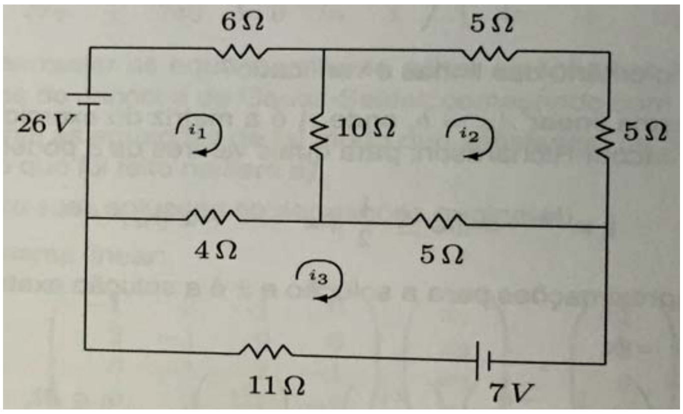
Sistemas Lineares – Métodos Iterativos – Problemas Aplicados

Q1: Considere o circuito da figura abaixo, com resistências e baterias tal como indicado, escolhemos arbitrariamente as orientações das correntes.

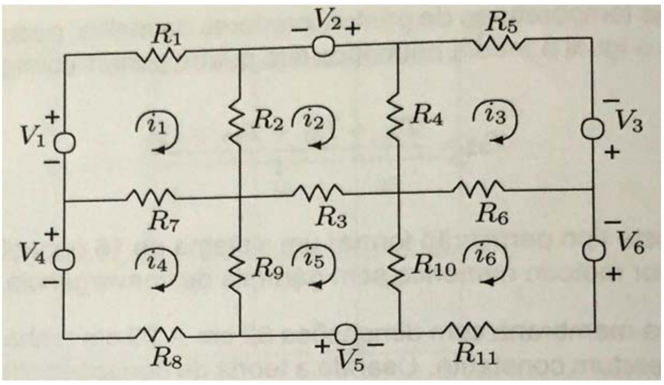


Aplicando a lei de Kirchoff, que diz que a soma algébrica das diferenças de potencial em qualquer circuito fechado é zero, achamos para as correntes i_1, i_2 e i_3:

$$\begin{cases} 6i_1 + 10(i_1 - i_2) + 4(i_1 - i_3) - 26 &= 0 \\ 5i_2 + 5i_2 + 5(i_2 - i_3) + 10(i_2 - i_1) &= 0 \\ 11i_3 + 4(i_3 - i_1) + 5(i_3 - i_2) - 7 &= 0 \end{cases}$$

(a) É possível aplicar ao sistema linear o método de Gauss-Seidel com convergência assegurada? Por que?
(b) Se possível, obtenha a solução com precisão 0,01.

Q2: Suponha que tenhamos um circuito que consiste de fontes de tensão independentes e resistores concentrados, como na figura abaixo:



A análise completa de tal circuito requer a determinação dos valores das correntes da malha i_k, indicados na figra acima, para os valores especificados das fontes de tensão e dos resistores. É necessário, então, formular um sistema de equações lineares simultâneas com as quantidades i_k como incógnitas. Cada uma das equações de tal sistemas linear é determinada pela aplicação da lei de Kirchoff em torno das malhas. Por exemplo, para a malha definida pela corrente i_1, temos:

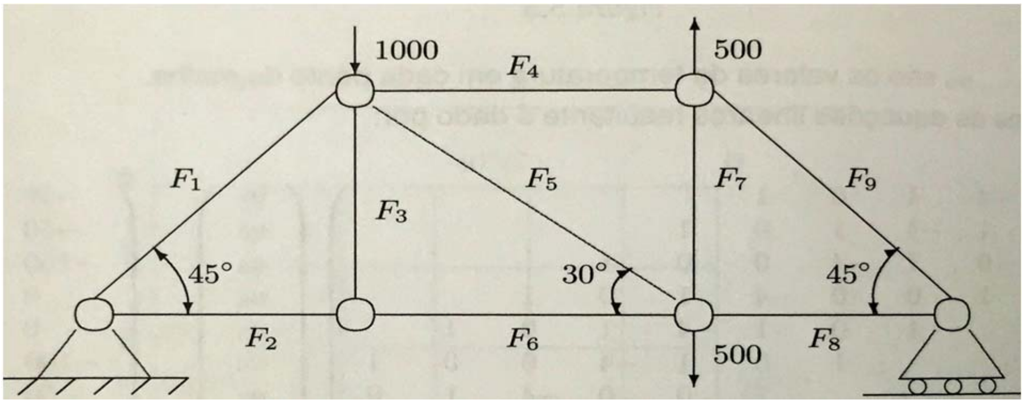
$$R_1 i_1 + R_2(i_1 - i_2) + R_7(i_1 - i_4) = V_1.$$

Fazendo um cálculo semelhante para as outras malhas, obtemos um sistema de seis equações lineares nas incógnitas i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 e i_6. Assim, resolva este problema para os seguintes dados:

$$R = (10, 13, 7, 12, 20, 5, 6, 10, 8, 9, 20)^t \quad \text{e} \quad V = (29, 32, 37, 24, 24, 34)^t,$$

em que R está em Ohms e V em Volts, usando um método numérico.

Q3: Numa treliça estaticamente determinada com juntas articuladas, como na figura abaixo,



a tensão F_i, em cada componente pode ser obtida da seguinte equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 0.7071 & 0 & 0 & -1 & -0.8660 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7071 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.7071 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7071 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8660 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.7071 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} 0 \\ -1000 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \\ -500 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

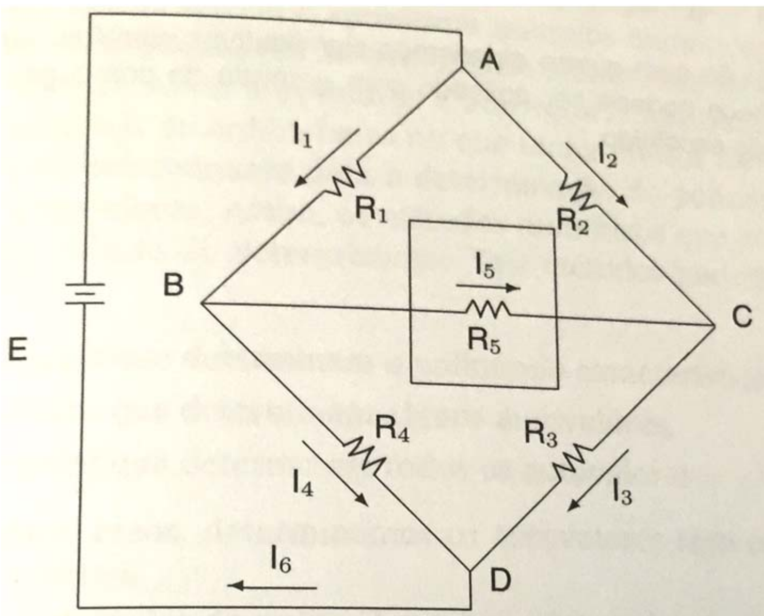
Observe que as equações são obtidas fazendo-se a soma de todas as forças horizontais ou verticais em cada junta igual a zero. Além disso, a matriz dos coeficientes é bastante esparsa e, assim, um candidato natural é o método de Gauss-Seidel.

(a) As equações pode ser rearranjadas de modo a se obter uma matriz estritamente diagonalmente dominante?

(b) É o sistema linear convergente se iniciarmos com um vetor com todas as componentes iguais a zero?

(c) Resolva o sistema linear pelo método de Gauss-Seidel, partindo do vetor nulo e obtendo a solução aproximada com precisão 0,0001.

Q4: O circuito mostrado abaixo é frequentemente usado em medidas elétricas e é conhecido com uma Ponte de Wheatstone.



As equações que governam o sistema linear são obtidas a partir da lei de Kirchoff. Para a malha fechada através da bateria e ao longo de ABCD, temos:

$$I_1R_1 + I_4R_4 - E = 0 \qquad (1)$$

Para a malha fechada ABCA, temos:

$$I_1R_1 + I_5R_5 - I_2R_2 = 0 \qquad (2)$$

Para a malha fechada BCDB,

$$I_5R_5 + I_3R_3 - I_4R_4 = 0 \qquad (3)$$

Para o nó A,

$$I_6 = I_1 + I_2 \qquad (4)$$

Para o nó B,

$$I_1 = I_5 + I_4 \qquad (5)$$

Para o nó C,

$$I_3 = I_2 + I_5 \qquad (6)$$

mm que Ri representam as resistências, I_i, as correntes e E, a voltagem aplicada. Determinar as correntes no problema proposto quando:

$$E=20\ V,\ R_1 = 10\ Ohms \text{ e } R_2=R_3=R_4=R_5 = 100\ Ohms,$$

usando método numérico.

Fonte: FRANCO, Neide B. *Cálculo Numérico*. São Paulo: Pearson, 2006. Páginas: 196-202.