Adriano Pedreira Cattai

apcattai@yahoo.com.br – didisurf@gmail.com

Universidade Federal da Bahia — UFBA :: 2006.2

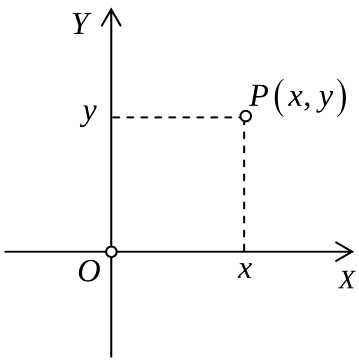
Departamento de Matemática — Cálculo II (MAT 042)

Coordenadas polares. Transformações entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas. Traçado de curvas em coordenadas polares.

1 Introdução – Sistemas de coordenadas: cartesianas e polares.

Deve-se a René Descartes (1596 – 1650), matemático e filósofo francês, o estabelecer da correspondência biunívoca entre pontos de um plano e pares de números reais. Duas retas, perpendiculares entre si, cujo ponto de interseção chama-se de origem O, que auxilia no processo de construção de pontos e de lugares geométricos. Esse sistema divide o plano em quatro regiões as quais são chamadas de *quadrantes*.

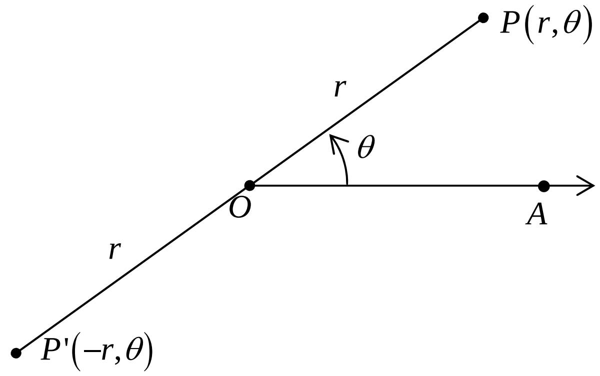
Qualquer ponto P do plano pode ser representado pelo o par (x, y), onde o número rela x, a *abscissa*, nos diz o quanto está afastado da origem a componente horizontal, levando em consideração os sinais + à direita, e – à esquerda da origem; e o número y, a *ordenada*, o quanto está afastado da origem a componente vertical, levando em consideração os sinais + acima, e – abaixo da origem. Esses números x e y são as coordenadas cartesianas do ponto P.



O uso de um par de eixos (ortogonais ou não) não é única maneira de se estabelecer correspondências entre pontos do plano e pares ordenados de números reais. Existe outro sistema, muito útil e bastante utilizado que usa um único eixo, que é o de *coordenadas polares*, onde consideramos uma semi-reta horizontal e fixa, chamada de *Eixo Polar*, e de origem num ponto O, chamado de *Pólo*. A semi-reta perpendicular que passa por O chamaremos de eixo a 90º ou *eixo normal*.

Qualquer ponto P do plano será localizado no sistema de coordenadas polares pelo par (r, θ) denominado coordenadas polares, onde r indica a distância do ponto P ao pólo O e é denominado *raio vetor* ou *raio polar*, e o ângulo θ obtido da rotação do eixo polar até o segmento $\overline{OP}$, o qual chamaremos de *ângulo vetorial* ou *ângulo polar* de P.

Consideramos o ângulo θ positivo quando a rotação do eixo polar é dada no sentido anti-horário e, o negativo, no sentido horário, tal como fazemos no estudo de trigonometria. Se $P(r,\theta)$ possui raio vetor negativo $(r<0)$ devemos rotacionar o eixo polar em $\theta+\pi$ e marcar $|r|$ unidades a partir do pólo O.



É evidente que um par (r,θ) determina um e apenas um ponto no plano coordenado. O inverso, entretanto, não é verdade, pois um ponto P determinado pelas coordenadas (r,θ) é também determinado por qualquer um dos pares de coordenadas representadas por $(r,\theta+2k\pi)$ onde k é qualquer inteiro, ou por qualquer um dos pares de coordenadas representadas por $(-r,\theta+k\pi)$ onde k é qualquer inteiro ímpar. De forma resumida temos

$$(r,\theta)=\left((-1)^k\cdot r,\theta+k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

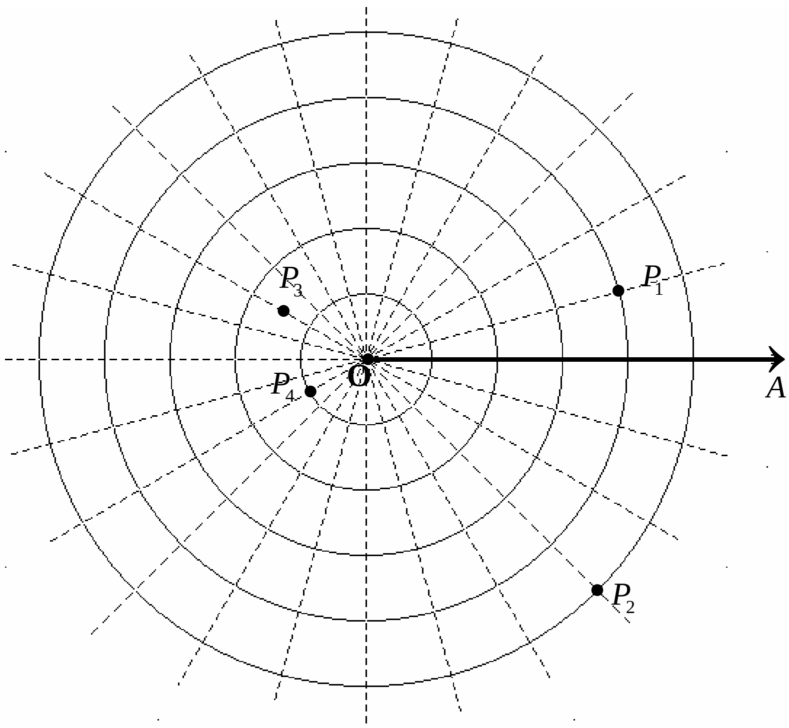
Exemplo 1: O ponto $P\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$ pode ser representado tanto por $A\left(2,\dfrac{7\pi}{3}\right)$ quanto por $B\left(-2,\dfrac{10\pi}{3}\right)$, pois $2=(-1)^2\cdot 2\ e\ \dfrac{7\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}+2\pi$, e $-2=(-1)^3\cdot 2\ e\ \dfrac{10\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}+3\pi$.

Para maioria de nossa finalidade é suficiente um par de coordenadas polares para qualquer ponto no plano. Uma vez que nossa escolha a este respeito é ilimitada, convencionaremos, a menos que o contrário seja especificado, tomar o raio vetor r de um ponto como não negativo e seu ângulo vetorial θ com valores compreendidos entre 0º e 360º, podendo ser zero, ou seja,

$$\begin{cases} r\geq 0 \\ 0^\circ\leq\theta<360^\circ \end{cases}$$

e esse par, chamaremos o *conjunto principal* de coordenadas polares do ponto. As coordenadas do pólo O podem ser representadas por $(0,\theta)$, onde θ é qualquer ângulo. pode-se adotar também a determinação principal do pólo como sendo $(0,0)$. O ângulo vetorial pode ser expresso seja em graus ou em radianos.

A marcação de pontos no sistema de coordenadas polares é grandemente facilitada pelo uso de papel de coordenadas polares, o qual consiste de uma série de circunferências concêntricas e de retas concorrentes. As circunferências têm seu centro comum no pólo e seus raios são múltiplos inteiros do menor tomando como unidade de medida. Todas as retas passam pelo pólo e os ângulos formados por cada par de retas adjacentes são iguais. A seguinte figura, ilustra tal papel e nela estão marcadas os pontos $P_1(4,15^o)$, $P_2\left(5,\frac{7\pi}{4}\right)$, $P_3\left(\frac{3}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$ e $P_4(1,210^o)$.

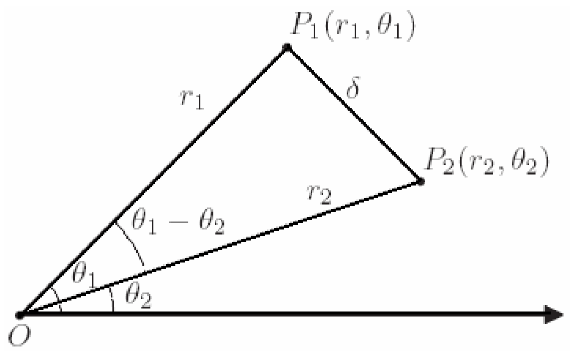


2 Distância entre dois pontos em coordenadas polares

Sejam $P_1(r_1,\theta_1)$ e $P_2(r_2,\theta_2)$ dois pontos do plano expressos em coordenadas polares. Observe, na figura ao lado, que a distância entre eles é conseqüência imediata da lei dos cossenos.

De fato, no triângulo ΔOP_1P_2, temos que

$$\delta^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$d(P_1,P_2) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}.$$



3 Equação Polar e Conjunto Abrangente

Uma equação polar é qualquer equação do tipo $f(r,\theta)=0$.

A relação dada acima representa um lugar geométrico. Por exemplo , $C:\ r=3$ é a equação que descreve uma circunferência de cen-tro no pólo e raio 3 unidades.

Observe que o ponto $P\left(-3,\dfrac{\pi}{2}\right)\in C$ pois, $\left(3,\dfrac{\pi}{2}\right)$ satisfaz a equação de C. Assim,vemos que é possível termos um ponto que pertença ao lugar geométrico definido por $f(r,\theta)=0$ sem que esta igualdade seja verificada. Além disso, equações polares distin-tas podem representar o mesmo lugar geométrico como, por exemplo, $r=3$ e $r=-3$. Isto nos motiva a dizer que duas equações polares $f(r,\theta)=0$ e $g(r,\theta)=0$ são equivalentes se representam o mesmo lugar geométrico. Temos ainda que as equações equivalentes se classificam, respectivamente, em triviais e não triviais as que possuem ou não o mesmo conjunto solução.

Exemplo 2: As equações $C_1:\ r=3$ e $C_2:\ 2r=6$ representam uma circunferência de centro no pólo e raio 3 e apresentam o mesmo conjunto solução $\left(S=\left\{(3,\theta);\theta\in\mathbb{R}\right\}\right)$, portanto, são equações equivalentes triviais. Já as equações polares $C_1:\ r=3$ e $C_2:\ r=-3$ representam também uma circunferência de centro no pólo e raio 3, porém, não apresentam o mesmo conjunto solução $\left(S_1=\left\{(3,\theta);\theta\in\mathbb{R}\right\},\ S_2=\left\{(-3,\theta);\theta\in\mathbb{R}\right\}\right)$, portanto, são equações equivalentes não triviais.

Podemos concluir que se um par de coordenadas polares de um ponto P não satisfaz a uma equação polar, não podemos garantir a **não existência** de um outro par de coordenadas polares deste mesmo ponto que satisfaça a esta equação. Em outras palavras, o fato que um par de coordenadas polares de um ponto *P* não satisfaz a uma equação polar de uma curva, **não** garante que este ponto não pertença à esta curva.

Definição (*Conjunto Abrangente*): Um conjunto *M* de equações polares é chamado *conjunto abrangente* de uma curva *C*, definida pela equação polar $f(r,\theta)=0$, se qualquer ponto de C, distinto do polo, com qualquer par de coordenadas polares, satisfaz a uma das equações de M.

Teorema: Seja $f(r,\theta)=0$ uma equação polar de uma curva C. As equações polares da forma

$$A(C)=\left\{f\left((-1)^n r,\theta+n\pi\right)=0;n\in\mathbb{Z}\right\}$$

são equivalentes a equação $f(r,\theta)=0$, ou seja representam também a curva C. Mais ainda, $A(C)$ é um conjunto abrangente de C

Uma equação polar é chamada de abrangente se o seu conjunto abrangente é unitário.

Exemplo 3: Dados, $C_1: r=2$, e $B_1=\{r=2\}$ e $B_2=\{r=\pm 2\}$, verifique se B_1 e B_2 são conjuntos abrangentes de C_1.

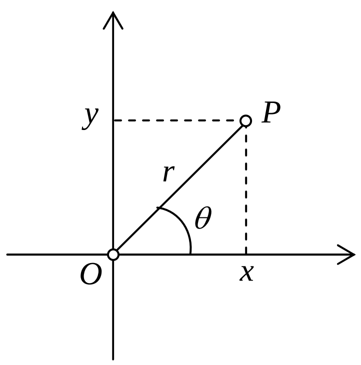
Solução. Seja $P(-2,\theta)$. Note que $P\in C_1$, $P\in B_2$ e $P\notin B_1$. Portanto, somente B_2 é abrangente.

Exemplo 4: (**a**) No exemplo anterior, tomando $P\left((-1)^n 2,\theta+n\pi\right)$, note que para n par, temos $P(2,\theta+(2k+1)\pi)$ e para n ímpar temos $P(-2,\theta+(2k+1)\pi)$, e portanto $B_2=\{r=\pm 2\}$ é conjunto abrangente de $C_1: r=2$.

(**b**) Seja $C_2: r=2-3\cos\theta$. Para $P\left((-1)^{2k+1} r,\theta+(2k+1)\pi\right)$, $-r=-2+3\cos(\theta+(2k+1)\pi)$ $=-2+3(-\cos\theta)=-2-3\cos\theta$, e para $P\left((-1)^{2k} r,\theta+(2k)\pi\right)$, $r=2-3\cos(\theta+2k\pi)=2-3\cos\theta$. Portanto, $A(C_2)=\{r=-2-3\cos\theta, r=2-3\cos\theta\}$.

4 Transformações entre coordenadas polares e retangulares

Façamos coincidir as origens e os eixos Ox e o polar dos sistemas de coordenadas cartesianas e polares, respectivamente. Seja P um ponto tal que, (x,y) são as suas coordenadas cartesianas e (r,θ) as suas coordenadas polares. De acordo com a figura, temos imediatamente as relações:



$$\begin{cases} x=r\cdot\cos\theta \\ y=r\cdot\sin\theta \end{cases}$$

Como $r^2=x^2+y^2$, temos que

$$r=\pm\sqrt{x^2+y^2},\quad \cos\theta=\pm\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right),\quad \sin\theta=\pm\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Acabamos de provar o seguinte teorema:

Teorema 1: Se o pólo e o eixo polar do sistema coordenado polar coincidem, respectivamente, com a origem e com o eixo Ox positivo do sistema coordenado retangular, então as transformações entre estes dois sistemas podem ser efetuadas pelas equações de transformação

$$x = r\cdot\cos\theta, \qquad y = r\cdot\sin\theta, \qquad r = \pm\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$
$$r = \pm\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \cos\theta = \pm\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\theta = \pm\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Exemplo 5: (a) Determinar as coordenadas cartesianas do ponto A cujas coordenadas polares são $(4,120^{o})$. (b) Determinar as coordenadas polares do ponto B cujas coordenadas retangulares são $\left(1,-\sqrt{3}\right)$.

Solução. (a) Nesse caso $r = 4$ e $\theta = 120^{o}$, logo pelo Teorema 1,

$$x = r\cdot\cos\theta = 4\cdot\cos 120^{o} = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \quad \text{e} \quad y = r\cdot\sin\theta = 4\cdot\sin 120^{o} = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},$$

logo, as coordenadas cartesianas do ponto A são $\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$.

(b) Temos, $x = 1$ e $y = -\sqrt{3}$, logo $r = \pm\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \pm 2$. Se $r = 2$, então

$$1 = 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad -\sqrt{3} = 2\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

assim $\theta = 300^{o}$. Agora, se $r = -2$, teremos

$$1 = -2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad -\sqrt{3} = -2\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

logo $\theta = 120^{o}$. Portanto, as coordenadas polares do ponto B são $(2, 300^{o})$ ou $(-2, 120^{o})$, como queremos $r > 0$, ficamos com $(2, 300^{o})$.

Exemplo 6: Determinar a equação retangular do lugar geométrico cuja equação polar é $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$.

Solução. Eliminando o denominador, chegamos a $r - r\cdot\cos\theta = 2$. Substituindo-se r e $r\cdot\cos\theta$ por seus valores em função de x e y dado pelo Teorema 1, obtemos

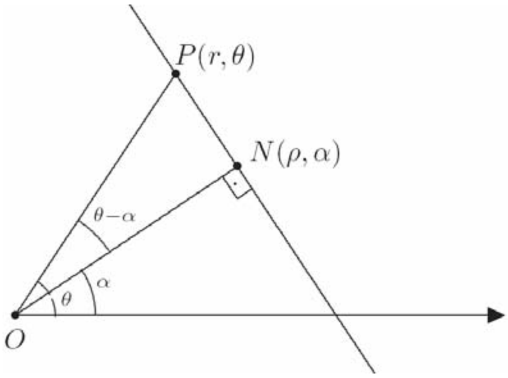
$$\pm\sqrt{x^2+y^2} - x = 2.$$

Transpondo-se $-x$, elevando ao quadrado e simplificando, obtemos, para a equação retangular, a parábola $y^2 = 4x + 4$.

5 A Linha Reta em sua Forma Polar

Consideremos inicialmente uma reta que não passa pelo pólo e tomemos os pontos $P(r,\theta)$ e qualquer $N(\rho,\alpha)$ de modo que o triângulo *ONP* seja retângulo em *N*. Portanto,

$$\cos(\theta-\alpha)=\frac{\rho}{r}\Rightarrow \rho=r\cos(\theta-\alpha).$$



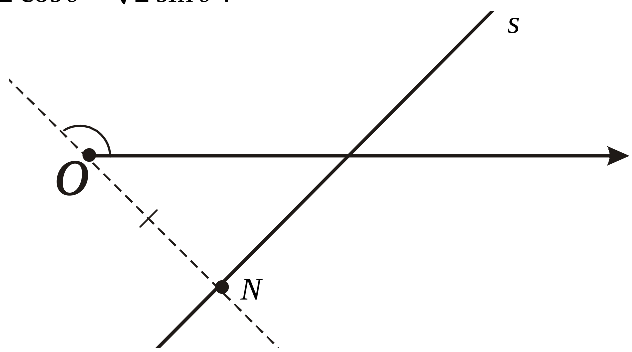
Aplicando o cosseno da diferença, temos

$$\frac{\rho}{r}=\cos(\theta-\alpha)=\cos\theta\cos(-\alpha)-\sin\theta\sin(-\alpha)$$
$$=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha.$$

Ou ainda,

$\frac{1}{r}=\frac{\cos\alpha}{\rho}\cos\theta+\frac{\sin\alpha}{\rho}\sin\theta.$ Pondo $A=\frac{\cos\alpha}{\rho}$ e $B=\frac{\sin\alpha}{\rho}$, podemos escrever a equação numa forma mais simples, $\frac{1}{r}=A\cos\theta+B\sin\theta.$

Exemplo 7: Esboce a reta *s* de equação $s:\frac{1}{r}=\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta$.



Solução: Como $A=\sqrt{2}$ e $B=-\sqrt{2}$, temos que

$$\sqrt{2}=\frac{\cos\alpha}{\rho} \text{ e } -\sqrt{2}=\frac{\sin\alpha}{\rho},$$

ou seja, $-1=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$, e logo $\alpha=\frac{3\pi}{4}$.

Portanto $\rho=\frac{\cos\left(3\pi/4\right)}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$, daí, $N\left(-\frac{1}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$.

Exemplo 8: Esboce as retas de equações: (**a**) $\frac{1}{r}=\frac{1}{4}\cos\theta+\frac{3}{4}\sin\theta$ e (**b**) $\frac{1}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$. Transforme para coordenadas cartesianas e compare a construção.

5.1 Casos Particulares de Retas

5.1.1 Reta que passa pelo pólo

A equação de uma reta que passa pelo pólo depende somente do ângulo vetorial, ou seja,

$$\begin{cases} s:\theta=\theta_0 \\ \forall\ r \end{cases} \Rightarrow\ s:\theta=\theta_0.$$

Exemplo 8: Determine as equações das retas suporte dos lados do quadrado $ABCD$ sabendo que $A(0,31°)$ e $C\left(2\sqrt{2},45°\right)$.

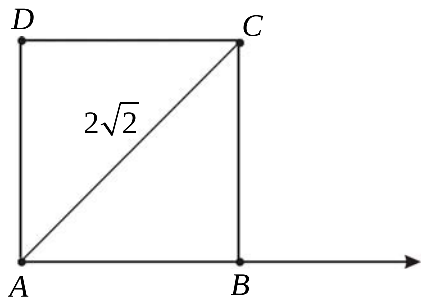
Solução: Temos que a diagonal do quadrado mede $2\sqrt{2}$ $u.m$, logo cada lado mede 2 $u.m$. Portanto, $B(2,0°)$ e $D\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$, para cada lado, temos as seguintes equações para as retas suporte:

$\overline{AB}: \ \theta = 0°$

$\overline{BC}: \ 2 = r\cos(\theta - 0) \ \Rightarrow \ 2 = r\cos\theta$

$\overline{CD}: \ 2 = r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \ \Rightarrow \ 2 = r\sin\theta$

$\overline{AD}: \ \theta = \frac{\pi}{2}$



5.1.2 Reta paralela ao eixo polar

Se a reta é paralela ao eixo polar, e dista $\rho > 0$ unidades do mesmo, sua equação é da forma

$$r\sin\theta = \pm\rho.$$

De fato, basta em $\rho = r\cos(\theta - \alpha)$ substituir α por $\frac{\pi}{2}$. Como ilustrou o exemplo anterior, na determinação da reta suporte do lado $\overline{CD}$.

5.1.3 Reta perpendicular ao eixo polar

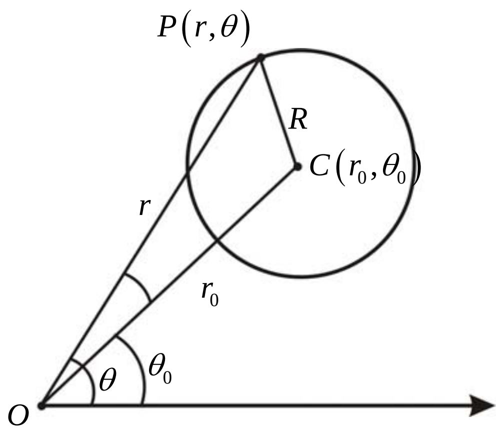
Se a reta é perpendicular ao eixo polar, e dista $\rho > 0$ unidades do mesmo, sua equação é da forma

$$r\cos\theta = \pm\rho.$$

De fato, basta em $\rho = r\cos(\theta - \alpha)$ substituir α por $0°$. Como ilustrou o exemplo anterior, na determinação da reta suporte do lado $\overline{BC}$.

6 A Circunferência em sua Forma Polar

Seja $C(r_0, \theta_0)$ o centro de uma circunferência qualquer de raio R, como mostra a figura ao lado. Seja $P(r,\theta)$ um ponto da circunferência. Tracemos os raios vetores de P e C, e o raio da circunferência $\overline{CP}$, assim formando o



triângulo *OPC*, e deste triângulo utilizando a lei dos co-

senos, temos: $R^2 = r^2 + r_0^2 - 2\,r\,r_0\cos(\theta - \theta_0)$, ou

$$r^2 - 2\,r\,r_0\cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 = R^2$$

para a equação polar procurada.

Os casos especiais são frequentemente úteis e estão incluídos no seguinte teorema.

Teorema 2: (**i**) A circunferência cujo centro é o ponto $C(r_0, \theta_0)$ e cujo raio é igual a R tem por equação polar

$$r^2 - 2\,r\,r_0\cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 = R^2.$$

(**ii**) Se o centro está no pólo, então sua equação polar é da forma

$$r = \pm R.$$

(**iii**) Se a circunferência passa pelo pólo e seu centro se encontra sobre eixo polar, então sua equação polar é da forma

$$r = \pm 2R\cos\theta$$

onde o sinal positivo ou negativo indica se o centro está à direita ou à esquerda do pólo.

(**iv**) Se a circunferência passa pelo pólo e seu centro se encontra sobre o eixo a 90°, então sua equação polar é da forma

$$r = \pm 2R\sin\theta$$

onde o sinal positivo ou negativo indica se o centro está acima ou abaixo do pólo.

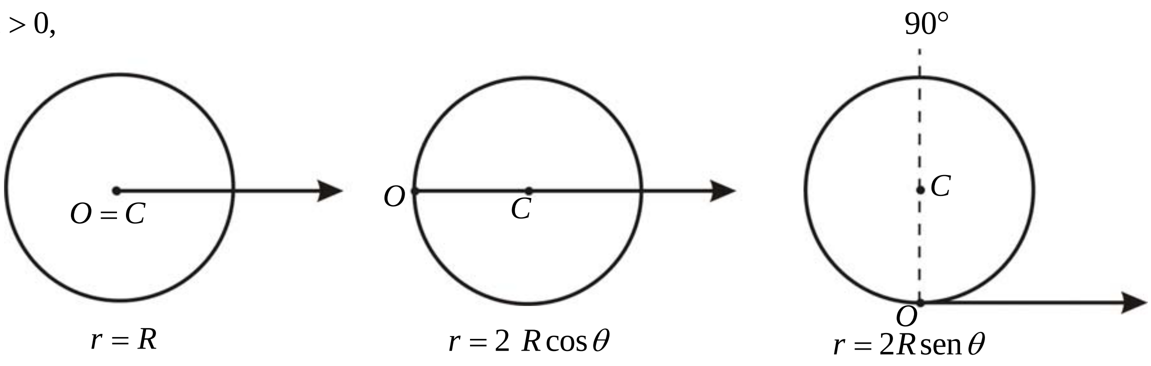
Demonstração:

(**ii**) Quando o centro está no pólo, temos $r_0 = 0$ e logo $r = \pm R$.

(**iii**) Quando a circunferência passa pelo pólo e o centro se encontra no eixo polar, temos $\theta_0 = 0$ e r_0 = R, logo $r^2 - 2\,r\,R\cos(\theta - 0) + R^2 = R^2$, e portanto $r = \pm 2\,R\cos\theta$.

(**iv**) Quando a circunferência passa pelo pólo e seu centro se encontra sobre o eixo a 90°, temos $\theta_0 = 90°$ e r_0 = R, logo $r^2 - 2\,r\,R\cos(\theta - 90^{\circ}) + R^2 = R^2$, e portanto $r = \pm 2R\,\mathrm{sen}\,\theta$.

$R > 0$,



Exemplo 9: Exiba as equações em forma polar das circunferências: (**a**) $C(0,0^{\circ})$, $R=2$, (**b**) $C(1,30^{\circ})$, $R=3$.

Solução: (**a**) Substituindo os valores de R = 2, r_0 = 0 e $\theta = 0°$ em $r^2 - 2r\,r_0\cos(\theta-\theta_0) + r_0^{\,2} = R^2$, temos que, $r^2 - 2r\,0\cos(\theta-0)+0^2 = 2^2$, ou seja, $r^2 = 4$ e portanto $r = \pm 2$.

(**b**) Analogamente, R = 3, r_0 = 1 e $\theta = 30°$, temos que $r^2 - 2r1\cos(\theta - 30^{\circ}) + 1^2 = 3^2$, mais ainda, $r^2 - 2r(\cos\theta\cos 30^{\circ} + \sin\theta\sin 30^{\circ}) = 8$ e logo $r^2 - r\sqrt{3}\cos\theta - r\sin\theta - 8 = 0$.

Observação: Esse último exemplo nos sugere a seguinte análise, a partir da equação $r^2 - 2r\,r_0\cos(\theta-\theta_0) + r_0^{\,2} = R^2$.

$$\begin{aligned} r^2 - 2r\,r_0\cos(\theta-\theta_0) + r_0^{\,2} - R^2 &= 0 \\ r^2 - 2r\,r_0(\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0) + r_0^{\,2} - R^2 &= 0 \\ r^2 - 2r_0\cos\theta_0\, r\cos\theta - 2r_0\sin\theta_0\, r\sin\theta + r_0^{\,2} - R^2 &= 0 \end{aligned}$$

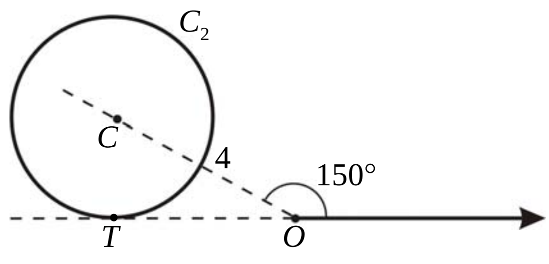
se fizermos $A = -2r_0\cos\theta_0$, $B = -2r_0\sin\theta_0$ e $C = r_0^{\,2} - R^2$, teremos

$$r^2 + Ar\cos\theta + Br\sin\theta + C = 0.$$

Exemplo 10: Dê uma equação polar da circunferência C_2 concêntrica com a circunferência $C_1 : r^2 + 4\sqrt{3}r\cos\theta - 4r\sin\theta + 7 = 0$ e que é tangente ao eixo polar.

Solução: Conforme vimos na observação acima, coloquemos $\begin{cases} A = -2r_0\cos\theta_0 = 4\sqrt{3} \\ B = -2r_0\sin\theta_0 = -4 \end{cases}$, dividindo B por A temos que $\tan\theta_0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, logo $\theta_0 = 150°$ e substituído esse valor numa das equações do sistema, temso que $r_0 = 4$.

Conforme a figura, sendo T o ponto de tangencia com o eixo polar, temos no triângulo retângulo COT que $\sin 30^{\circ} = \dfrac{\overline{CT}}{4} \Rightarrow R = \overline{CT} = 2$. Portanto



$$\begin{cases} A = -2\cdot 4\cos 150^{\circ} = -8\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\sqrt{3} \\ B = -2\cdot 4\sin 150^{\circ} = -8\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4 \\ C = r_0^{\,2} - R^2 = 16 - 4 = 12 \end{cases} \Rightarrow \quad C_2 : r^2 + 4\sqrt{3}\cos\theta - 4r\sin\theta + 12 = 0.$$

Exemplo 11: Dê uma equação polar da circunferência *C₁* com centro $C(-2,30°)$ e que passe pelo pólo. (Resp. $C_1: r^2 + 2\sqrt{3}\,r\cos\theta + 2r\sin\theta = 0$)

7 Traçado de curvas em coordenadas polares

O traçado de curvas a partir de suas equações polares, $f(r,\theta)=0$, é dado de maneira muito semelhante ao traçado de curvas para equações retangulares. Para nossas finalidades, o traçado de curvas em coordenadas polares consistirá nas seguintes distintas etapas:

(1) Determinação das interseções sobre os eixos polar e a 90º;

(2) Determinação da simetria do lugar geométrico em relação aos eixos polar e a 90º e ao pólo;

(3) Determinação da extensão do lugar geométrico;

(4) O cálculo das coordenadas de um número suficiente de pontos a fim de se obter um gráfico adequado;

(5) O desenho definitivo do lugar geométrico

(6) A transformação da equação polar dada em sua forma retangular.

Note que, o traçado de curvas em coordenadas polares requer certas precauções que são desnecessárias em coordenadas cartesianas, pois um ponto no plano coordenado cartesiano tem um único par de coordenadas, o que não acontece, como vimos no sistema coordenado polar. Pode ocorrer, então, que enquanto um par de coordenadas polares de um ponto *P* sobre um lugar geométrico pode satisfazer sua equação, outros conjuntos de coordenadas de *P* não podem. Isto é ilustrado pela equação $r = a\cdot\theta, a \neq 0$, que representa uma curva conhecida como espiral de Arquimedes. Além disso, algumas vezes um lugar geométrico pode ser representado por mais de uma equação polar, como por exemplo, a circunferência cujo centro está no pólo e cujo raio igual a $a \neq 0$, pode ser representada por $r = a$ ou $r = -a$. As equações que representam o mesmo lugar geométrico são denominadas de *Equações Equivalentes*.

Vejamos então uma discussão de cada etapa.

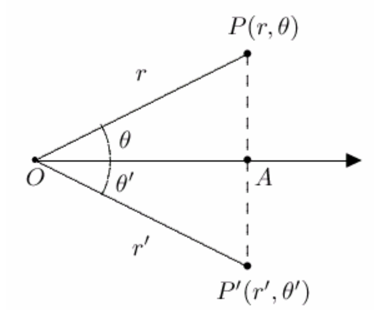
(1) **Interseções**: As interseções sobre o eixo polar, quando existirem, podem ser obtidas resolvendo-se para *r* a equação polar dada quando θ recebe sucessivamente os valores $0, \pm\pi, \pm 2\cdot\pi$, e, em geral, o valor $n\cdot\pi$, onde *n* é qualquer inteiro. Similarmente, se há quaisquer interseções sobre o eixo a 90°, elas posem ser obtidas atribuindo-se a $\frac{n}{2}\pi$, onde *n* é qualquer

inteiro. Se existe um valos de θ tal que $r=0$ a partir da equação dada, o lugar geométrico passa pelo pólo.

(2) **Simetrias**: Dizemos que dois pontos P e P' são *simétricos* em relação a um determinado conjunto K se a distância entre este conjunto e os pontos forem iguais. Dentre as simetrias, destacamos as simetrias *central* e *axial*, onde os conjuntos K são um ponto e uma reta, respectivamente. Nosso interesse será verificar simetrias em relação ao eixo polar, ao eixo a 90° e ao pólo, que são simetrias axiais e central.

(2.1) *Simetria em relação ao eixo polar*:

Dado um ponto $P(r,\theta)$, o seu simétrico em relação ao eixo polar é o ponto $P'(r',\theta')$ se, e somente se,



$$|r'|=|r| \text{ e } \theta'=-\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$

ou

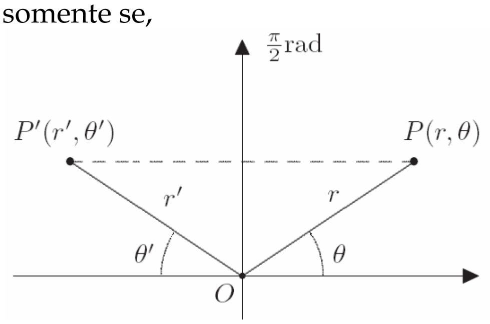
$$|r'|=-|r| \text{ e } \theta'=-\theta+(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Podemos nos limitar a trabalhar com:

$$(r,\theta) \text{ é simétrico a } (r,-\theta)=(-r,\pi-\theta).$$

(2.2) *Simetria em relação ao eixo a 90°*:

Dado um ponto $P(r,\theta)$, o seu simétrico em relação ao eixo a 90° é o ponto $P'(r',\theta')$ se, e somente se,



$$|r'|=|r| \text{ e } \theta'=-\theta+(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$

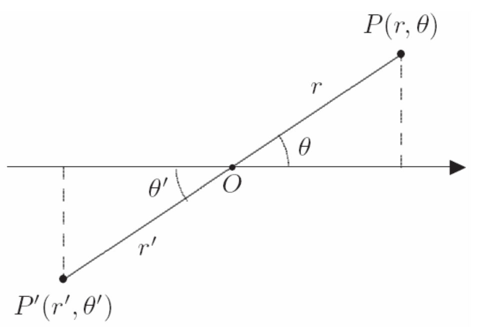
ou

$$|r'|=-|r| \text{ e } \theta'=-\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Podemos nos limitar a trabalhar com:

$$(r,\theta) \text{ é simétrico a } (-r,-\theta)=(r,\pi-\theta).$$

(2.3) *Simetria em relação ao pólo*:



Dado um ponto $P(r,\theta)$, o seu simétrico em relação ao pólo é o ponto $P'(r',\theta')$ se, e somente se,

$$|r'|=|r| \text{ e } \theta'=\theta+(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$

ou

$$|r'|=-|r| \text{ e } \theta'=-\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Podemos nos limitar a trabalhar com:

$$(r,\theta) \text{ é simétrico a } (r,\theta+\pi)=(-r,\theta).$$

Resumimos estes resultados na seguinte tabela:

Simetria em relação ao	A equação polar permanece sem modificação, ou é modificada para uma equação equivalente, quando
Eixo polar	(a) θ é substituído por $-\theta$, ou (b) θ é substituído por $\pi-\theta$ e *r* é substituído por – *r*
Eixo a 90°	(a) θ é substituído por $\pi-\theta$, ou (b) θ é substituído por $-\theta$ e *r* é substituído por – *r*
Pólo	(a) θ é substituído por $\pi+\theta$, ou (b)*r* é substituído por – *r*

(3) **Extensão do lugar geométrico**: Tentaremos inicialmente, se necessário, resolver equação $f(r,\theta)=0$ para *r* em função de θ, de maneira que temos $r=f(\theta)$. Aí, se *r* for finito para todos os valores de θ, o lugar geométrico é uma curva fechada. Se, entretanto, r torna infinito para alguns valores de θ, o lugar geométrico não pode ser fechado.

(4) **Cálculo das coordenadas**: Atribuindo–se a θ um valor particular, podemos obter o correspondente valor real, ou valores, de r, quando existirem, a partir da equação $r=f(\theta)$. Conforme finalidade é suficiente tomar valores de θ a intervalos de 15° ou 30°.

(5) **Desenho do lugar geométrico**: Os pontos sobre o lugar geométrico podem ser marcados diretamente a partir dos valores das coordenadas obtidos em (4), e analisando a concordância com os itens (1), (2) e (3), pode-se geralmente para curvas contínuas, ser traçadas por esses pontos.

(6) **Transformação da equação polar para a sua forma cartesiana**: Essa transformação deve ao fato que a forma cartesiana é, frequentemente, útil como uma comprovação do gráfico.

Exemplo 12: Traçar a curva cuja equação polar é $r=2(1-\cos\theta)$.

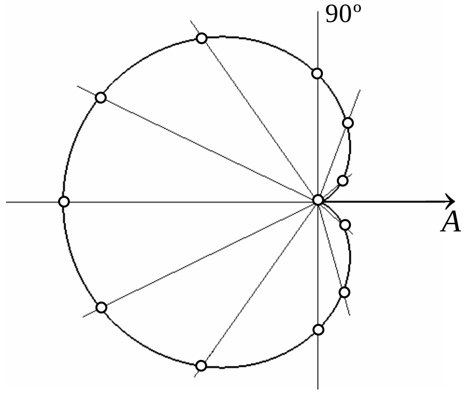
Solução: (1) *Interseções* – A equação $r=2(1-\cos\theta)$ possui interseção no eixo polar nos pontos $(0,0)$ e $(4,\pi)$, e sobre o eixo a 90° nos pontos $\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$ e $\left(2,-\frac{\pi}{2}\right)$, pois, substituindo θ por 0, π, $\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$ na equação dada, temos respectivamente, $r=0$, $r=4$, $r=2$ e $r=2$. Novos valores para *r* não serão obtidos para $\theta=-\pi,\pm 2\pi$, etc, e para $\theta=\pm\frac{3\pi}{2},\pm\frac{5\pi}{2}$, etc.

(2) *Simetria*: Se θ é substituído por $-\theta$ a equação permanece sem modificação, pois $\cos(-\theta)=\cos\theta$. Logo, o lugar geométrico dessa equação é simétrico em relação ao eixo polar. Aplicando outras substituições, como na tabela, não há simetria em relação ao eixo a 90° e ao pólo.

(3) *Extensão*: Visto que o valor absoluto de $\cos\theta$ nunca é maior do que 1 para todos os valores de θ, logo a equação mostra que *r* é finito para todos os valores de θ e, portanto o lugar geométrico é uma curva fechada. *r* assumi valor máximo quando $1-\cos\theta$ é máximo, ou seja, quando $\cos\theta$ for mínimo, logo $\cos\theta=-1$ e $\theta=\pi$, e daí $r=4$; analogamente, *r* é mínimo quando $\theta=0$ e daí $r=0$.

(4) *Cálculo das coordenadas*: Como o lugar geométrico é simétrico em relação ao eixo polar, basta atribuir valores para θ entre 0 e π, como na tabela abaixo.

θ	$\cos\theta$	$1-\cos\theta$	r
0º	1	0	0
30º	0,866	0,134	0,268
60º	0,5	0,5	1
90º	0	1	2
120º	– 0,5	1,5	3
150º	– 0,866	1,866	3,732
180º	– 1	2	4



Exemplo 13: Traçar a curva cuja equação polar é $r^2=4\cdot\cos(2\theta)$.

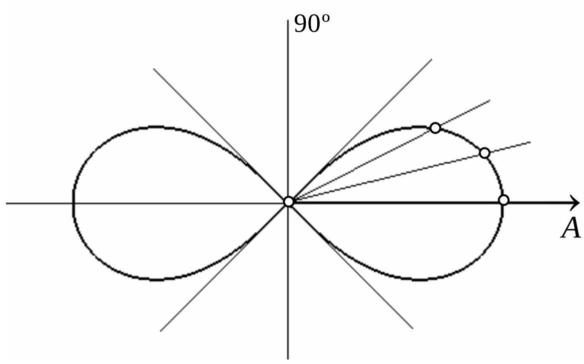
Solução: (1) *Interseções* – As interseções sobre o eixo polar são dadas nos pontos $(\pm2,0)$ ou $(\pm2,\pi)$. Note que não há interseção sobre o eixo a 90°, já que $\theta=\dfrac{n\pi}{2}$, onde *n* é qualquer inteiro impar, *r* é complexo. Para $\theta=45^\circ$, $r=0$, de maneira que o pólo se encontra sobre o lugar geométrico.

(2) *Simetria*: Note que a equação satisfaz todos os testes de simetria do *item* (2). Logo, o lugar geométrico é simétrico em relação aos eixos polar e a 90° e ao pólo.

(3) *Extensão*: Visto que o valor máximo de $\cos 2\theta$ é 1 para todos os valores de θ, logo *r* é finito para todos os valores de θ e assume valor máximo 2, e o lugar geométrico é uma curva fechada.

(4) *Cálculo das coordenadas*: Como o lugar geométrico é simétrico em relação aos eixos polar e ao a 90º e ao pólo, basta atribuir valores para 2θ entre 0 e $\dfrac{\pi}{2}$, logo, θ entre 0 e $\dfrac{\pi}{4}$,como na tabela abaixo.

θ	$\cos\theta$	$r=\pm2\sqrt{\cos(2\theta)}$
0º	1	±2
15º	0,866	$\pm1,86$
30º	0,5	$\pm1,41$
45º	0	0



8 Traço Rápido de curvas

Para traçarmos rapidamente o gráfico de uma curva em coordenadas polares devemos inicialmente identificá-las. Trataremos, portanto, de algumas curvas em coordenadas polares que são facilmente identificáveis. Use o Winplot <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html> para auxiliar na obtenção de gráficos.

8.1 Limaçons

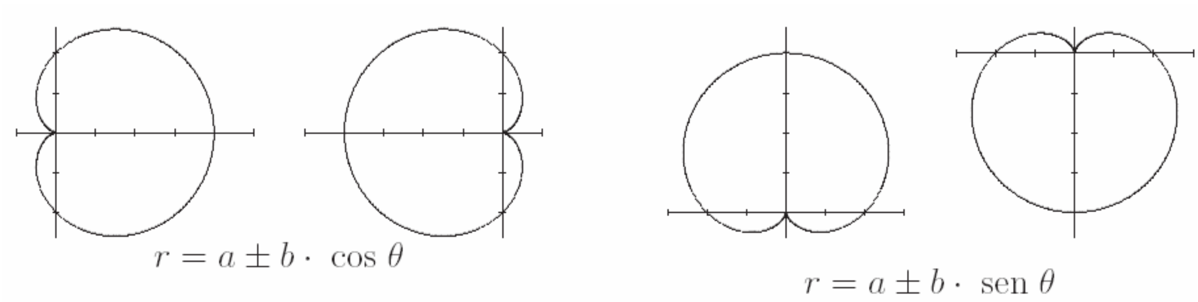
São três os tipos de Limaçons: as Cardióides, as Lmaçons com laço e sem laço, e cujas equações polares, com a e b constantes não nulas, se restringem a:

$$r = a \pm b \cdot \cos\theta,$$
$$r = a \pm b \cdot \sin\theta.$$

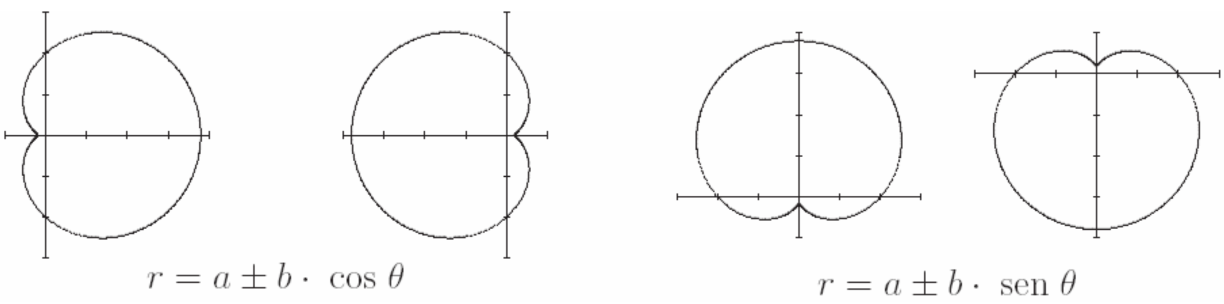
Note que na primeira existe simetria em relação ao eixo polar, enquanto que na segunda em relação ao eixo a 90º.

Para traçarmos o gráfico de uma limaçon é suficiente determinarmos as interseções com os eixos polar e a 90º e com o pôlo, caso exista.

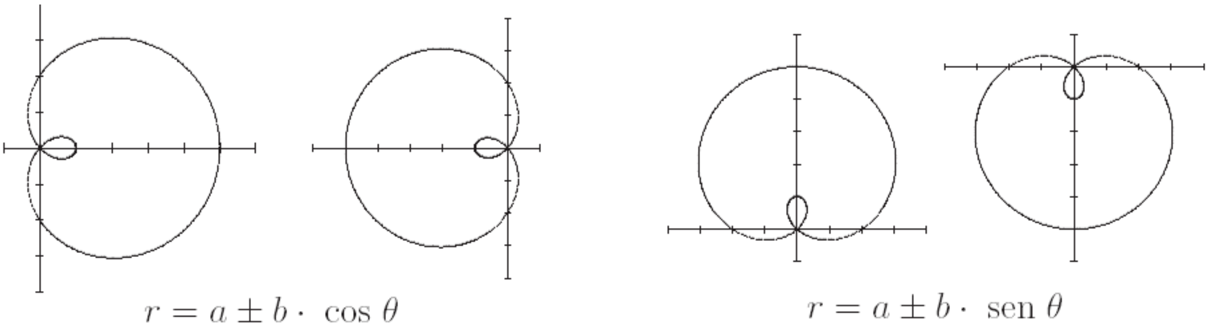
Cardióides $\left(|a| = |b|\right)$



Limaçon sem laço $\left(|a| > |b|\right)$



Limaçon com laço $\left(|a|<|b|\right)$



8.2 Rosáceas

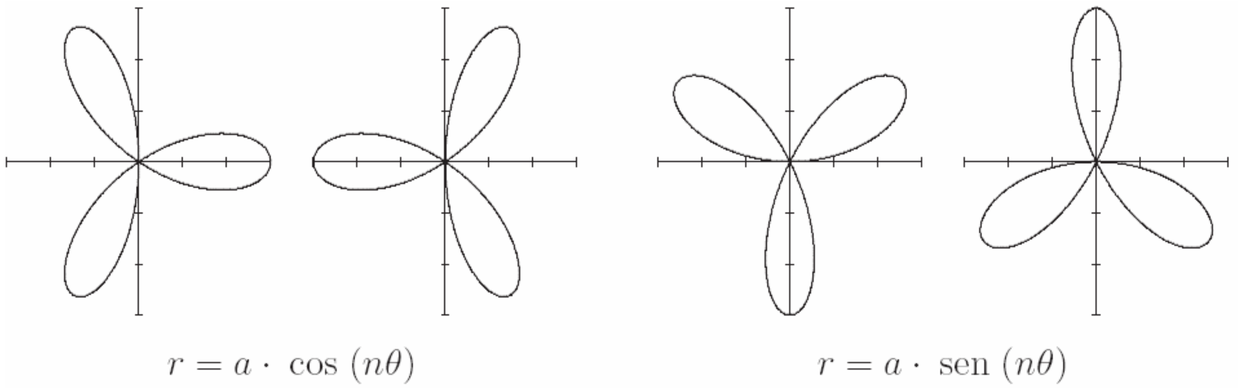
A equação polar da rosácea, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, é:

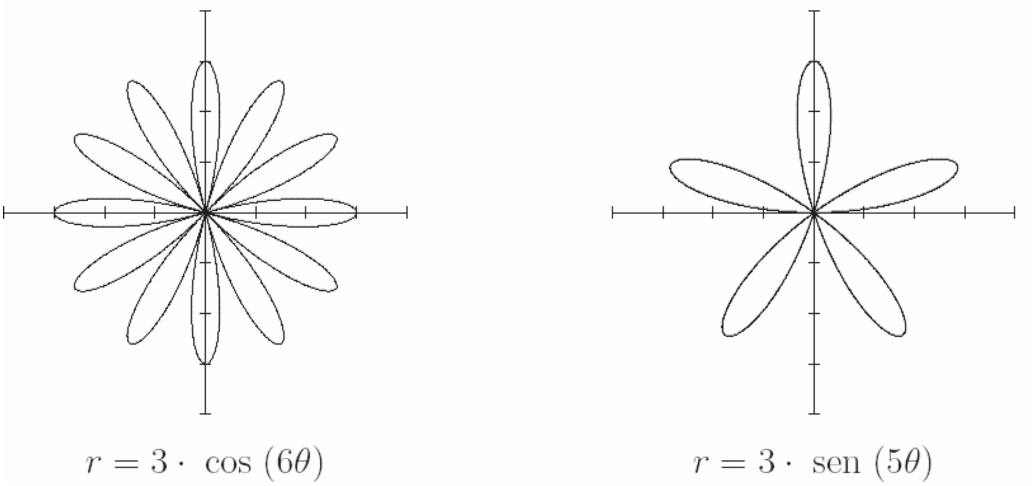
$$r = a \cdot \cos(n\theta),$$
$$r = a \cdot \sin(n\theta).$$

A quantidade de pétalas é obtida do seguinte fato:

- $2n$, se n for par;
- n, se n for ímpar.

O espçamento entre os eixos de simetria entre duas pétalas consecutivas é dado por $\dfrac{2\pi}{p}$, onde p é o número de pétalas.

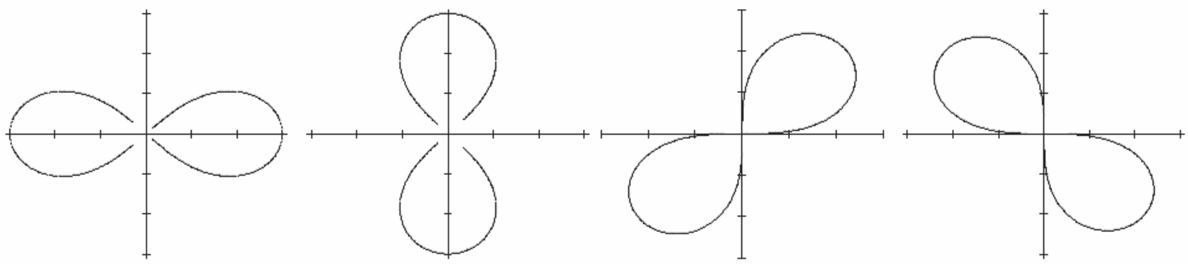




Para o traçado rápido de uma rosácea é suficiente determinar a extensão do lugar geométrico, a quantidade de pétalas e o espaçamento entre elas e a primeira pétala que será construída sobre o eixo de simetria $\theta = 0$ ou $\theta = \dfrac{\pi}{2n}$ caso as equações sejam, respectivamente $r = a\cos(n\theta)$ ou $r = a\sin(n\theta)$.

8.3 Lemiscatas

São curvas cuja equação é do tipo $r^2 = a\cos(2\theta)$ ou $r^2 = a\sin(2\theta)$, com $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Devemos observar que se a é positivo, tanto $\cos(2\theta)$ quanto $\sin(2\theta)$ são positivos, e se a é negativo, tanto $\cos(2\theta)$ quanto $\sin(2\theta)$ são negativos, visto que $r^2 > 0$.



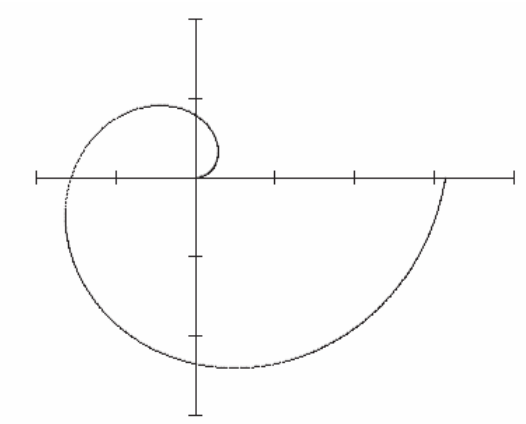
$r^2 = \pm a \cdot \cos 2\theta$ $\qquad$ $r^2 = \pm a \cdot \operatorname{sen} 2\theta$

Para o traçado rápido da Lemniscata é suficiente determinar a sua extensão $\left(\sqrt{|a|}\right)$ e encontrar os valores de θ para os quais $r = \sqrt{|a|}$.

8.4 espiral de Arquimedes

São curvas cuja equação é do tipo $r = a\theta$. Se atribuir valores a θ não negativos teremos que a espiral girará no sentido anti-horário, caso contrário, girará no sentido horário.

Para o traçado rápido da Espiral de Arquimed suficiente atribuir valores a θ, em radianos, e encoı o valor de r, marcando-se estes pontos.



$r = a\theta$

9 Interseções entre Curvas

Dada as curvas $C_1: \ f(r,\theta)=0$ e $C_2: \ g(r,\theta)=0$ podemos obter os pontos de interseções se:

(1) determinamos o conjunto abrangente de uma das curvas;

(2) resolvemos todos o sistemas formados por uma das equações fixadas e cada uma das equações do conjunto abrangente;

(3) verificamos se o pólo está na interseção.

Exemplo 14: Determine as interseções entre as curvas $C_1: \ r=3$ e $C_2: \ r=6\cos(2\theta)$

Solulção: Fixemos a equação C_2 e determinemos o conjunto abrangente para C_1:

$$A(C_1)=\left\{(-1)^n r=3; n\in\mathbb{Z}\right\}=\{-3,3\}.$$

Devemos agora resolver os sistemas

$$\begin{cases} r=3 \\ r=6\cos(2\theta) \end{cases} \text{ e } \begin{cases} r=-3 \\ r=6\cos(2\theta) \end{cases}.$$

Por substituição obtemos as equações $\cos(2\theta)=\frac{1}{2}$ e $\cos(2\theta)=-\frac{1}{2}$. Sendo assim, temos $2\theta=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ e $2\theta=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$. Portanto $\theta=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$ e $\theta=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$.