GEOMETRIA ANALÍTICA

UNEB / DCET I

— Prof. ADRIANO CATTAI —

Apostila 01: Cônicas

ac 01

NOME: ______________________ DATA: ____/____/______

"Não há ciência que fale das harmonias da natureza com mais clareza do que a matemática"

(Paulo Carus)

1 Introdução

Quero agradecer por lerem estas notas de aula e por contribuirem nas possíveis correções de digitação e na apresentação das ideias básicas para introdução desse fantástico mundo que iremos habitar.

É importante lembrar que:

✓ Este material **não** substitui o livro e **jamais** deverá ser tratado como único texto para seus estudos;

✓ Estas notas serão nosso "ponto de partida" ou nossa orientação na sequência dos contéudos que iremos conversar em nossas "saborosas" aulas de GA;

✓ Prestem bem atenção com a notação utilizada. A matemática possui uma linguagem própria, por isso, curta-a!

2 Seções Cônicas

Considere e e g duas retas concorrentes, não perpendiculares, cuja intersecção é um ponto O. Mantenha fixa uma das retas, por exemplo e (eixo), e façamos girar $360°$ em torno desta, mediante um ângulo α constante, a outra reta g (geratriz). O objeto gerado é chamado de *superfície cônica formada por duas folhas* ou, simplesmente, *superfície cônica*, e separadas pelo vértice O.

O conjunto de pontos obtidos pela intersecção de um plano π com a superfície cônica é chamada de *seção cônica*, ou simplesmente *cônica*.

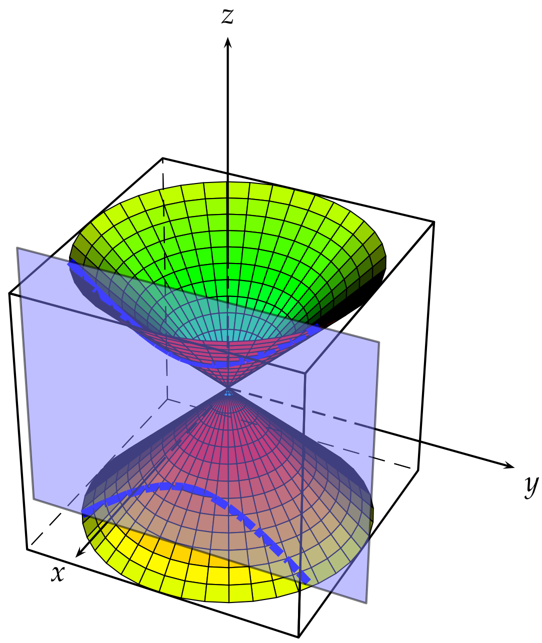
Ao seccionarmos uma superfície cônica por um plano arbitrário π, que não contém o vértice O, obteremos uma cônica dita *não degenerada*, e, à medida que variamos a posição do plano de corte π, obtemos as seguintes cônicas não degeneradas:

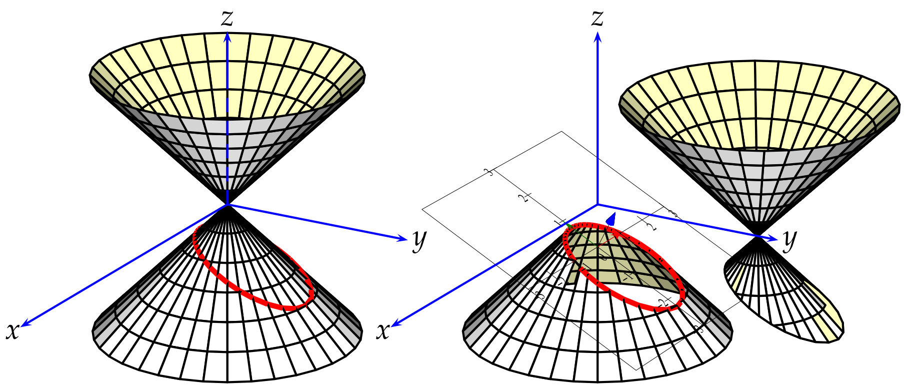
◇ ***Parábola:*** o plano π é paralelo a uma geratriz da superfície cônica.

◇ ***Elipse:*** o plano π é não paralelo a uma geratriz e intercepta apenas uma das folhas da superfície cônica;

  ◇ ***Circunferência:*** o plano π é perpendicular ao eixo e.

◇ ***Hipérbole:*** o plano π é não paralelo a uma geratriz e intercepta as duas folhas da superfície cônica.





Quando o plano π contém o vértice O da superfície, as cônica se degeneraram em:

◇ ***um ponto:*** se o plano π intercepta somente o vértice;

◇ ***uma reta:*** se o plano π contém somente uma geratriz;

◇ ***duas retas:*** se o plano π contém o eixo e.

As cônicas não degeneradas podem ser encontradas na natureza e por esse motivo foram objeto de estudo para diversos matemáticos. A elipse, por exemplo, corresponde à geometria das órbitas de alguns planetas e cometas. A hipérbole corresponde à geometria das trajetórias de alguns cometas e outros corpos celestes. A parábola corresponde à trajetória de um projétil lançado num campo gravitacional, o que se pode verificar com a trajetória de um jato d'água. A elipse pode ainda ser encontrada na forma da luz de uma lanterna projetada numa superfície plana. A circunferência, por sua vez, símbolo da perfeição na Grécia Antiga, pode ser encontrada nas ondas produzidas pela queda de uma pedra na superfície de um lago.

Figura 1: Igreja de São Francisco, Conjunto Arquitetônico da Pampulha, BH-MG

Na engenharia e arquitetura como no caso das pontes, cúpulas, torres e arcos, usam-se as cônicas devido às suas propriedades físicas e até mesmo estéticas. O arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer (1907–2012) em muitas das suas obras, nota-se o traçado da tangência e concordância de arcos de circunferência e curvas cônicas, como a Igreja São Francisco de Assis, no Conjunto Arquitetônico da Pampulha em Belo Horizonte. Maiores informações, acesse http://www.niemeyer.org.br/.

A partir das cônicas podemos obter oarabolóides, elipsóides ou hiperbolóides que, a prtir deles, podemos produzir artefatos refletores. Tais artefados se devem às propriedades refletoras das cônicas. Podemos construir farois e holofotes, antenas parabólicas ou criar condições acústicas especiais em auditórios, teatros ou catedrais. Como por exemplo a Catedral de São Paulo, centro espiritual de Londres, projetada pelo arquiteto britânico Christopher Wren. Sua cúpula é a segunda maior do mundo, perdendo apenas para a cúpula da Igreja de São Pedro, em Roma.

Figura 2: Catedral de São Paulo, Londres

As cônicas possuem equações, chamadas reduzidas ou canônicas, que se tornam mais úteis, visto que, através destas, podemos determinar certos elementos que as melhor caracterizam-nas. Entretanto, para chegarmos a estas equações definiremos em termos de lugares geométricos cada cônica, uma a uma, a seguir.

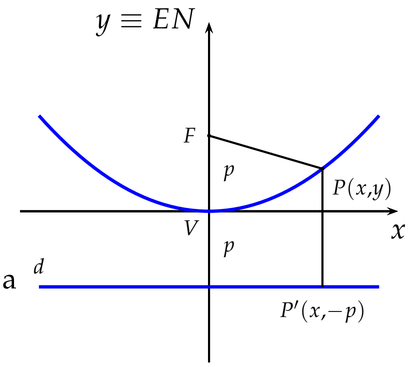
3 *A Parábola*

> **Definição 1 (Parábola)**
> Considere um plano π determinado por uma reta d e um ponto F não pertencente a esta reta. A parábola é o conjunto de todos os pontos do plano π que eqüidistam de F e de d.

Segue da definição que dado um ponto fixo F e uma reta d, um ponto P do plano está eqüidistante destes se, e somente se, pertence a uma parábola, ou seja,

$$d(P,F) = d(P,d) \Leftrightarrow P \in \text{ Parábola}. \tag{1}$$

3.1 *Os Principais Elementos da Parábola*



Como elementos da parábola temos:

† O foco F: ponto fixo da parábola;

† A diretriz d: reta fixa da parábola;

† O eixo focal EF: reta que passa pelo foco F e é perpendicular a diretriz d;

† O vértice V: é o ponto de intersecção da parábola com seu eixo. Situado entre a diretriz e o foco exatamente no meio;

† A corda: é obtida ligando quaisquer dois pontos distintos da parábola, por exemplo $\overline{AC}$;

† A corda focal: uma corda que passa pelo foco;

† O *lactus rectum*: corda focal perpendicular ao eixo focal;

† O raio focal: é o segmento de reta de extremos no foco e num ponto da parábola.

Observe que devemos considerar o fato de que $F \notin d$, pois, caso contrário, a parábola se degeneraria numa reta. Outro fato é que denominamos o número p de *parâmetro da parábola*.

3.2 *As Equações Padrões de uma Parábola*

Dizemos que uma equação é *padrão*, também denominada *canônica* ou *reduzida*, quando a utilizamos para descrever um conjunto de curvas com alguma característica em comum. A parábola possui quatro tipos de equação padrão, onde a determinação de somente uma delas será demonstrada, pois as outras são obtidas de forma semelhante.

3.2.1 *A Equação Padrão da Parábola com o Vértice na Origem e Eixo de Simetria sobre um dos Eixos Coordenados*

Sejam $P(x,y)$ um ponto qualquer da parábola de vértice V na origem dos eixos coordenados e de foco $F(0,p)$. Observe que qualquer ponto da diretriz d é dado por $P'(x,-p)$. Pela definição de parábola

$$P(x,y) \in \text{ parábola } \Leftrightarrow d(P,F) = d(P,d),$$

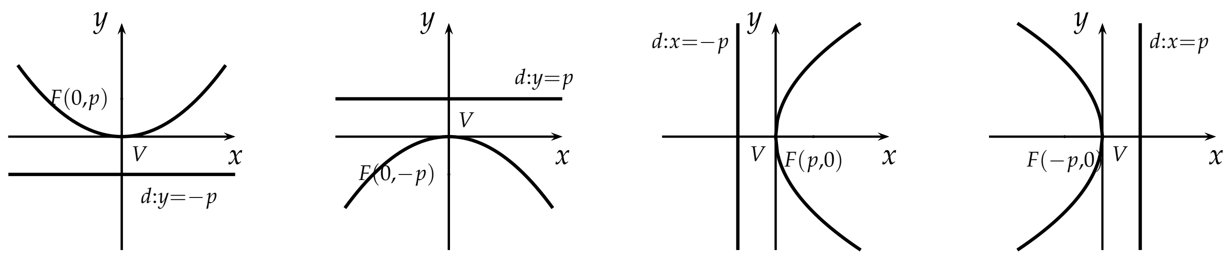
de acordo com a fórmula de distância entre pontos e a figura acima, temos:

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(p+y)^2}.$$

Desenvolvendo a igualdade acima, obtemos $x^2 = 4py$, a equação reduzida da parábola para este caso.

De forma análoga, podemos obter as equações reduzidas das parábolas com vértice em $(0,0)$ para os demais casos, onde os focos estão sobre os semi-eixos ainda não analisados. Portanto,

$$\boxed{x^2 = \pm 4py} \quad \text{ou} \quad \boxed{y^2 = \pm 4px}. \tag{2}$$



$x^2 = 4py$ $\qquad$ $x^2 = -4py$ $\qquad$ $y^2 = 4px$ $\qquad$ $y^2 = -4px$

Da análise das equações em (2), tendo em vista ser x^2 (resp. y^2) sempre positivo ou nulo e que $p > 0$, podemos concluir que:

- ◇ Se o sinal no 2° membro é positivo, então a parábola tem concavidade voltada para cima (resp. direita);
- ◇ Se o sinal no 2° membro é negativo, então a parábola tem concavidade voltada para baixo (resp. esquerda).

Exemplo 1

Obter a equação da parábola que satisfaça as condições em cada caso.

(a) Vértice na origem e foco em $(0,1)$; $\qquad$ (b) Foco em $(0,-3)$ e diretriz $y = 3$;

(c) Vértice na origem, concavidade voltada para cima e passando pelo ponto $P(-2,5)$.

Solução: (a) $V(0,0)$ e $F(0,1)$. Logo, $p = 1$ e de $x^2 = 4py$, obtemos: $x^2 = 4y$. (b) $F(0,-3)$ e $d : y = 3$. Portanto, $V(0,0)$ e $p = 3$. A equação é $x^2 = -4py \therefore x^2 = -12y$. (c) $V(0,0)$ e equação da forma $x^2 = 4py$. Como $(-2,5)$ é ponto da parábola, temos $(-2)^2 = 4p5 \therefore p = \dfrac{1}{5}$. Portanto, a equação é $x = \dfrac{4}{5}y$.

Exemplo 2

Determinar, para cada uma das parábolas, o foco e uma equação da diretriz.

(a) $x^2 - 16y = 0$ $\qquad$ (b) $x = -\dfrac{1}{4}y^2$

Solução: (a) $x^2 = 16y \therefore p = 4$. Portanto, $F(0,4)$ e $d : y = -4$. (b) $x = -\dfrac{1}{4}y^2 \therefore y^2 = -4x$. Donde $p = 1$. Logo, o foco é $F(-1,0)$ e $d : x = 1$.

Exemplo 3
Determinar o comprimento do latus rectum de uma parábola.

Solução: Consideremos as equações $x^2 = 4py$ e $y = p$, respectivamente, a da parábola de vértice na origem e eixo focal coincidindo com o eixo das ordenadas, e a da reta perpendicular ao eixo dos y passando por $(0, p)$. Observe que a interseção dos gráficos da parábola e da reta são as extremidades L e R do latus rectum da parábola. Resolvendo-se o sistema encontraremos $x = \pm 2p$ e $y = p$. Logo, $|LR| = 4p$.

3.2.2 *A Equação Padrão da Parábola com o Vértice Fora da Origem e Eixo de Simetria Paralelo a um dos Eixos Coordenados*

Podemos obter uma equação, na forma reduzida, da parábola com vértice $V(h, k)$ fora da origem do sistema xOy e cujo eixo de simetria é paralelo a um dos eixos coordenados. Para isso basta transladarmos o sistema xOy para uma nova origem coincidindo com o vértice V, obtendo-se um novo sistema $x'O'y'$. Assim, as equações destas parábolas se restringirão a um dos casos a seguir:

$$\boxed{x'^2 = \pm 4py'} \quad \text{ou} \quad \boxed{y'^2 = \pm 4px'}.$$

Porém, pelas equações de translação dadas no Teorema **??** (pág. **??**), temos que $\begin{cases} x' &= x - h \\ y' &= y - k \end{cases}$.
Logo,

$$\boxed{(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)} \quad \text{ou} \quad \boxed{(y-k)^2 = \pm 4p(x-h)}. \tag{3}$$

Exemplo 4
Determine a equação reduzida da parábola de vértice $V(3, 2)$, eixo focal paralelo ao eixo das abscissas e parâmetro $p = 1$.

Solução: Pelo enunciado da questão podemos concluir que a equação reduzida é $y'^2 = \pm 4px'$. Como $p = 1$ e $V(3, 2)$, ou seja, $x' = x - 3$ e $y' = y - 2$, temos $(y - 2)^2 = \pm 4(x - 3)$.

Exemplo 5
Dada a equação $x^2 + 6x - 8y + 17 = 0$, determine sua equação reduzida, o vértice, o foco e uma equação da sua diretriz e do eixo focal.

Solução: Completando-se o quadrado da variável x na equação dada, temos: $(x + 3)^2 = 8(y - 1)$. Portanto, o vértice é $V(-3, 1)$, o foco é $F(-3, 3)$, a equação da diretriz é $d : y = -1$ e o eixo focal $x = -3$.

Observação 1
Quando o eixo de simetria da parábola não é paralelo a nenhum dos eixos coordenados, a equação é "mais complicada", mas também se enquadra na forma geral da equação do 2° grau a duas incógnitas

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

e, por uma rotação dos eixos coordenados, podemos reduzí-la a

$$a'x^2 + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0;$$

que facilmente é identificada.

Observação 2 (Excentricidade da Parábola)
Chamamos de *excentricidade* (e) da parábola a razão entre as distâncias de um ponto arbitrário P da curva ao foco e de P à diretriz. Neste caso, teremos sempre $e = 1$.

4 *A Elipse*

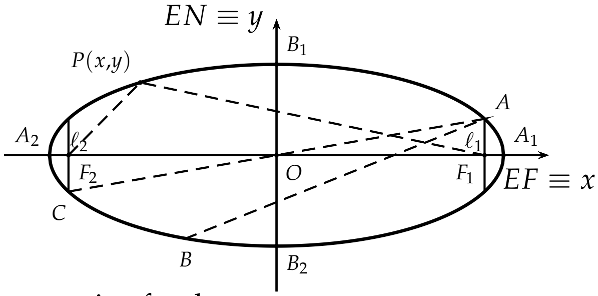
Definição 2 (Elipse)
Uma *elipse* é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos) é constante e maior do que a distância entre esses pontos fixos.

Segue da definição que dados dois pontos fixos F_1 e F_2 pertencentes a um plano π, um ponto P deste plano pertence a elipse E se, e somente se, $d(P, F_1) + d(P, F_2) = K,\ K > d(F_1, F_2)$. Em símbolos temos:

$$E = \{P \in \pi;\ \ d(P, F_1) + d(P, F_2) = K,\ K > d(F_1, F_2)\}. \tag{4}$$

4.1 *Os Principais Elementos da Elipse*

Como elementos de uma elipse temos:



† Os focos F_1 e F_2: os pontos fixos;

† O eixo focal EF: reta que passa pelos focos;

† O centro O: Ponto médio de $\overline{F_1F_2}$;

† O eixo normal EN: Reta perpendicular ao eixo focal passando pelo centro;

† Os vértices A_1 e A_2: pontos de intersecção da elipse com o eixo focal;

† Os vértices B_1 e B_2: pontos de intersecção da elipse com o eixo normal;

† Eixo maior EM: segmento de reta que une os vértices A_1 e A_2 ($\overline{A_1A_2}$);

† Eixo menor Em: segmento de reta que une os vértices B_1 e B_2 ($\overline{B_1B_2}$);

† Corda: segmento de reta arbitrário cujas extremidades são dois pontos distintos da elipse, por exemplo $\overline{AC}$;

† Corda focal: uma corda que passa pelo foco;

† O *lactus rectum*: corda focal perpendicular ao eixo focal (ℓ_1 e ℓ_2);

† Raio focal: segmento de reta de extremos em um dos focos e num ponto da elipse.

4.2 *As Equações Padrões de uma Elipse*

Desenvolveremos as duas equações padrões da elipse. A primeira equação padrão a elipse é tomada com centro coincidindo com o centro $O(0, 0)$ do sistema de coordenadas xOy e eixo focal coincidente a um dos eixos coordenados; e a segunda quando o centro não coincide com o centro do sistema e o eixo focal concide ou é paralelo a um dos eixos coordenados.

4.2.1 *Primeira Equação Padrão da Elipse*

Proposição 1
Seja E uma elipse de centro na origem do sistema coordenado xOy e cujo comprimento do eixo maior $\overline{A_1A_2}$ e do segmento de extremos em cada um de seus focos F_1 e F_2 são, respectivamente, $2a$, $2b$ e $2c$. Então, para todo ponto $P(x, y) \in E$, temos:

(a) $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$.

(b) Sua equação cujos focos são $F_1 = (-c; 0)$ e $F_2 = (c; 0)$ é $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, em que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

(c) Sua equação cujos focos são $F_1 = (0; -c)$ e $F_2 = (0; c)$ é $\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1$, em que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

(d) O comprimento do eixo menor $\overline{B_1B_2}$ é $2b$.

Prova: Mostremos os itens (a) e (b), deixamos para o leitor, como exercício, a demonstração dos itens (c) e (d). Inicialmente, considere P sobre o eixo-x, suponha $P = A_1$. Deste modo, pela definição de elipse temos:

$$K = |\overline{A_1F_1}| + |\overline{A_1F_2}| = (a - c) + (a + c) = 2a.$$

Como K é uma constante, será igual a $2a$ para todo $P(x, y) \in E$. Provaremos então (b). Por definição e pelo intem (a), temos que

$$d(F_1P) + d(F_2P) = 2a,$$

ou seja,

$$|F_1P| + |F_2P| = 2a,$$

que neste caso é

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

ou

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplifcando, obtemos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Como $a > c$, então $a^2 - c^2 > 0$ e assim, podemos definir $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, donde $a^2 = b^2 + c^2$ e reescrever a equação acima como

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

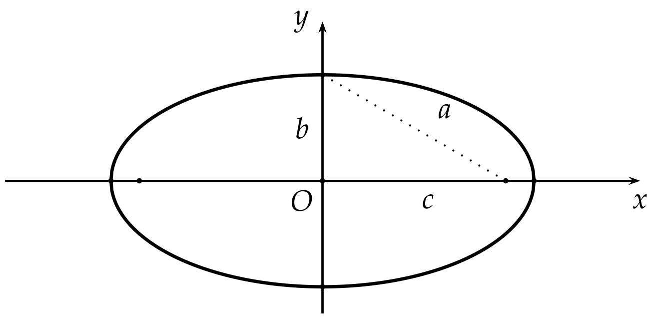
Dividindo esta últimoa equação por $a^2b^2 \neq 0$, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5}$$

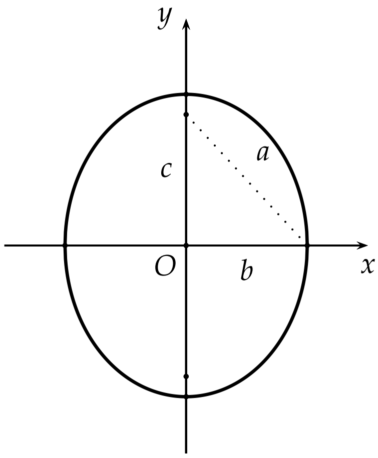
a equação reduzida da elipse para este caso.

Da análise destas deduções, temos os comprimentos do semi eixo maior e do semi eixo menor, medindo respectivamente $\frac{|EM|}{2} = a$ e $\frac{|Em|}{2} = b$.

As figuras abaixo apresentam um resumo das principais características da elipse quando o eixo focal coincide com um dos eixos coordenados.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Observação 3 (Excentricidade da Elipse)
Chamamos de *excentricidade* (e) da elipse a razão entre os comprimentos do segmento $\overline{F_1F_2}$ e do segmento $\overline{A_1A_2}$. Neste caso, temos

$$e = \frac{c}{a}.$$

Como, $0 < c < a$, a excentricidade de uma elipse é um número real não negativo menor do que 1. Observe que se $F_1 = F_2$, temos $c = 0$, então a elipse reduz-se a uma circunferência de raio $a = b$. Além disso, como $c = 0$, então $e = 0$. Assim, uma circunferência é uma elipse de excentricidade nula.

Exemplo 6
Determine os comprimentos dos raios focais do ponto $P\left(1, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ sobre a elipse $5x^2 + 4y^2 = 20$.

Solução: Como $a^2 = 5$ e $b^2 = 4$, segue que $5 = 4 + c^2$, ou seja, $c = 1$. Desta forma $F_1(1,0)$ e $F_2(-1,0)$. Logo, $d(P, F_1) = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$ e $d(P, F_2) = \sqrt{(1+1)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{31}}{2}$.

Exemplo 7
Prove que o comprimento do latus rectum é $\frac{2b^2}{a}$.

Solução: Consideremos as equações $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e $x = c$, respectivamente, a da elipse de centro na origem e comprimentos do eixo maior $2a$ e menor $2b$, com eixo focal coincidindo com o eixo das abscissas, e a da reta perpendicular ao eixo dos x passando por c. Observe que a interseção dos gráficos da elipse e da reta são as extremidades L e R do latus rectum da elipse. Resolvendo-se o sistema encontraremos $x = c$ e $y = \pm\frac{b^2}{a}$. Logo, $|LR| = \frac{2b^2}{a}$.

4.2.2 *Segunda Equação Padrão da Elipse*

Podemos obter uma equação, na forma reduzida, da elipse com centro $O'(h, k)$ fora da origem do sistema xOy e cujo eixo focal é paralelo a um dos eixos cartesianos. Para isso basta transladarmos o sistema xOy para uma nova origem coincidindo com o centro O', obtendo-se um novo sistema $x'O'y'$. Assim, as equações destas elipses se restringirão a um dos casos a seguir:

$$\boxed{\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1}.$$

Porém, pelas equações de translação dadas no Teorema **??** temos que $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x - h \\ y' & = & y - k \end{array}\right.$. Logo,

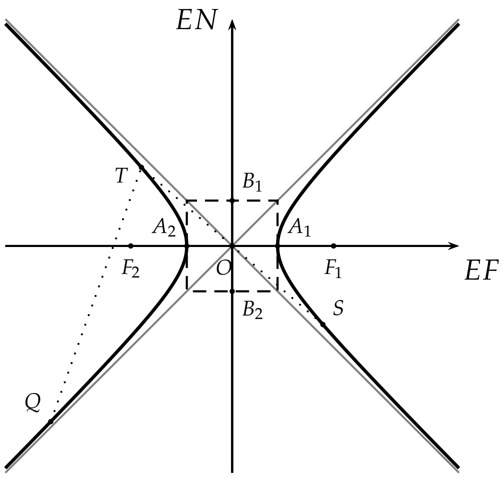
$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1}. \tag{6}$$

Exemplo 8
Determine a equação reduzida da elipse de centro $O'(-3, 2)$, eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas e comprimentos dos eixos maior e menor iguais a 6 e 4, respectivamente.

Solução: Como o eixo focal é paralelo ao eixo das ordenadas, a equação é $\dfrac{x'^2}{b^2} + \dfrac{y'^2}{a^2} = 1$. O centro é $O'(-3, 2)$. Segue que $x' = x + 3$ e $y' = y - 2$. $2a = 6$ e $2b = 4$, ou seja, $a = 3$ e $b = 2$. Logo, a equação reduzida procurada é $\dfrac{(x+3)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$.

5 *A Hipérbole*

Definição 3
Uma hipérbole é o lugar geométrico dos pontos do plano cujo valor absoluto da diferença das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos) é constante e menor que a distância entre esses pontos fixos.



Observa-se que a hipérbole é uma curva constituída de dois ramos distintos.

Segue da definição que dados dois pontos fixos F_1 e F_2 pertencentes a um plano π, um ponto P deste plano pertence a uma hipérbole H se, e somente se,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = K < d(F_1, F_2).$$

Assim,

$$H = \{P \in \pi;\ |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = K,\ K < d(F_1, F_2)\}. \tag{7}$$

5.1 *Os Principais Elementos da Hipérbole*

Como elementos da hipérbole temos:

† Os focos: são os pontos fixos F_1 e F_2, onde $d(F_1, F_2) = 2c$;

† O eixo focal EF: reta que passa pelos focos;

† O centro C: Ponto médio de $\overline{F_1F_2}$;

† O eixo normal EN: Reta perpendicular ao eixo focal passando pelo centro;

† Os vértices A_1 e A_2: pontos de intersecção da hipérbole com o eixo focal;

† Eixo real ou transverso ET: segmento de reta que une os vértices A_1 e A_2 ($\overline{A_1A_2}$);

† Eixo imaginário ou conjugado EC: segmento de reta perpendicular ao eixo focal passando pelo centro e cujo comprimento é obtido conhecendo-se os valores de K e de c;

† Os pontos B_1 e B_2: extremidades do eixo imaginário ($\overline{B_1B_2}$); que une os pontos B_1 e B_2 e tendo o centro como ponto médio; seu comprimento veremos mais adiante;

† Corda: segmento de reta arbitrário cujas extremidades são dois pontos distintos da hipérbole que podem estar no mesmo ramo ou em ramos distintos, por exemplo $\overline{ST}$;

† Corda focal: uma corda que passa pelo foco, por exemplo $\overline{QT}$;

† O *lactus rectum*: corda focal perpendicular ao eixo focal (ℓ_1 e ℓ_2);

† Raio focal: segmento de reta de extremos em um dos focos e num ponto da hipérbole, por exemplo ($\overline{F_2T}$).

5.2 *As Equações Padrões de uma Hipérbole*

Conforme fizemos para a elipse, desenvolveremos as duas equações padrões da hipérbole. A primeira equação padrão a hipérbole é tomada com centro coincidindo com o centro $O(0,0)$ do sistema de coordenadas xOy e eixo focal coincidente a um dos eixos coordenados; e a segunda quando o centro não coincide com o centro do sistema e o eixo focal concide ou é paralelo a um dos eixos coordenados.

5.2.1 *Primeira Equação Padrão da Hipérbole*

Proposição 2
Seja H uma hipérbole de centro na origem do sistema coordenado xOy e cujo comprimento do eixo transverso $\overline{A_1A_2}$ e do segmento de extremos em cada um de seus focos F_1 e F_2 são, respectivamente, $2a$ e $2c$. Então, para todo ponto $P(x, y) \in H$, temos:

(a) $\left||\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}|\right| = 2a$.

(b) Sua equação cujos focos são $F_1 = (-c; 0)$ e $F_2 = (c; 0)$ é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

e das assíntotas (retas para onde a curva se aproxima, quando $x \to \pm\infty$) são

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

em que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

(c) Sua equação cujos focos são $F_1 = (0; -c)$ e $F_2 = (0; c)$ é

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

e das assíntotas (retas para onde a curva se aproxima, quando $y \to \pm\infty$) são

$$y = \pm\frac{a}{b}x,$$

em que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

(d) O comprimento do eixo conjugado $\overline{B_1B_2}$ é $2b$.

Prova: A demonstração do item (a) é análogo ao caso da elipse dado na proposição 1. Mostremos os itens (b) e (d), deixamos para o leitor, como exercício, a demonstração dos itens (a) e (c). Inicialmente provaremos (b). Por definição e pelo item (a), temos que

$$|d(F_1P) - d(F_2P)| = 2a,$$

ou seja,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplifcando, obtemos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Como $c > a$, então $c^2 - a^2 > 0$ e assim, podemos definir $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, donde $c^2 = a^2 + b^2$ e reescrever a equação acima como

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2.$$

Dividindo esta últimoa equação por $a^2b^2 \neq 0$, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{8}$$

a equação reduzida da elipse para este caso.

Se a equação (8) é resolvida em y obtemos $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ que, para $x > 0$, pode ser escrita como

$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Se x tende a $+\infty$, então o radical no segundo membro se aproxima de 1 e a equação tende a

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

O mesmo ocorre para $x < 0$, quando x tende a $-\infty$ (verifique!).

Finalmente, para provar (d), perceba que $\pm\dfrac{b}{a}$ é a inclinação das assíntotas, ou seja, se α é o ângulo de inclinação que a reta $y = \dfrac{b}{a}x$ faz com o eixo-x, temos:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{|B_1B_2|}{|A_1A_2|} = \frac{|B_1B_2|}{2a},$$

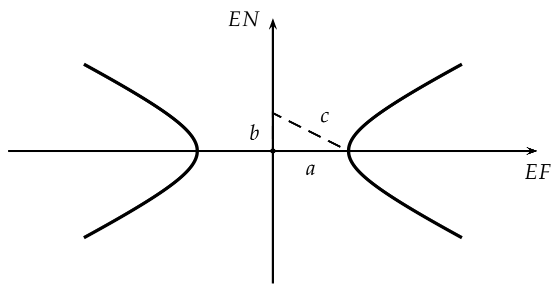
donde concluímos que $|B_1B_2| = 2b$. A nálogo para a reta $y = -\frac{b}{a}x$.

Da análise destas deduções, temos que o comprimento do semi eixo transverso e o comprimento do semi eixo conjugado são respectivamente iguais a $\frac{|ET|}{2} = \frac{|A_1A_2|}{2} = a$ e $\frac{|EC|}{2} = \frac{|B_1B_2|}{2} = b$. Estas informações são úteis na construção do esboço de uma hipérbole.

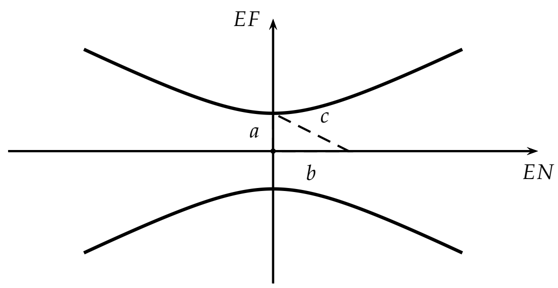
Exemplo 9
Determine uma equação da hipérbole de focos $F(\pm 2, 0)$ e vértices $A(\pm 1, 0)$.

Solução: Como $F(\pm 2, 0)$, o centro é $O(0,0)$ e $c = 2$. Podemos concluir também que a equação é do tipo $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Façamos $F_1(2,0)$ e $A_1(1,0)$, donde $c - a = 1$. Segue que $a = 1$. Como $c^2 = a^2 + b^2$, temos $b = \sqrt{3}$. Portanto, a equação da hipérbole procurada é: $x^2 + \dfrac{y^2}{3} = 1$.

As figuras abaixo apresentam um resumo das principais características da hipérbole quando o eixo focal é paralelo a um dos eixos coordenados.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

5.2.2 *Segunda Equação Padrão da Elipse*

Podemos obter uma equação, na forma reduzida, da hipérbole com centro $O'(h,k)$ fora da origem do sistema xOy e cujo eixo focal é paralelo a um dos eixos cartesianos. Para isso, basta transladarmos o sistema xOy para uma nova origem coincidindo com o centro O', obtendo-se um novo sistema $x'O'y'$. Assim, as equações destas elipses se restringirão a um dos casos a seguir:

$$\boxed{\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{y'^2}{a^2} + \frac{x'^2}{b^2} = 1}.$$

Porém, pelas equações de translação dadas no Teorema (**??**) temos que $\begin{cases} x' &= x-h \\ y' &= y-k \end{cases}$. Logo,

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1}. \tag{9}$$

Exemplo 10

Determine a equação do lugar geométrico descrito por um ponto que se desloca de modo que a diferença de suas distâncias aos pontos $P_1(-6,-4)$ e $P_2(2,-4)$ seja igual a 6, por duas formas: (a) utilizando a definição da hipérbole como lugar geométrico, e (b) utilizando as equações padrões.

Solução:

(a) Pela definição, podemos deduzir que este lugar geométrico plano trata de uma hipérbole e que os pontos P_1 e P_2 são os seus focos. Portanto, sendo $P(x,y)$ um ponto genérico da hipérbole, temos que $|d(P,P_1)-d(P,P_2)| = 6$. Segue que, $d(P,P_1)-d(P,P_2) = 6$ ou $d(P,P_1)-d(P,P_2) = -6$. Vamos desenvolver a primeira destas equações. Acompanhe o raciocínio!

$$\begin{aligned}
6 &= d(P,P_1)-d(P,P_2) \\
6 &= \sqrt{(x-(-6))^2+(y-(-4))^2}-\sqrt{(x-2)^2+(y-(-4))^2} \\
\sqrt{(x+6)^2+(y+4)^2} &= \sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}+6 \\
\sqrt{x^2+12x+36+y^2+8y+16} &= \sqrt{x^2-4x+4+y^2+8y+16}+6 \\
\left(\sqrt{x^2+12x+y^2+8y+52}\right)^2 &= \left(\sqrt{x^2-4x+y^2+8y+20}+6\right)^2 \\
x^2+12x+y^2+8y+52 &= x^2-4x+y^2+8y+20+12\sqrt{x^2-4x+y^2+8y+20}+36 \\
12x+52 &= -4x+56+12\sqrt{x^2-4x+y^2+8y+20} \\
16x-4 &= 12\sqrt{x^2-4x+y^2+8y+20} \\
(4x-1)^2 &= \left(3\sqrt{x^2-4x+y^2+8y+20}\right)^2 \\
16x^2-8x+1 &= 9(x^2-4x+y^2+8y+20) \\
16x^2-8x+1 &= 9x^2-36x+9y^2+72y+180 \\
7x^2+28x-9y^2-72y-179 &= 0
\end{aligned}$$

Como exercício, desenvolva a segunda equação por um raciocínio análogo e verifique que equação você encontrou.

(b) Exercício.

Observação 4 (Excentricidade da Hipérbole)

Definimos a *excentricidade* (e) da hipérbole a razão entre os comprimentos dos segmentos $\overline{F_1F_2}$ e $\overline{A_1A_2}$. Neste caso, temos

$$e = \frac{c}{a} > 1$$

Exemplo 11

Determine a excentricidade da hipérbole cujos comprimentos dos eixos transverso e conjugado são iguais a 4 e 6, respectivamente.

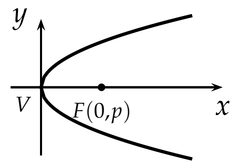
Solução: Temos que $2a = 4$ e $2b = 6$. Assim, $a = 2$ e $b = 3$. Como $c^2 = a^2 + b^2$, segue que, $c = \sqrt{13}$ e $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

6 A Etimologia das Palavras que Definem as Seções Cônicas

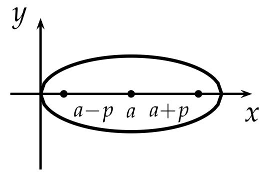
Arquimedes e os pitagóricos foram os primeiros a empregar as palavras Parábola, Elipse e Hipérbole, porém, com outra acepção da atual: seções a uma superfície cônica, que se deve a Apolônio.

Traduzida do grego

— '$\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\eta$' a palavra parábola significa: comparação; igualdade. Deve-se ao fato da igualdade $y^2 = \ell \cdot x$ em que ℓ é a medida do comprimento do latus rectum. Esta é obtida considerando a Parábola de vértice na origem e foco sobre o eixo das abscissas. A equação reduzida é, então, $y^2 = 4p \cdot x$. Como o comprimento do latus rectum de uma parábola é $\ell = 4p$, temos, portanto, $y^2 = \ell \cdot x$.



— '$\epsilon\lambda\lambda\epsilon\iota\psi\iota\zeta$' a palavra elipse significa: falta; omissão. Deve-se ao fato da desigualdade $y^2 < \ell \cdot x$ em que ℓ é a medida do comprimento do latus rectum. Esta é obtida considerando a Elipse de centro no ponto $(a, 0)$ e $2a$ e $2b$ os comprimentos, respectivos, do eixo maior e menor da elipse de eixo focal coincidindo com o eixo das abscissas. A equação reduzida é, então, $\dfrac{(x-a)^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Isolando y^2, obtemos $y^2 = \dfrac{2b^2}{a}x - \dfrac{b^2x^2}{a^2}$. Como o comprimento do latus rectum de uma elipse é $\ell = \dfrac{2b^2}{a}$, temos, portanto, $y^2 = \ell x - \dfrac{b^2x^2}{a^2}$. Donde, podemos concluir que $y^2 < \ell \cdot x$.



— '$\upsilon\pi\epsilon\rho\beta o\lambda\eta$' a palavra hipérbole significa: excesso; exagero. Deve-se ao fato da desigualdade $y^2 > \ell \cdot x$ em que ℓ é a medida do comprimento do latus rectum. Esta é obtida considerando a Hipérbole de centro no ponto $(-a, 0)$ e $2a$ e $2b$ os comprimentos, respectivos, do eixo real e imaginário da Hipérbole de eixo focal coincidindo com o eixo das abscissas. A equação reduzida é, então, $\dfrac{(x+a)^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Seguindo o mesmo raciocínio adotado anteriormente para a Elipse, com as devidas alterações, podemos concluir que $y^2 > \ell \cdot x$.