveis, de grau 2 no máximo, pois equações de reta tem grau 1 e equações de círculo tem grau 2.

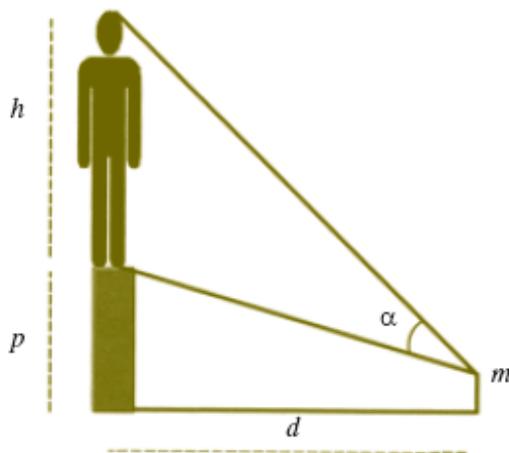
Isto mostra que o problema não tem solução, pois não existe equação algébrica com coeficientes inteiros, tal que o número  $\pi$  seja uma raiz. E se esta condição vale para o número  $\pi$ , vale também para o número  $\sqrt{\pi}$ . Dizemos então que o número  $\pi$  é transcendente. Ou seja, todo número que não pode ser raiz de uma equação algébrica com coeficientes inteiros é transcendente.

### A Trigonometria e um problema de otimização

A cidade de Königsberg, na Prússia (atual Rússia), é conhecida na Matemática devido ao famoso problema das pontes, resolvido pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783). Nesta cidade, nasceu Johann Müller (1436-1476), um matemático conhecido como Regiomontanus. Em seu livro *De Triangulus Omnimodes*, escrito em 1464, apresenta uma visão moderna da Trigonometria com dados tabelados de várias funções trigonométricas. A importância dos seus conhecimentos em Astronomia fez com que ele fosse convidado pelo Papa Sixto IV para trabalhar na confecção de um calendário mais apurado do que o que vinha sendo usado pela Igreja. Após a realização do trabalho a gratidão do Papa foi tal, que rapidamente o astrônomo se tornou seu principal conselheiro. Depois de um ano em Roma, Regiomontanus faleceu, tendo sido anunciada como causa de sua morte o flagelo de uma peste.

Entre os problemas propostos por Regiomontanus, destaca-se um, datado de 1471, que é considerado o primeiro problema de extremos encontrado na história da matemática desde a Antigüidade. O problema é o seguinte:

*Suponha uma estátua de altura  $h$  sobre um pedestal de altura  $p$ . Um homem de altura  $m$  ( $m < p$ ) enxerga do pé ao topo da estátua sob um ângulo  $\alpha$ , que varia de acordo com a distância  $d$  entre o homem e a base do pedestal. Determinar  $d$  para que o ângulo de visão  $\alpha$  seja o maior possível.*



A solução deste problema é  $d^2=(p - m).(p - m + h)$ . Este problema pode ser resolvido com aplicações do cálculo, mas existe uma solução engenhosa que utiliza procedimentos da Trigonometria.

### Síntese

Neste texto vimos que a trigonometria surgiu a partir das observações que se faziam dos corpos celestes, e da preocupação que se tinha em determinar posições relativas entre eles. Vimos também que a primeira medida do diâmetro da Terra foi calculada com o auxílio Trigonometria. Com estudos sobre as circunferências definiram-se as principais funções trigonométricas (seno e o cosseno) e alguns matemáticos fizeram o que chamamos hoje de tabelas trigonométricas. Conhecemos a origem do nosso famoso número  $\pi$ , e quais os caminhos percorridos para chegar ao valor que hoje lhe é atribuído. Dois antigos problemas foram apresentados: a quadratura do círculo, que hoje sabemos, não se resolve com construções de régua e compasso, e um famoso problema de otimização, onde podemos aplicar também recursos da trigonometria.

### Questões

1 – Na trigonometria utilizamos relações entre ângulos e medidas de lado de triângulos. Faça uma busca e verifique quais relações entre lados do triângulo retângulo que definem o conceito utilizado hoje de seno, cosseno e tangente.

2 – Faça uma tábua trigonométrica com o valor dos ângulos  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ , envolvendo as funções seno, cosseno e tangente.

**OBS.** Esta tábua já existe e você pode encontrá-la nos livros de matemática do Ensino Fundamental.

## PESQUISA, QUESTIONÁRIO E AVALIAÇÃO

Uma vez conscientes das diversas características, épocas e eventos sobre o desenvolvimento das idéias matemáticas, dos símbolos, das personalidades envolvidas, utilize este texto, as referencias indicadas e a internet para responder este questionário avaliativo.

1 – Sabemos que, antigamente, os processos de contagem consistiam em fazer corresponder objetos a serem contados com os objetos de algum conjunto familiar (dedos das mãos, dos pés, pedras,...). Como este processo de contagem foi sistematizado para que se permitisse contar uma maior quantidade de elementos?

2 – Considerando a numeração egípcia, quantos símbolos eram utilizados, quais as descrições de suas formas e quais valores (dados em potências de dez) elas representavam?

3 – O Papiro de Rhind (ou Papiro de Ahmes) é um documento egípcio de cerca de 1650 a.C., onde um escriba de nome Ahmes detalha a solução de 85 problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica e geometria. É um dos mais famosos antigos documentos matemáticos que chegaram aos dias de hoje. No papiro existem tábuas de multiplicação e divisão. Como os egípcios faziam a multiplicação  $37 \times 79$ , segundo o Papiro de Rhind?

4 – O número (1,32,09) está na representação babilônica. Transforme-o para o nosso sistema de numeração atual, mostrando passo a passo o processo realizado.

5 – Qual o único número representado na forma romana que tinha o símbolo repetido mais de três vezes? Qual era esta representação?

6 – Escreva sobre os abacistas e os algoristas. A partir de quando e porque o ábaco deixou de ser utilizado?

7 – O sistema de numeração indo-arábico tem origem na Índia, antes de Cristo, estudado e levado para a Europa pelos árabes, depois de Cristo. Os árabes desenvolveram os algoritmos aritméticos a partir do uso do ábaco. Como fazer no ábaco a operação  $348+795$  e  $3005-1887$ .

8 – Dentre os sistemas de numeração estudados (egípcia, babilônica, romana, grega e hindu) qual você escolheria para trabalhar hoje? E porque?

9 – Explique como surgiu a necessidade de se ampliar o conjunto dos números naturais para o conjunto dos números inteiros. Cite também quais outros nomes se utilizou para os números negativos.

10 – Os números negativos levaram séculos para serem entendidos. A regra de sinais  $(-)(-) = +$  teve inicialmente modelos para o entendimento e somente nos anos de 1700 houve a demonstração formal da regra.

a) Desenvolver um modelo para a regra;

b) Provar que  $(-)(-) = +$ .

11 – A resolução de uma equação do 2º grau nos parece hoje bem simples. Ao ensiná-la, limitamo-nos em geral a mostrar a conhecida fórmula para as soluções de  $ax^2 + bx + c = 0$ , chamada em muitos livros didáticos de “fórmula de Báskara”. A maioria de nossos alunos fica surpresa quando lhes contamos que a equação do 2º grau tem uma longa história e que muitos matemáticos importantes, de várias civilizações, se preocuparam em achar suas soluções, contribuindo desta maneira para a história que se estende por mais de quatro mil anos! Convém lembrar inicialmente que a notação algébrica simbólica manejada automaticamente por nós, hoje, é criação recente dos matemáticos, começando com François Viète (1540-1603) e colocada praticamente na forma atual por René Descartes (1596-1650). Assim, os processos (algoritmos) para achar as raízes de equações dos babilônios, gregos, hindus, árabes e mesmo dos algebristas italianos do século XV e do início do século XVI eram formulados com palavras

(às vezes, por exemplo, na Índia, mesmo em versos!). Fazer a resolução da equação do segundo grau  $x^2 + 6x = 27$  de forma geométrica (Grega) e fazer a demonstração da fórmula da resolução da equação do segundo de forma algébrica simbólica (após 1500).

12 – Descreva como surgiu a noção das figuras geométricas que são utilizadas hoje em dia como retângulos, quadrados, círculos e triângulos.

13 – Qual a obra desenvolvida por Euclides que teve mais importância? Descreva as suas principais características.

14 – O título de Grande Geômetra é geralmente atribuído a Euclides; na verdade sabe-se que outro geômetra é detentor deste título. A qual geômetra era atribuído este título e o que aconteceu com as suas obras?

15 – Platão estudou vários sólidos. Quais as relações que ele fazia destes sólidos com a natureza?

16 – Cite os principais estudiosos no campo da geometria analítica destacando as suas descobertas.

17 – A história da álgebra aponta para algumas fases, descreva essas fases:

- a) álgebra retórica
- b) álgebra geométrica
- c) álgebra sincopada;
- d) álgebra simbólica.

18 – A álgebra geométrica foi desenvolvida na Grécia, antes de Cristo. Desenvolver de forma geométrica o produto notável  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ .

19 – Eratóstenes foi diretor da Biblioteca de Alexandria e mediu com certa precisão a circunferência da Terra. Qual foi a medida achada? Descreva o processo que ele utilizou.

20 – O número  $\pi$  é um número irracional. Pesquise uma demonstração deste fato e transcreva.

21 – O que é um número transcendente? O número  $e$  é transcendente? Porque?

22 – Um problema de matemática conhecido como quadratura do círculo é muito famoso. Eis o problema: *Com o auxílio de régua e compasso, construa um quadrado que tenha a mesma área que um círculo dado.* Sabemos que este problema não tem solução. Porque?

23 – Para medir a esfericidade da Terra, Eratóstenes usou uma engenhosa técnica na qual precisava saber a distância entre Siena e Alexandria. Como ele conseguiu medir esta distância, qual era o seu valor?

24 – O teorema de Pitágoras leva o nome do matemático grego Pitágoras (570 a.C. – 495 a.C.), que tradicionalmente é creditado pela sua descoberta e demonstração, embora seja frequentemente argumentado que o conhecimento do teorema seja anterior a ele (há muitas evidências de que matemáticos babilônicos conheciam algoritmos para calcular os lados em casos específicos, mas não se sabe se conheciam um algoritmo tão geral quanto o teorema de Pitágoras).

Existem mais de 300 demonstrações do Teorema de Pitágoras já catalogadas. Faça duas demonstrações do Teorema de Pitágoras.