UNEB
DCET I

LISTA DE EXERCÍCIOS
— CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL —

Prof. ADRIANO PEDREIRA CATTAI

Somos o que repetidamente fazemos. A excelência portanto, não é um feito, mas um hábito. *Aristóteles*

Atualizada em 2 de outubro de 2014

NOME: ______________________________ DATA: ____/____/______

Sumário

1 Limite Intuitivo. Limites Laterais. Cálculo de Limites.

Q 1 Complete a tabela (use a calculadora e uma aproximação com, pelo menos, 4 casas decimais) e utilize os resultados para estimar o valor do limite da função quando x tende a a ou explicar por que ele não existe.

(a)

x	$0,9$	$0,99$	$0,999$	$0,9999$
$f(x) = \dfrac{x-1}{x^3-1}$				

x	$1,1$	$1,01$	$1,001$	$1,0001$
$\dfrac{x-1}{x^3-1}$				

, $a = 1$

(b)

x	$1,9$	$1,99$	$1,999$	$1,9999$
$\dfrac{x-2}{x^2-4}$				

x	$2,1$	$2,01$	$2,001$	$2,0001$
$\dfrac{x-2}{x^2-4}$				

, $a = 2$

(c)

x	$0,9$	$0,99$	$0,999$	$0,9999$
$\dfrac{x+2}{1-x}$				

x	$1,1$	$1,01$	$1,001$	$1,0001$
$\dfrac{x+2}{1-x}$				

, $a = 1$

(d)

x	$-3,1$	$-3,01$	$-3,001$
$\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+8x+15}$			

x	$-2,9$	$-2,99$	$-2,999$
$\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+8x+15}$			

, $a = -3$

(e)

x	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$
$\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$			

x	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
$\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$			

, $a = 0$

(f)

x	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$
$\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$			

x	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
$\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$			

, $a = 0$

Q 2 Considerando as equações (♣) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1$, (✠) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -1$ e (★) $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = +\infty$, responda;

(a) A partir de (♣) e (✠) o que se pode afirmar sobre $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$? Por que?

(b) Escreva como se lê (★) e dê seu significado;

(c) A partir de (♣) ou de (✠) podemos afirmar qual é a imagem de 3? Por que?

Q 3 Considerando as equações ($\triangledown$) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 2$, ($\triangle$) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 3$ e ($\Diamond$) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$, responda;

(a) A partir de ($\triangledown$) e ($\triangle$) o que se pode afirmar sobre $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$? Por que?

(b) Escreva como se lê ($\Diamond$) e dê seu significado;

(c) A partir de ($\triangledown$) ou de ($\triangle$) podemos afirmar qual é a imagem de 5? Por que?

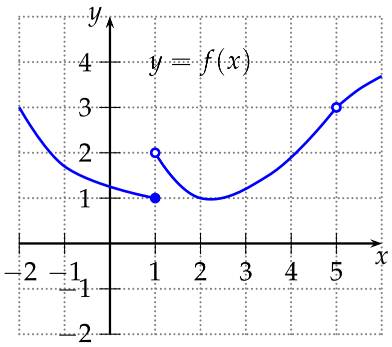
Q 4 Sejam f e g, duas funções tais que $f(x) = x - 4$ e $g(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x-3}$.

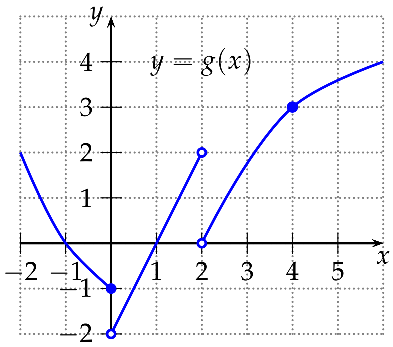
(a) Por que f e g não são iguais? (b) Mesmo tendo f e g diferentes, podemos dizer que $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} g(x)$? Por que?

Q 5 Em cada caso, para as funções f e g cujos gráficos são dados, determine o valor da quantidade indicada, se ela existir. Se não existir, explique o por quê.

(i) (a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, (b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, (c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, (d) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$, (e) $f(1)$, (f) $f(5)$

(ii) (a) $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$, (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$, (c) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, (d) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$, (e) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$, (f) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$, (g) $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$, (h) $g(2)$, (i) $g(4)$



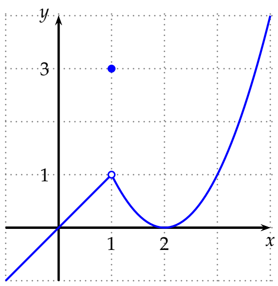


Q 6 Em cada caso, para as funções f, g e h cujos gráficos são dados, respectivamente, determine o valor da quantidade indicada, se ela existir. Se não existir, explique o por quê.

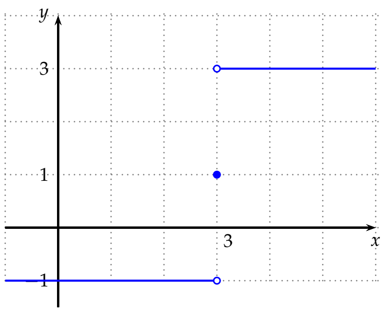
(i) (a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, (b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, (c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, (d) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, (f) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

(ii) (a) $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)$, (b) $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)$, (c) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$, (d) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$, (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$, (f) $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$.

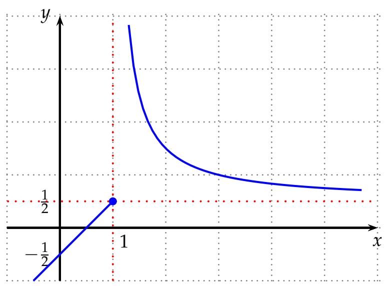
(iii) (a) $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)$, (b) $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$, (c) $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$ (d), $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)$ (e), $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$, (f) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.



$y = f(x)$



$y = g(x)$



$y = h(x)$

Q 7 A *função sinal*, denotada por sgn, está definida por $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ se } x < 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \\ 1 & , \text{ se } x > 0 \end{cases}$

Esboce o gráfico dessa função. Encontre ou explique por que não existe cada um dos limites que se seguem.

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$

Q 8 Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \neq 2$ e $f(2) = -1$. Julgue, justificando, em verdadeiro ou falso as afirmativas abaixo:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ não existe. (b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -3$. (c) Se existir, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ é positivo.

Q 9 Seja $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. O que podemos afirmar sobre $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$? Por que?

Q 10 Esboce o gráfico das funções abaixo e determine $\lim\limits_{x\to k^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to k^+} f(x)$ e, caso exista, $\lim\limits_{x\to k} f(x)$.

(a) $f(x) = \begin{cases} 4x+12, & x < -2 \\ x^2, & -2 \leq x \leq 1 \\ 3-x^2, & x > 1 \end{cases}$ $[k=-2]$

(b) $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 0 \\ 1-x, & 0 \leq x < 1 \\ x^2-1, & x > 1 \\ 2-x, & x = 1 \end{cases}$ $[k=1]$

(c) $f(x) = \begin{cases} (0,5)^x, & x \leq 1 \\ \ln(x), & x > 1 \end{cases}$ $[k=1]$

(d) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x), & 0 \leq x < \pi \\ \cos(x), & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ $[k=\pi]$

Q 11 Determine, se possível, as constantes reais a e/ou b de modo que $\lim\limits_{x\to k} f(x)$ exista, sendo:

(a) $f(x) = \begin{cases} 3ax^2+2, & x < 1 \\ x-2, & x \geq 1 \end{cases}$ $[k=1]$

(b) $f(x) = \begin{cases} 3x-2, & x > -1 \\ 3, & x = -1 \\ 5-ax, & x < -1 \end{cases}$ $[k=-1]$

(c) $f(x) = \begin{cases} 4x+3, & x \leq -2 \\ 3x+a, & x > -2 \end{cases}$ $[k=-2]$

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2-5x-2}{x-2}, & x < 2 \\ 3-ax-x^2, & x \geq 2 \end{cases}$ $[k=2]$

(e) $f(x) = \begin{cases} 2a\cdot\cos(\pi+x)+1, & x < 0 \\ 7x-3a, & x = 0 \\ b-2x^2, & x > 0 \end{cases}$ $[k=0]$

(f) $f(x) = \begin{cases} bx^2+2, & x \leq 1 \\ b^2, & x > 1 \end{cases}$ $[k=1]$

Q 12 Dados $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -4$ e $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$, obtenha os limites abaixo. Justifique seu raciocínio.

(a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) + 2g(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to a} h(x) - 3g(x) + 1$

(c) $\lim\limits_{x\to a} [g(x)]^2$

(d) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[3]{6+f(x)}$

(e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{7g(x)}{2f(x)+g(x)}$

(f) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{3f(x)-8g(x)}{h(x)}$

Q 13 Os gráficos das funções f e g são dados abaixo. Use-os pra calcular cada limite, caso ele exista.

(a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) + g(x)$

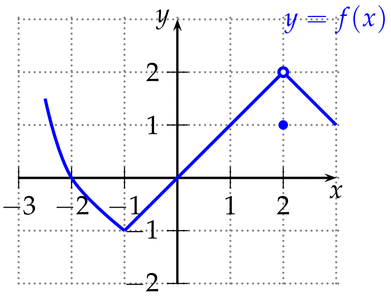
(b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) + g(x)$

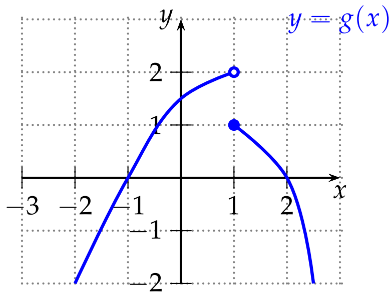
(c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \cdot g(x)$

(d) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)/g(x)$

(e) $\lim\limits_{x\to 2} x^3 \cdot f(x)$

(f) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{3+f(x)}$





Q 14 Calcule os limites a seguir, justificando cada passagem através das suas propriedades.

(a) $\lim\limits_{x\to 4} 5x^2 - 2x + 3$

(b) $\lim\limits_{x\to 3} (x^3+2)(x^2-5x)$

(c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x-2}{x^2+4x-3}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^4+x^2-6}{x^4+2x+3}\right)^2$

(e) $\lim\limits_{u\to -2} \sqrt{u^4+3u+6}$

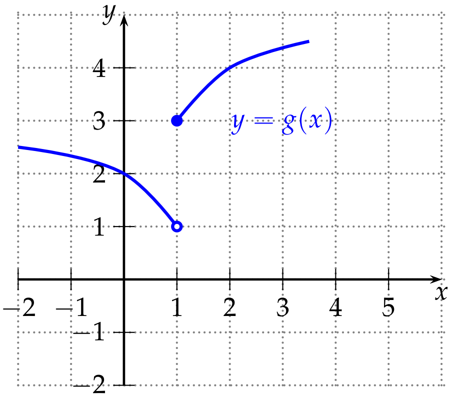
(f) $\lim\limits_{t\to -2} (t+1)^9(t^2-1)$

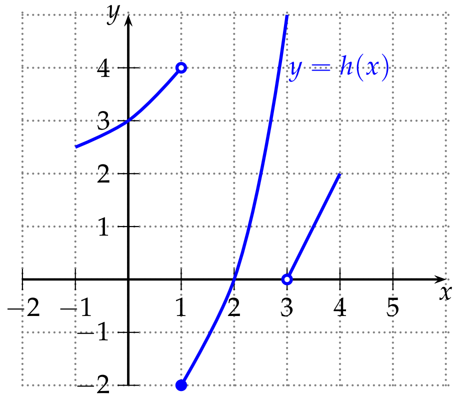
(g) $\lim\limits_{y\to 8} 3y^2 + \sqrt[3]{y-7} + y\cdot e^{y-9} + 2$

(h) $\lim\limits_{s\to -3} \dfrac{s^2+s+6}{s-3}$

(i) $\lim\limits_{v\to 0} \dfrac{\sqrt{v+2}+\sqrt{2}}{v+2}$

Q 15 Os gráficos de g e h são dados na figura abaixo. Ache os limites laterais de $f(x) = (h\circ g)(x) = h(g(x))$ no ponto em que $x = 1$.





Q 16 Calcule os limites, envolvendo fatorações e indeterminação $0/0$.

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-8}{3x^2-4x-4}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-1}$

(d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x^3-27}$

(e) $\lim\limits_{x\to 2} \log_6\left(\dfrac{3x^3-24}{x-2}\right)$

(f) $\lim\limits_{x\to 2} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi(x^3-8)}{x-2}\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-4x}{x^3-3x^2+2x}$

(h) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-7x+12}$

(i) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$

(j) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$

(k) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x-2}$

(l) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2}$

(m) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+6x+5}{x^2-3x-4}$

(n) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2+x-6}$

(o) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{4-x}{x^2-2x-8}$

(p) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3x^2-17x+20}{4x^2-25x+36}$

(q) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x^2+3x-18}$

(r) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^3-4x^2-x+2}{2x^3-3x^2+1}$

(s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(4+x)^2-16}{x}$

(t) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-6x-9}{x^3-8x-3}$

(u) $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{2x^2+3x-2}{8x^3-1}$

Q 17 Calcule os limites, envolvendo conjugado de radicais e indeterminação $0/0$.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{3x}$

(c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1-x^2}{x+\sqrt{2+x}}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x^3-1}$

(e) $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-4}}$

(f) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt{x}-4}{2x-32}$

(g) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$

(i) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{x^2-3x}$

(j) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{2x-18}{\sqrt{x}-3}$

(k) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$

(l) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$

(m) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}$

(n) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{\sqrt{x+2}-2}$

(o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}{x}$

(p) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$

(q) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}$

(r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

(s) $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sqrt{a^2+by}-a}{y}$

(t) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$

(u) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x+x^2}-1}$

Q 18 Calcule os limites, envolvendo radicais, troca de variáveis e indeterminação $0/0$.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ (g) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x-1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to -4}\frac{x+4}{\sqrt[3]{x+12}-2}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

Q 19 Determine cada um dos limites (infinitos) dados a seguir, envolvendo impossibilidade $k/0$.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 5^+}\frac{6}{x-5}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to -2^+}\frac{x-1}{x^2(x+2)}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{2x^2+3}{(x-5)^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 5^-}\frac{6}{x-5}$ (f*) $\displaystyle\lim_{x\to 5^+}\ln(x-5)$ (j) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x+5}{x^2-5x+4}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^8}$ (g) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x-5}{(x-4)^2}$ (k) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{3x-11}{x-3}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2(x+2)}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{x\,\mathrm{sen}(x)}$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{3-x}{(x-2)^3}$

Q 20 Determine cada um dos limites (no infinito) dados a seguir, envolvendo indeterminação ∞/∞.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2-4x-25}{18x^3-9x^2}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}2^{(x-1)(3-2x)^{-1}}$ (g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x+4}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{x(x-3)(2x+5)}{(x-1)(3x+4)(2-x)}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{-3x^5-x+1}{4x^3-2x}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{2x^2-3x-4}{x^4+1}}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x^4-x^2+1}{x^5+x^3-x}$

Q 21 Para cada função abaixo determine, se existirem, as assíntotas verticais e as assíntotas horizontais. Quando existirem, além dos cálculos, faça esboço gráfico ilustrando o comportamento e, quando não, justifique com os cálculos.

(a) $f(x)=\dfrac{2x^2+4x}{x^2-x-6}$ (d) $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$ (g) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$ (j) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+4}$

(b) $f(x)=\dfrac{2x^2-x-12}{x^2+2x-3}$ (e) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-1}$ (h) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x^2-4}$ (k) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

(c) $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x^2}$ (f) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-4}$ (i) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$ (l) $f(x)=\dfrac{3x}{x-1}$

Q 22 Determine cada um dos limites (no infinito) dados a seguir, envolvendo indeterminação $\infty-\infty$.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\ln(x^2-1)-\ln(x+1)$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+2}-x$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}x-\sqrt{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+4x}-x$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sqrt{9x^2+x}-3x$

Q 23 Determine as constantes a, b, c e d de modo que:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to b}\frac{x^2-a}{x-b}=4$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-ax+b}{x-3}=5$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}ax-\frac{bx+3}{x+1}=5$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{b\sqrt{x+3}-a}{x-1}=\frac{1}{6}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}f(x)=3$ e $\displaystyle\lim_{x\to -2}f(x)=1$, sendo $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{4x^2+4x-8}$

Q 24 Para cada uma das funções abaixo, calcule os limites $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ e $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

(a) $f(x)=x^2$, (b) $f(x)=x^3$, (c) $f(x)=\sqrt{x}$, (d) $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

2 Funções Contínuas. Teorema do Valor Intermediário.

Q 25 Escreva, ilustrando com gráficos, a definição de:

(a) função contínua à direita num ponto $x = a$;
(b) função contínua à esquerda num ponto $x = a$;
(c) função contínua num ponto $x = a$;
(d) função contínua num conjunto;
(e) função contínua.

Função para a questão 26.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se} \quad -1 \le x < 0 \\ 2x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad x \in \{1, 2\} \\ 4 - 2x & \text{se} \quad 1 < x < 2 \\ 0 & \text{se} \quad 2 < x < 3 \end{cases}$$

Q 26 Faça o esboço gráfico da função $f : [-1, 0) \cup (0, 3) \to (-1, 2)$, definida acima. A parir do gráfico, responda cada item abaixo.

(a) Existe $f(-1)$? Existe $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$? Existe $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$? f é contínua em $x = -1$? E à direita em $x = -1$?
(b) Existe $f(0)$? Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$? f pode ser contínua em $x = 0$?
(c) Existe $f(1)$? Existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$? f é contínua em $x = 1$?
(d) Existe $f(2)$? Existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$? f é contínua em $x = 2$?
(e) Existe $f(3)$? Existe $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$? f pode ser contínua em $x = 3$?
(f) Qual o valor que deve ser atribuído a $f(1)$ e a $f(2)$ para tornar f contínua nesses pontos? Por que?
(g) Há como atribuir algum valor a $f(0)$ para tornar f contínua em $x = 0$?

Q 27 Para cada item abaixo, decida para quais intervalos cada função é contínua.

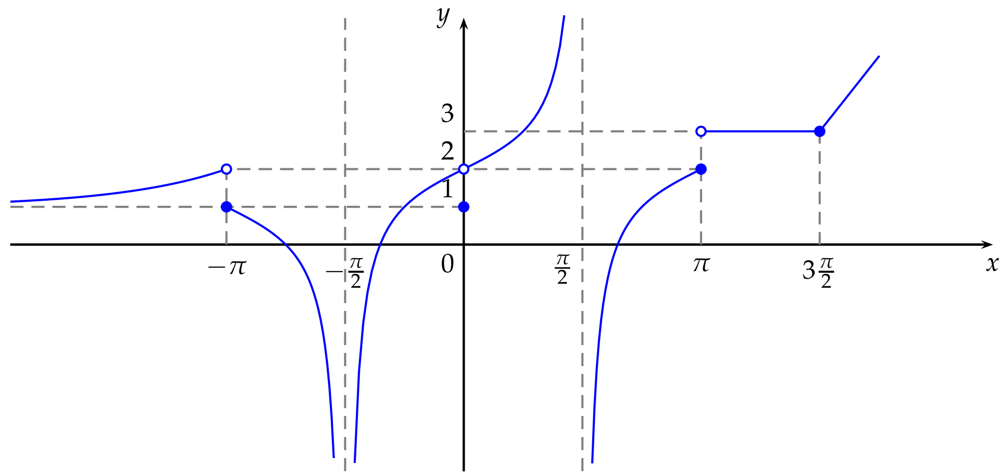
(a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 4x + 3}$;
(b) $g(x) = \dfrac{\ln(x) + x^2 + x}{x^2 - 4}$;
(c) $p(x) = 1 - \operatorname{cossec}(x)$;
(d) $q(x) = \sqrt{2x + 4}$;
(e) $r(x) = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$;
(f) $s(x) = e^x + e^{-x}$.
(g) $h(x) = \operatorname{sen}(x)$;
(h) $v(x) = \operatorname{tg}(x)$.

Q 28 Seja f a função dada abaixo. Exiba seu esboço gráfico, determine os limites abaixo e decida (justificando) se existe algum ponto em que f é descontínua.

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{se} \quad x > 1 \\ 2 & \text{se} \quad x \in \{-1, 1\} \end{cases}$$

(a) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$
(b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$
(c) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$
(d) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$
(e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
(f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Q 29 Considere a função $y = f(x)$ abaixo definida no domínio $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right\}$. Analisando o gráfico de $f(x)$, responda, justificando:



(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$
(b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x)$
(c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$
(d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x)$
(e) $\lim_{x\to \pi^+} f(x)$
(f) $\lim_{x\to \pi^-} f(x)$
(g) $\lim_{x\to \pi} f(x)$
(h) $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} f(x)$
(i) $\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}^+} f(x)$
(j) $\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}^-} f(x)$
(k) $\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}} f(x)$
(l) $\lim_{x\to -\pi^-} f(x)$
(m) $\lim_{x\to -\pi^+} f(x)$
(n) $\lim_{x\to -\pi} f(x)$
(o) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$
(p) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$
(q) $f(-\pi)$
(r) $f(0)$
(s) $f(\pi)$
(t) $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
(u) f é contínua em $x_0 = 0$?
(v) f é contínua em $x_0 = -\pi$?
(w) f é contínua em $x_0 = \frac{3\pi}{2}$?
(x) f é contínua em $x_0 = \pi$?
(y) f é contínua em $x_0 = 2$?

Q 30 (a) Exiba o gráfico de uma função tal que:
(1) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$
(2) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$
(3) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$
(4) $f(-2) = 1$ e $f(3) = 3$

(b) Exiba o gráfico de uma função $f : [-3,5] \to \mathbb{R}_+^*$ tal que:
(1) $\lim_{x\to -3^+} f(x) = 2$
(2) $\lim_{x\to 5^-} f(x) = 4$
(3) f descontínua em $x = 3$
(4) $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$
(5) $\nexists \lim_{x\to 1} f(x)$
(6) $f(-2) = 1$

(c) Exiba o gráfico de uma função $f : [-2,6] \to \mathbb{R}_-^*$ tal que:
(1) $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -2$
(2) $\lim_{x\to 6^-} f(x) = -4$
(3) f descontínua em $x = 3$
(4) $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$
(5) $\nexists \lim_{x\to 4} f(x)$
(6) $f(4) = -5$

Q 31 Por que cada umas das funções abaixo é descontínua no ponto indicado?

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ $[x_0 = 1]$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1}, & x \neq -1 \\ 2, & x = -1 \end{cases}$ $[x_0 = -1]$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-8}{x-4}, & x \neq 4 \\ 3, & x = 4 \end{cases}$ $[x_0 = 4]$

(d) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 2 \\ x^2-2x, & x > 2 \end{cases}$ $[x_0 = 2]$

Q 32 Em cada item, determine a constante a para que a função $f(x)$ seja contínua.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x < 3 \\ 2ax, & x \geq 3 \end{cases}$
(b) $f(x) = \begin{cases} 1+ax, & x \leq 0 \\ x^4+2a, & x > 0 \end{cases}$

Q 33 Defina $f(1)$, $g(4)$ e $h(-4)$ para que as funções f, g e h sejam contínuas, em que

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}, \qquad g(x) = \frac{x^2-16}{x^2-3x-4} \qquad \text{e} \qquad h(x) = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{4+x}.$$

Q 34 A partir de $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ podemos afirmar qual a imagem de 2? Qual propriedade f deve possuir para que, a partir de $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$, possamos afirmar o valor de $f(2)$?

Q 35 (a) Dê exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, para todo $x \neq 2$ e que seja possível redefinir (e redefina) $f(2)$ para que f seja contínua;

(b) Dê exemplo de uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja contínua, para todo $x \neq 0$ e que não seja possível redefinir $g(0)$ para que g se torne contínua.

Q 36 Em cada item, determine, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa. Quando falsa, justifique exibindo um contra exemplo.

(a) Se $f(2) = 4$, então $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$;
(b) Se $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$, então $f(a) = L$;
(c) Se f é uma função contínua $\forall\ x \neq 0$ com $f(0) = 0$, então $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$;
(d) Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então $\lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x) \neq 0$;

Q 37 Em cada item, determine, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa. Quando falsa, você pode justificar exibindo um contra exemplo.

(a) Se f é um função contínua tal que $f(-1) = 3$, então $\lim_{x\to 3} f(x) = -1$;

(b) Sabe-se que $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$. Então, $f(x) > 0$ para todo $x \in (1,3)$;

(c) Se $\lim_{x\to 1} \dfrac{3 - f(x)}{x-1}$ é finito, então $\lim_{x\to 1} f(x)$ pode ser qualquer valor;

(d) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) > 0$ para todo $x \neq 3$ com $f(3) = -2$, então $\nexists \lim_{x\to 3} f(x)$.

Q 38 Se uma função f muda de sinal quando x varia de um ponto $x = a$ para o ponto $x = b$, existirá, obrigatoriamente, um ponto entre a e b em que a função f se anula? Por que?

Q 39 Enuncie o Teorema do Valor Intermediário (TVI). Com apoio de ilustrações gráficas, explique por que é necessária a hipótese da função ser contínua.

Q 40 Verifique que $x = 2$ e $x = 4$ são duas raízes da equação $x^2 = 2^x$. Use o Teorema do Valor Intermediário (TVI) para mostrar que esta equação admite outra raiz real. Qual o menor intervalo, de comprimento inteiro, que esta raiz pertence?

Q 41 Mostre, fazendo uso do TVI, que:

(a) A função $f(x) = x^3 + x - 1$ possui pelo menos uma raiz no intervalo $[0,1]$;

(b) A função $f(x) = x^3 + 3x - 5$ possui pelo menos uma raiz no intervalo $[1,2]$;

(c) A função $f(x) = 1 + x\cos(\pi x/2)$ possui pelo menos uma raiz no intervalo $[1/2, 3/2]$;

(d) A função $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^2 - x - 3$ possui três raízes: uma no intervalo $(-4,-3)$, outra no intervalo $(-1,0)$ e a outra no intervalo $(0,1)$.

Q 42 Considere equação $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$. Verifique que $x = \pm 2$ é solução desta equação. Utilizando o TVI, mostre que esta equação possui mais duas raízes: uma no intervalo $(-1,0)$ e a outra no intervalo $(0,1)$.

Q 43 Existe algum arco cujo cosseno seja igual ao próprio arco? Ou seja, existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(x) = x$? Utilize o TVI para mostrar que sim.

Q 44 Com auxílio do TVI, mostre que a equações possuem raízes reais: (a) $x^2 = \cos(x)$ (b) $e^x = x + 2$.

Q 45 É verdade que todo polinômio, definido em $\mathbb{R}$, de grau ímpar possui, pelo menos, uma raiz real? Por que?

3 Teorema do Confronto. Teorema do Anulamento. Limites Fundamentais.

Teorema do Confronto (ou do Sanduíche):
Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de a (exceto possivelmente em a) e $\lim_{x\to a} g(x) = L = \lim_{x\to a} h(x)$, então $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Q 46 Uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Supondo que $f(x) = 1 + 4x - x^2$ e $h(x) = x^2 - 4x + 9$, construa, num mesmo sistema de coordenadas, os gráficos de f e h para determinar $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$. Em seguida, justifique analiticamente.

Q 47 Use o teorema do confronto para determinar os limites abaixo.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} x^4 \cdot \cos\left(\dfrac{2}{x}\right)$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

Q 48 É verdade que se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de a (exceto possivelmente em a) e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L \neq M = \lim\limits_{x\to a} h(x)$, então o $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe?

Teorema do Anulamento:
Se $f(x)$ é uma função limitada e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Q 49 Use o teorema do anulamento para determinar os limites abaixo.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\cos(x) + 2^x}{2^x}$ (g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} \cdot 2^{\operatorname{sen}(\pi/x)}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x^4 \cdot \cos\left(\dfrac{2}{x}\right)$ (d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(x) + x^6}{x}$ (f) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x \cdot \operatorname{sen}(x)$ (h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} \cdot e^{\cos(3\pi/x)}$

Dica (g) e (h): verifique que as funções $2^{\operatorname{sen}(\pi/x)}$ e $e^{\cos(3\pi/x)}$ são limitadas

Q 50 É verdade que:

(a) Se $f(x)$ é ma função qualquer e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, então o $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = 0$?

(b) Se $f(x)$ é ma função qualquer e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, então o $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x)$ existe?

(c) Se $f(x)$ é ma função limitada em torno de a e $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe, então o $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x)$ também existe?

Limite Fundamental Trigonométrico:

Se x é medido em radianos, então $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$.

Q 51 Calcule os seguintes limites envolvendo o limite fundamental trigonométrico.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$ (g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(\pi x)}{\operatorname{tg}(x)}$ (j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7 - 7\cos^2(x)}{3x^2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen}(7x)}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^4}$ (k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x \operatorname{sen}(x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{x}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3)}{x}$ (i) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x-\pi}$ (l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{tg}(2x)\operatorname{tg}(4x)\operatorname{tg}(6x)}$

Limite Fundamental Exponencial:

◇ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e = 2,71821828459045235\ldots$

◇ $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$

Q 52 Calcule os seguintes limites envolvendo o limite fundamental exponencial.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx+c}$ (c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^{x}$ (e) $\lim\limits_{x\to\pi/2}[1+\cos(x)]^{5\sec(x)}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x-1}$ (d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{6x+4}$ (f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$

Limite Fundamental Logarítmico:

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln(a),\ \ 0<a\neq1$$

Q 53 Calcule os seguintes limites envolvendo o limite fundamental logarítmico.

(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}$ (c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\operatorname{sen}(x)}$ (e) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5^x-25}{x-2}$

(b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$ (d) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^{x+h}-e^x}{h}$ (f) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{3^{x+h}-3^x}{h}$

4 Taxas de Variação. Definição de Derivada e Derivadas Laterais.

Q 54 Escreva a definição, para uma função qualquer $y=f(x)$, de taxa de variação média e taxa de variação instantânea. Exiba alguns exemplos e faça ilustração gráfica.

Q 55 Taxa média para a função $y=ax+b$, em que $a,b\in\mathbb{R}$ e $a\neq0$.

(a) No caso de $f(x)=x$, o que acontece com a taxa de variação média $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ para diferentes valores da variável independente x? (Para responder, escolha alguns valores iniciais para a variável x e as respectivas variações Δx, tanto positivas como negativas. Em cada caso, calcule Δy e examine o quociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$). A que conclusão você chegou? É possível estabelecer um argumento geométrico que comprove a veracidade de sua conclusão?

(b) No caso de $f(x)=2x+1$, o que acontece com a taxa de variação média $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ para diferentes valores da variável independente x? A que conclusão você chegou, em termos do sinal do coeficiente a? Exiba o esboço gráfico de f.

(c) No caso de $f(x)=-3x+2$, o que acontece com a taxa de variação média $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ para diferentes valores da variável independente x? A que conclusão você chegou, em termos do sinal do coeficiente a? Exiba o esboço gráfico de f.

(d) Examine o caso da função polinomial de primeiro grau mais geral $y=f(x)=ax+b$. Encontre a taxa de variação média $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ a partir de um ponto x_0 qualquer. Dê uma interpretação para o resultado a que você chegou, levando em conta as três possibilidades para o coeficiente angular a, a saber: $a<0$, $a>0$ e $a=0$.

Q 56 Sabendo que um objeto movimenta-se ao longo de uma linha, de acordo com a equação $s(t)=3t-2$, em que $s(t)$ é medida em metros e t em segundos. Faça uma análise deste movimento, no intervalo de tempo que vai de 3 seg a 7 seg, determinando:

(a) Δt; (b) Δs;

(c) a velocidade média do objeto quando este se desloca do ponto em que está aos 3 seg do início do movimento, ao ponto em que está aos 7 seg.

Q 57 Suponha que a posição de uma partícula em movimento sobre uma reta r seja dada por $s(t) = t^2 - 2t$, em que $s(t)$ é medida em metros e t em segundos.

(a) Determine a velocidade média entres os instantes $t = 2$ e $t = 5$;

(b) Determine a velocidade da partícula nos instantes: $t = 0$, $t = 4$ e em $t = w$ qualquer;

(c) Em quais instantes a velocidade é nula?

Q 58 No decorrer de uma experiência, derrama-se um líquido sobre uma superfície plana de vidro. Se o líquido vertido recobre uma região circular e o raio desta região aumenta uniformemente, qual será a taxa de crescimento da área ocupada pelo líquido, em relação à variação do raio, quando o raio for igual a $5cm$? Interprete o resultado obtido.
Atenção: (1) A taxa de crescimento da área é a sua taxa de variação; (2) A área do círculo, de raio r, é $A(r) = \pi r^2$.

Q 59 O volume $V = V(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ de um balão esférico muda de acordo com o valor do raio. Qual a taxa de variação de volume em relação ao raio, quando $r = 2cm$? Interprete o resultado obtido.

Q 60 Próximos à superfície da Terra, todos os corpos caem com a mesma aceleração constante. Os experimentos de Galileu sobre queda livre levaram à equação $s(t) = \dfrac{1}{2}gt^2$, em que s é a distância e g é a aceleração da gravidade da Terra. Com t em segundos (unidade usual), o valor de g será $9,8m/s^2$. Supondo que uma pedra cai em queda livre partindo do repouso no instante $t = 0s$, determine:

(a) Quantos metros a pedra cairá nos primeiros 2 segundos?

(b) Qual a velocidade neste instante?

Q 61 Dada uma função $f(x)$, escreva:

(a) A definição da derivada de f, num ponto x_0;

(b) A definição da derivada à direita de f, num ponto x_0;

(c) A definição da derivada à esquerda de f, num ponto x_0.

Q 62 Cada limite abaixo representa a derivada de alguma função primitiva f em algum ponto x_0. Estabeleça a primitiva f e o ponto x_0 em cada caso.

(a) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^9-1}{x-1}$ (e) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\pi/2+t)-1}{t}$ (g) $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\pi/4+\Delta x)-1}{\Delta x}$

(b) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-8}{h}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 3\pi}\frac{\cos(x)+1}{x-3\pi}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}}{x-4}$

Q 63 Usando a definição de derivada, calcule $f'(-1)$ para cada uma das funções dadas a seguir.

(a) $f(x) = 1 + x - 2x^2$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$ (c) $\dfrac{2}{\sqrt{3-x}}$

Q 64 Calcule, caso exista, a derivada da função $f(x) = \begin{cases} x^2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ no ponto $x_0 = 0$.

Q 65 A função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x}{2}, & x < 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x \geq 1 \end{cases}$ é diferenciável em $x_0 = 1$? Em caso afirmativo, determine $f'(1)$.

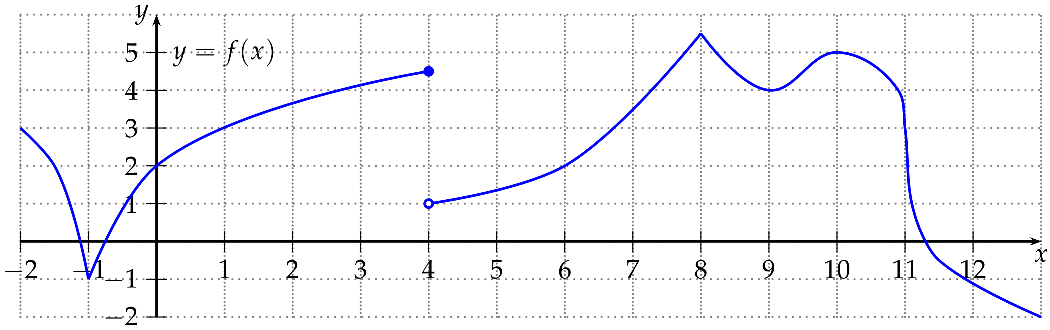
Q 66 Usando a definição de derivada, verifique se as funções a seguir são deriváveis em x_0. Se existir, determine $f'(x_0)$.

(a) $f(x) = 2x - 6$, $x_0 = 3$
(b) $f(x) = x^3 - 4$, $x_0 = 2$
(c) $f(x) = x^2 + x$, $x_0 = 5$
(d) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 0$
(e) $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$
(f) $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = \pi/6$
(g) $f(x) = x^2|x| + x$, $x_0 = 0$
(h) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $x_0 = 8$
(i)$f(x) = \begin{cases} -3x, & x \leq 2 \\ x - 8, & x > 2 \end{cases}$, $x_0 = 2$

Q 67 Para cada função abaixo mostre que f não é suave nos pontos indicados. Para tanto, analise analiticamente (via definição de derivada) e, depois, geometricamente (exibindo o esboço gráfico de f e localizando as quinas no gráfico).

(a) $f(x) = |x^2 - 1|$, $x = -1$ e $x = 1$
(b) $f(x) = |2x - 3|$, $x = 3/2$
(c) $f(x) = |3x - x^2|$, $x = 0$ e $x = 3$
(d) $f(x) = |x^3|$, $x = 0$
(e) $f(x) = |\operatorname{sen}(x)|$, $x = \pi$
(f) $f(x) = |\cos(x)|$, $x = \pi/2$ e $x = 3\pi/2$

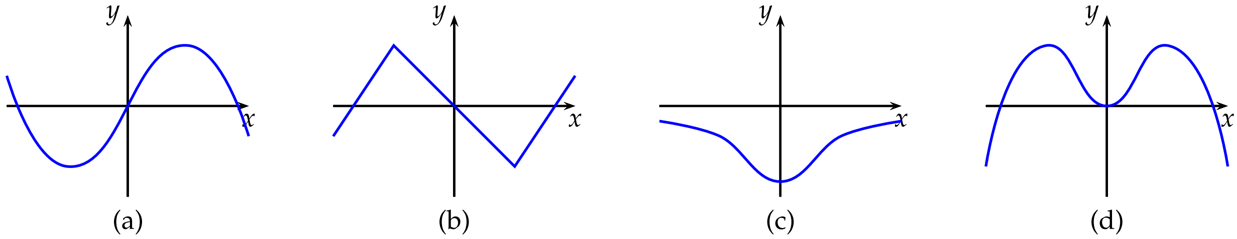
Q 68 O gráfico da função f é dado abaixo. (a) Em quais pontos f não é diferenciável? (b) Em quais pontos f tem derivada nula? (c) Em quais intervalos f tem derivada negativa e/ou positiva? Por que?

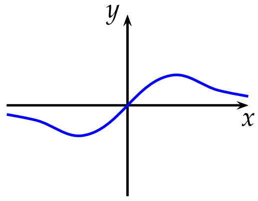


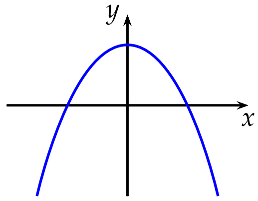
Q 69 Usando a definição de derivada, mostre que:

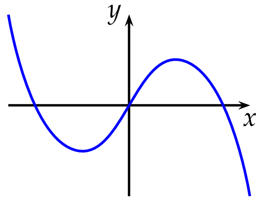
(a) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, em que $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall\ x \neq 0$;
(b) $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$, em que $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $\forall\ x \neq 0$;
(c) $f'(x) = 3x^2$, em que $f(x) = x^3$, $\forall\ x$;
(d) $f'(x) = 4x^3$, em que $f(x) = x^4$, $\forall\ x$;
(e) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, em que $f(x) = \sqrt{x}$, $\forall\ x \neq 0$;
(f) $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$, em que $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\forall\ x \neq 0$;
(g) $f'(x) = \cos(x)$, em que $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $\forall\ x$;
(h) $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$, em que $f(x) = \cos(x)$, $\forall\ x$.

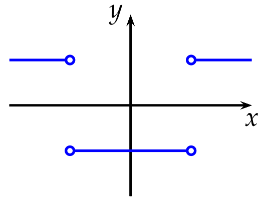
Q 70 Associe o gráfico de cada função em (a)-(d) com o grráfico de sua derivada em (1)-(4).











5 Retas Tangentes e Retas Normais.

5.1 Pela Definição de Derivada

Q 71 Se a reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto $(4;3) \in \text{Graf}(f)$ passa pelo ponto $(0;2)$, calcule $f(4)$ e $f'(4)$.

Q 72 Quantas retas tangentes ao gráfico de $y = x^3 + 3x$ são paralelas à reta $y = 6x + 1$? Determine as equações dessas tangentes.

Q 73 Para cada função abaixo, determine as equações das retas tangente e normal no ponto $P(x_p, y_p)$, dado. Após, num mesmo sistema de coordenadas, exiba o esboço gráfico de f e das retas.

(a) $f(x) = x + 1$, $x_p = 2$ (c) $f(x) = x^2$, $x_p = 2$ (e) $f(x) = \text{sen}(x)$, $x_p = \pi/4$

(b) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, $x_p = 1$(d) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_p = 4$ (f) $f(x) = \text{sen}(x)$, $x_p = \pi/2$

Q 74 Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 6x$ e que seja perpendicular à reta $r: 2y + x = 3$.

Q 75 Dada a função $f(x) = x^2 - x - 2$ determine a equação da reta tangente e a equação da reta normal ao gráfico de f no ponto de abscissa 1. Desenhe, num mesmo sistema de coordenadas, o gráfico de f e as duas retas.

Q 76 Dada a função $f(x) = -x^2 - 2x + 3$, caso exista, determine a equação da reta tangente a esta curva que seja normal à reta $r: y - 2x = 6$. Desenhe, num mesmo sistema de coordenadas, o gráfico de f e a da reta tangente.

Q 77 Seja $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ uma curva. Determine, caso existir: (a) a equação da reta tangente no ponto no ponto da abscissa $x = 1$. (b) o ponto da curva em que a reta tangente tem ângulo de inclinação de $60°$.

5.2 Pelas Regras de Derivação

Q 78 Resolva todas as questões da seção **Retas tangentes e retas normais (com o uso da definição de derivada)** deixando de utilizar a definição de derivada para utilizar as regras de derivação.

Q 79 Determine as constantes a e b em que: (a) $f(x) = ax^2 + x + 1$, sendo $f'(1) = -9$ e (b) $f(x) = x^2 + ax + b$, sendo $f(1) = -4$ e $f'(2) = 5$.

Q 80 Seja $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ uma curva. Se possível, determine, tanto a equação da reta tangente quanto a equação da reta normal a curva no ponto $P(2;2)$.

Q 81 Mostre que a função $f(x) = x^3 + 7x - 3$ não possui uma reta tangente com inclinação igual a 4.

Q 82 Encontre os pontos do gráfico da função $y = x^3 - x^2 - x + 1$ em que a reta tangente é horizontal.

Q 83 Ache uma parábola com equação $y = ax^2 + bx$ cuja reta tangente em $(1;1)$ tenha equação $t : y = 3x - 2$.

Q 84 Calcule as abscissas dos pontos do gráfico de $y = x^3 + 2x^2 - 4x$ nos quais a reta tangente é:

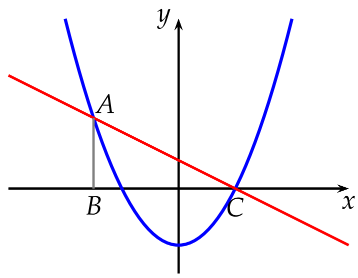
(a) horizontal; (b) Paralela à reta $r : 2y + 8x - 5 = 0$

Q 85 Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 3x$ que é perpendicular à reta de equação $r : 2y + x = 3$.

Q 86 Seja $f(x) = k - \dfrac{x^4}{16}$. Determine a constante k de modo que a reta que passa pelos pontos $M(0,5)$ e $N(5/2, 0)$ seja tangente ao gráfico de f.

Q 87 Calcule a área do triângulo retângulo ABC, de ângulo reto em B, indicado na figura. Sabe-se que a reta r é normal à curva $f(x) = x^2 - 1$ no ponto C, cuja abscissa é 1.

Note que a área é a metade do produto da ordenada do ponto A com a distância entre os pontos C e B.



Q 88 Determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0:

(a) $f(x) = (x^2 - 1)(x + 1)$, $x_0 = 2$ (b) $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + 1}$, $x_0 = -1$

Aviso: Para esta questão é necessário o uso das regras da derivada produto e do quociente.

Q 89 Considere a curva dada por $f(x) = -\sqrt{4x - 4}$. Caso exista, escreva a equação da reta tangente a curva, tal que seja paralela a reta $r : x + y = 10$.

Aviso: Para esta questão é necessário o uso da regra da Cadeia.

Q 90 Considere a curva dada por $f(x) = \sqrt{4x - 4}$. Caso exista, escreva a equação da reta tangente a curva, tal que seja paralela a reta $r : x + y = 10$.

Aviso: Para esta questão é necessário o uso da regra da Cadeia.

Q 91 Seja $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ uma curva. Caso exista, escreva a equação da reta normal a curva, tal que seja paralela à reta $r : x = 1$.

Q 92 Mostre que as tangentes à curva $f(x) = \dfrac{\pi \operatorname{sen}(x)}{x}$ em $x_0 = \pi$ e em $x_0 = -\pi$, se cortam formando ângulos retos.

Q 93 Seja $f(x) = x^2 + \ln(x + 1)$ uma curva. Caso exista, determine os pontos do gráfico de f em que a reta tangente a esta curva seja normal à reta $r : 3y + 3x = 6$.

Q 94 Mostre que a reta normal à curva $y = \operatorname{arcsen}(x) - \ln(x + 1)$, no ponto $x_0 = 0$, faz com o eixo x um ângulo de $90°$.

Q 95 Determine a equação da reta tangente e da reta normal ao gráfico da função $y = \operatorname{arctg}^2(x)$ no ponto de abscissa $x = \sqrt{3}$.

Q 96 Encontre todos os pontos sobre o gráfico da função $f(x) = 2\,\mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}^2(x)$ nos quais a reta tangente é horizontal.

Q 97 Calcule a equação da reta tangente à curva $f(x) = \dfrac{2\,\mathrm{sen}(x^2+2x)-3}{\cos(x^2)+1}$ no ponto $p = 0$.

Q 98 Mostre que a reta tangente à reta $f(x) = ax + b$ é ela mesmo, em qualquer ponto (x_p, y_p).

Q 99 Mostre que a tangente à parábola $f(x) = x^2$, no ponto (x_p, y_p) diferente do vértice, corta o eixo das abscissas no ponto $x = \dfrac{x_p}{2}$.

Q 100 Considere a parte da hipérbole $f(x) = \dfrac{1}{x}$ que fica no primeiro quadrante e desenhe a tangente num ponto arbitrário (x_p, y_p) dessa curva.

(a) Mostre que a porção da reta tangente compreendida entre os eixos coordenados tem cmo ponto médio o ponto de tangência;

(b) Ache a área do triângulo formado pelos eixos e pela tangente e verifique que essa área é independente da localização do ponto de tangência.

6 Derivadas das Funções Elementares.

6.1 Regras Básicas de Derivação.

Q 101 Verifique, determinando $f'(x_0)$, se as funções a seguir são deriváveis em x_0.

(a) $f(x) = 2x - 6$, $x_0 = 3$

(b) $f(x) = x^3 - 4$, $x_0 = 2$

(c) $f(x) = x^2 + x$, $x_0 = 5$

(d) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 0$

(e) $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$

(f) $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = \pi/6$

(g) $f(x) = x^2|x| + x$, $x_0 = 0$

(h) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$

(i)$f(x) = \begin{cases} -3x, & x \leq 2 \\ x - 8, & x > 2 \end{cases}$, $x_0 = 2$

Q 102 Sejam f e g funções diferenciáveis tais que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ e $g'(5) = 2$. Encontre:

(a) $(f \cdot g)'(5)$; (b) $(f/g)'(5)$; (c) $(g/f)'(5)$.

Q 103 Seja $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ ax + b, & x > 2 \end{cases}$. Ache os valores de a e b que faça f diferenciável em $\mathbb{R}$.

Q 104 Determine as constantes a e b de modo que f seja derivável em $x = 1$, sendo $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & x \leq 1 \\ x^{-1}, & x > 1 \end{cases}$.

Q 105 Para cada função abaixo mostre que f não é suave nos pontos indicados. Para tanto, analise analiticamente (determinando as derivadas laterais) e, depois, geometricamente (exibindo o esboço gráfico de f e localizando as quinas no gráfico).

(a) $f(x) = |x^2 - 1|$, $x = -1$ e $x = 1$

(b) $f(x) = |2x - 3|$, $x = 3/2$

(c) $f(x) = |3x - x^2|$, $x = 0$ e $x = 3$

(d) $f(x) = |x + 2| + 1$, $x = -2$

(e) $f(x) = |\,\mathrm{sen}(x)|$, $x = \pi$

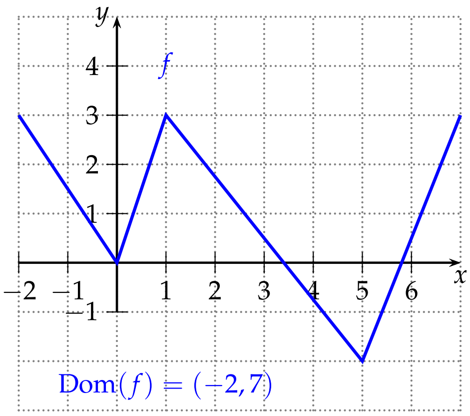
(f) $f(x) = |\cos(x)|$, $x = \pi/2$ e $x = 3\pi/2$

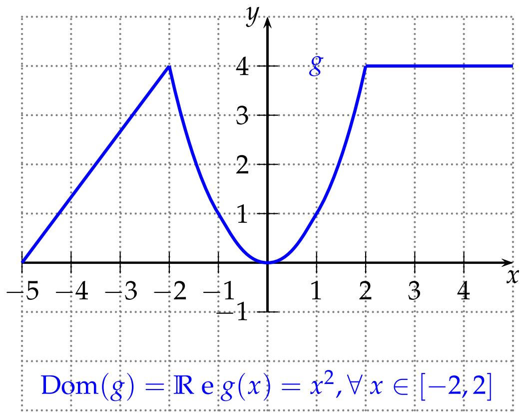
Q 106 Derive cada uma das funções dadas abaixo:

(a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 3$;
(b) $f(x) = -5x^6 + 3x^4 - 2x + 2$;
(c) $f(x) = \dfrac{3}{4x} + 2x\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{3}{\sqrt{x}}$;
(d) $f(x) = x^{2/3}(x^{1/3} - 1)$;
(e) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$;
(f) $f(x) = \dfrac{2x+4}{3x-1}$;
(g) $f(x) = \dfrac{2x^2-8}{x^2-16}$;
(h) $f(x) = x^2e^x$;
(i) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$;
(j) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$;
(k) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;
(l) $f(x) = (3x^2+6)(2x-1/4)$;
(m) $f(x) = \dfrac{x}{x+\frac{c}{x}}$;
(n) $f(x) = 2(x^2+2x+1)\operatorname{tg}(x)$;
(o) $f(x) = 2x\cos(x)\operatorname{tg}(x)$;
(p) $f(x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) + 8\operatorname{tg}(x)\sec(x)$;
(q) $f(x) = -\dfrac{2}{5}\operatorname{sen}(x) + 9\sec(x)$;
(r) $f(x) = x\operatorname{sen}(x) + \cos(x)$;
(s) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+2)^2}$;
(t) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}(x)-1}{\sec(x)}$;
(u) $f(x) = \dfrac{x^2\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$.

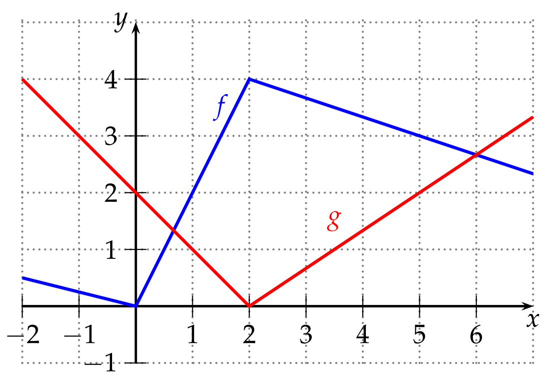
Q 107 Se h é uma função diferenciável com $h(2) = 4$ e $h'(2) = -3$, calcule $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{h(x)}{x}\right)\Bigg|_{x=2}$.

Q 108 A partir dos gráficos das funções f e g, exibidos abaixo, esboce o gráfico de f' e de g'.





Q 109 Os gráficos das funções f e g são dados na figura abaixo. Se $p(x) = f(x)\cdot g(x)$ e $q(x) = f(x)/g(x)$, calcule $p'(1)$ e $q'(5)$.



Q 110 Para cada caso abaixo, determine os intervalos onde a função é crescente e os intervalos onde a função é decrescente.

(a) $f(x) = ax + b$;
(b) $f(x) = ax^2 + bx + c$;
(c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$;
(d) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$;
(e) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$;
(f) $f(x) = \dfrac{-2x^2+8}{x^2-16}$;
(g) $f(x) = x + 3x^{-2}$;
(h) $f(x) = \dfrac{3x^2+4x}{1+x^2}$;
(i) $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{2x-2}$.

6.2 A Regra da Cadeia.

Q 111 Derive cada uma das funções abaixo:

(a) $f(x) = (2x^3 + 5x - 8)^3$;
(b) $f(x) = (5x^3 + 2x)^3(x - x^2)^2$;
(c) $f(x) = \sqrt[4]{1 + 2x + x^3}$;
(d) $f(x) = 5\sqrt{3x^4 + 5x + 1}$;
(e) $f(x) = (x^3 + 4x)^7$;
(f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;
(g) $f(x) = \dfrac{(x-1)^4}{(x^2+2x)^5}$;
(h) $f(x) = (x^2 - x + 1)^3$;
(i) $f(x) = 2e^{3x^2+6x+7}$;
(j) $f(x) = \operatorname{sen}^3(x)$;
(k) $f(x) = \ln(x^2 + x)$;
(l) $f(x) = \cos(x^2 + 1)$;
(m) $f(x) = \ln(\sec(x) + \operatorname{tg}(x))$;
(n) $f(x) = \dfrac{(2x-5)^4}{(8x^2-5)^3}$;
(o) $f(x) = \left[\dfrac{3x-3}{2x+5}\right]^4$;
(p) $f(x) = \cos(e^x + 1)$;
(q) $f(x) = \sqrt[3]{(1 + x^4)^2}$;
(r) $f(x) = \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg}(x)}$;
(s) $f(x) = (x^4 - 1)^3(x^3 + 1)^4$;
(t) $f(x) = 2^{5-x^3}$;
(u) $f(x) = e^{-ax}$;
(v) $f(x) = 10^{1-x^2}$;
(w) $f(x) = \dfrac{(2x-3)^3}{(5-3x)^2}$;
(x) $f(x) = (x^4 + 1)^{-3}$.

Q 112 Derive cada uma das funções abaixo:

(a) $f(x) = (1 + 4x)^5(3 + x - x^2)^8$;
(b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;
(c) $f(x) = \cos(a^3 + x^3)$;
(d) $f(x) = a^3 + \cos(x^3)$;
(e) $f(x) = 4\sec(5x)$;
(f) $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt[3]{x^2 + 2}$;
(g) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x)))$;
(h) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{tg}(\sqrt{\operatorname{sen}(x)}))$;
(i) $f(x) = \dfrac{2^{2x}\cos(3x)}{\operatorname{sen}(5x)}$;
(j) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\ln(x^2)}$;
(k) $f(x) = \log_2(1 - 3x)$;
(l) $f(x) = 2\operatorname{sen}(x^2)\cos(x + 1)$;
(m) $f(x) = 3e^{\operatorname{sen}(x)}$;
(n) $f(x) = e^{\sqrt{x}}(x^3 - 5x)$;
(o) $f(x) = xe^{-x^2}$;
(p) $f(x) = e^{-5x}\cos(3x)$;
(q) $f(x) = e^{x\cos(x)}$;
(r) $f(x) = \ln\left[\dfrac{x^2\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{1+x}}\right]$;
(s) $f(x) = \operatorname{tg}(\cos(x))$;
(t) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)}$;
(u) $f(x) = 2^{\operatorname{sen}(\pi x)}$;
(v) $f(x) = \operatorname{tg}^2(3x)$;
(w) $f(x) = x\ln(x) - x$;
(x) $f(x) = \ln(\ln(x))$;
(y) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$;
(z) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;
(α) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Q 113 A tabela ao lado apresenta valores para f, g, f' e g'. Se $h(x) = f(g(x))$, $H(x) = g(f(x))$, $F(x) = f(f(x))$ e $G(x) = g(g(x))$, calcule $h'(1)$, $H'(1)$, $F'(2)$ e $G'(3)$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

Q 114 Sejam f e g duas funções diferenciáveis. Se $F(x) = f(g(x))$, $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$, $f'(3) = 2$ e $f'(6) = 7$, calcule $F'(3)$.

Q 115 A *derivada segunda* de f (ou *derivada de segunda ordem* de f), indicada por f'', é a derivada da derivada de f, ou seja, $f''(x) = [f'(x)]'$. Assim, responda os itens abaixo.

(a) Seja g uma função duas vezes derivável e f dada por $f(x) = g(x + 2\cos(3x))$. Sabendo que $g'(2) = 1$ e que $g''(2) = 8$, determine $f''(x)$ e $f''(0)$.

(b) Seja f uma função duas vezes derivável e g dada por $g(x) = \cos(x)\cdot[f(x)]^2$. Sabendo que $f'(0) = f''(0) = 2$ e que $f(0) = -1$, determine $g''(x)$ e $g''(0)$.

Q 116 Uma *função hiperbólica* é uma das seguintes funções: seno hiperbólico, cosseno hiperbólico, tangente hiperbólica, secante hiperbólica, cossecante hiperbólica e cotangente hiperbólica. Essas funções são definidas em termos das funções exponenciais e, portanto, suas derivadas se resumem na derivação de funções exponenciais: $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ e as demais a partir destas. Assim, usando a regras de derivação, mostre que: (Atenção: $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$)

(a) $[\operatorname{senh}(x)]' = \cosh(x)$;
(b) $[\cosh(x)]' = \operatorname{senh}(x)$;
(c) $[\operatorname{tgh}(x)]' = \operatorname{sech}^2(x)$;
(d) $[\coth(x)]' = -\operatorname{cossech}^2(x)$;
(e) $[\operatorname{sech}(x)]' = -\operatorname{sech}(x)\cdot\operatorname{tgh}(x)$;
(f) $[\operatorname{cossech}(x)]' = -\operatorname{cossech}(x)\cdot\coth(x)$.

Q 117 Para cada um dos itens a seguir, determine:

(a) $f'(3)$, sendo $f(5+2x) + f(2x^2+1) = 4x^2 + 4x + 2$;

(b) $f'(0)$, sendo $f\left(\operatorname{sen}(x) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = f(3x-\pi) + 3x - \pi$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$;

(c) $(g \circ f \circ h)'(2)$, em que $f(0) = 1$, $h(2) = 0$, $g'(1) = 5$, $f'(0) = h'(2) = 2$;

(d) a função g, em que $(f \circ g)'(x) = 24x + 34$, $f(x) = 3x^2 + x - 1$ e $g'(x) = 2$.

Q 118 Use a regra da cadeia para mostrar que (a) a derivada de uma função diferenciável par é uma função ímpar e (b) a derivada de uma função diferenciável ímpar é uma função par. (c) Exiba alguns exemplos comprovando o que você acabou de mostrar.

Lembre-se que f é par se $f(-x) = f(x)$, $\forall\, x \in \operatorname{Dom}(f)$ e f é ímpar se $f(-x) = -f(x)$, $\forall\, x \in \operatorname{Dom}(f)$.

Q 119 Para cada uma das funções seguintes, determine as derivadas indicadas:

(a) $f(u) = u^2$, $u(x) = x^3 - 4$: $(f \circ u)'(x)$ e $(f \circ u)'(1)$;

(b) $y = u\operatorname{sen}(u)$, $u = x^2$: $\dfrac{dy}{dx}$ e $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x_0=\sqrt{\pi}}$;

(c) $f(u) = \sqrt[3]{u^2}$, $u(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$: $(f \circ u)'(x)$ e $(f \circ u)'(1)$;

(d) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$: $f'(x)$ e $f'(4)$;

(e) $f(x) = x\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{5} + 3x\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{5} + x\right)$: $f'(x)$ e $f'(0)$;

(f) $f(t) = 2^{3t} + 22^{-3t}$: $f'(t)$ e $f'(0)$;

(g) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}}\right)$: $f'(x)$ e $f'(4\pi/3)$;

(h) $f(x) = \ln\left[\operatorname{tg}(x^3 - x + e^x)\right]$: $f'(x)$ e $f'(0)$.

6.3 Derivada das Trigonométricas Inversas.

Q 120 Derive cada função abaixo:

(a) $y = \arccos(2x+1)$;
(b) $y = \operatorname{arccossec}(e^x)$;
(c) $y = x^2 \operatorname{arcsen}^3(x)$;
(d) $y = e^x \operatorname{arcsec}(x)$;
(e) $y = \operatorname{arctg}(2^{7x})$;
(f) $y = \operatorname{arccotg}(\ln(x))$;
(g) $y = \operatorname{arctg}(2x+1)$;
(h) $y = 1 - \operatorname{arcsen}(2x^3)$;
(i) $y = x + 3^{\operatorname{arctg}(x^2)}$;
(j) $y = \ln\left(\arccos(x^3+1)\right)$;
(k) $y = \log_3\left[\operatorname{arccotg}(\sqrt{x})\right]$;
(l) $y = x - \operatorname{arctg}(x)$;
(m) $y = \operatorname{arctg}(\sqrt{x})$;
(n) $y = \sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen}(x)$;
(o) $y = (1+x^2)\operatorname{arctg}(x)$;
(p) $y = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{1+x^2})$;
(q) $y = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$;
(r) $y = \operatorname{arctg}(\cos(x))$.

6.4 Derivadas de Ordem Superior (ou Sucessivas).

Q 121 Calcule as derivadas sucessivas até a ordem n indicada.

(a) $f(x) = 3x^4 - 2x - 9$, $n = 2$;
(b) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $n = 3$;
(c) $f(x) = e^{2x}$, $n = 4$;
(d) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $n = 76$;
(e) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, $n = 2$;
(f) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $n = 2$.
(g) $f(x) = e^{-x}$, $n = 2$;
(h) $f(x) = \ln(3x^2)$, $n = 2$;
(i) $f(x) = \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)$, $n = 2$;
(j) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2x-1}$, $n = 3$;
(k) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2+1)$, $n = 2$;
(l) $f(x) = 3^{-2x}$, $n = 5$.
(m) $f(x) = \ln(3x+1)$, $n = 6$.
(n) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $n = 5$.
(o) $f(x) = 2e^x + 3e^{-x}$, $n = 3$.

Q 122 Uma *equação diferencial* é uma equação que envolve uma função e suas derivadas. Quando a função contém apenas uma variável esta equação é chamada de *equação diferencial ordinário* (EDO). Em cada item, verifique se a função $y = f(x)$ é solução da EDO indicada.

(a) $y = e^{-x}$ e $y' + y = 0$;
(b) $y = \operatorname{sen}(x)$ e $y + y = 0$;
(c) $y = a\operatorname{sen}(x) + b\cos(x)$ e $y'' + y = 0$;
(d) $y = 3x^2 + 2x^3$ e $x^2y' - 4xy + 6y = 0$;
(e) $y = 1/2 + 3e^{-x^2}$ e $y' + 2xy = x$;
(f) $y = x^{-1}[\ln(x) + \ln^2(x)]$ e $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$
(g) $y = xe^{-x}$ e $xy' = (1-x)y$;
(h) $y = x^{-1}[1 + 2\ln(x)]$ e $x^2y'' + 3xy' + y =$.

Q 123 Mostre que:

(a) Se $f(x) = \dfrac{1}{x}$, então $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, em que $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$;

(b) Se $f(x) = e^{ax}$, então $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

(c) Se $f(x) = a^{bx}$, então $f^{(n)}(x) = [b\ln(a)]^n \cdot a^{bx}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

(d) Se $f(x) = a \cdot e^x + b \cdot e^{-x}$, então $f^{(n)}(x) = a \cdot ex + b \cdot e^{-x}$, se n for par e $f^{(n)}(x) = a \cdot ex - b \cdot e^{-x}$, se n for ímpar;

(e) Se $f(x) = \ln(ax+b)$, então $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot a^n \cdot (n-1)!}{(ax+b)^n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

(f) Se $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, então $f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos(x), & n = 1 + 4k \\ -\operatorname{sen}(x), & n = 2 + 4k \\ -\cos(x), & n = 3 + 4k \\ \operatorname{sen}(x), & n = 4k \end{cases}$, $k \in \mathbb{N}$.

Q 124 A partir de que ordem a derivada de um polinômio de grau n será indenticamente nula?

Q 125 Determine a expressão da segunda derivada de (a) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ e de (b) $h(x) = (f \circ g)(x)$.

6.5 Derivada Implícita.

Q 126 Determine a derivada y' das curvas dadas implicitamente por:

(a) $x^2 + y^2 = 4$;
(b) $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$;
(c) $x^2y^2 + x\operatorname{sen}(y) = 0$;
(d) $e^{xy} = x + y - 3$;
(e) $y^3 = \dfrac{x-y}{x+y}$;
(f) $\operatorname{tg}(y) = xy - 1$.

Q 127 Calcule a expressão e o valor no ponto dado das derivadas indicadas abaixo:

(a) $x^2 + y^2 = 4$: $\dfrac{dy}{dx}$ no ponto $P(1, \sqrt{3})$ e $\dfrac{dx}{dy}$ no ponto $Q(\sqrt{3}, 1)$;

(b) $y^4 + 3y - 4x^2 = 5x + 1$: $\dfrac{dy}{dx}$ no ponto $P(0, -1)$;

(c) $y - x - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(y) = 0$: $\dfrac{dy}{dx}$ no ponto de ordenada $\dfrac{\pi}{2}$;

(d) $e^y + xy = e$: y' no ponto de ordenada 1;

(e) $xy^2 + y^3 = 2x - 2y - 16$: y' no ponto de abscissa e ordenada possuem o mesmo valor.

Q 128 Retas tangentes e retas normais, via **derivada implícita**:

(a) Mostre que as retas tangentes às curvas $C_1 : 4y^3 - x^2y - x + 5y = 0$ e $C_2 : x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$ na origem, são perpendiculares.

(b) Seja C a circunferência de raio 1 centrada na origem e t a reta tangente à C no ponto de abscissa $x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Determine a área da região compeendida entre a reta t, a circunferência C, o eixo x e o eixo y.

(c) Determine a equação da reta tangente e da reta normal ao gráfico de cada curva abaixo, nos pontos indicados.

(c1) $6x^2 + 13y^2 = 19$ (elipse), nos pontos em que a normaç é paralela à reta $26x - 12y - 7 = 0$;

(c2) $\ln(y) = x + y^2$, no ponto $P(-1, 1)$;

(c3) $x^3 = y \cdot 2^y$, no ponto em que a normal é vertical.

(c4) $y^2 = x^3(2 - x)$ no ponto $(1, 1)$;

(c5) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 4$ no ponto $(-3\sqrt{3}, 1)$;

(c6) $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$ no ponto $(3, 1)$;

(c7) $x^2y^2 = (y + 1)^2(4 - y^2)$ no ponto $(0, -2)$.

Q 129 Considere a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ (de centro $(0, 0)$ e raio r) e desenhe a reta normal num ponto arbitrário qualquer (x_p, y_p) dessa curva. Derivando implicitamente, mostre que a normal, em qualquer ponto arbritário (x_p, y_p) da circunferência, passa pelo centro.

Q 130 Considere a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ e desenhe a reta tangente num ponto arbitrário qualquer (x_p, y_p) dessa curva. Derivando implicitamente, mostre que a tangente, em qualquer ponto arbitrário (x_p, y_p) da elipse, tem equação $\dfrac{x \cdot x_p}{a^2} + \dfrac{y \cdot y_p}{b^2} = 1$.

Q 131 Seja $y = f(x)$ uma função definida implicitamente pela equação $\sec^2(x + y) - \cos^2(x + y) = 0$. Determine y'.

Q 132 Seja $y = f(x)$ uma função definida implicitamente pela equação $y^2 - y\sqrt{xy} + 2x^2 = 10$. Encontre a equação da reta normal ao gráfico da função f no ponto $(1, 4)$.

Q 133 Seja $y = f(x)$ uma função definida implicitamente pela equação $x^4 - xy + y^2 = 1$. Calcule $f'(1)$, sabendo que $f(x) > 0$. $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

7 Diferenciais e Cálculos Aproximados.

Q 134 Seja $y = f(x)$ uma função.

(a) Defina o *incremento* ou *acréscimo* de x, Δx;

(b) Defina o *incremento* ou *acréscimo* de y, Δy, quando existe algum incremento Δx em x;

(c) Interprete, geometricamente, a razão $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

(d) Defina os *diferenciais* dx e dy;

(e) Estabeleça uma fórmula para cálculos aproximados, com o uso da derivada e dos diferenciais;

(f) Com uma aproximação de seis casas decimais, use a fórmula obtida no item anterior, para obter as seguintes aproximações:

(f1) $\sqrt{9,1}$;	(f3) $\sqrt[3]{8,1}$;	(f5) $\operatorname{sen}(1^\circ)$;	(f7) $\cos(1^\circ)$;
(f2) $\sqrt{8,9}$;	(f4) $\sqrt[3]{7,9}$;	(f6) $\operatorname{sen}(2^\circ)$;	(f8) $\operatorname{tg}(59^\circ 04' 30'')$;

(g) Em cada subitem, do item acima, compare o resultado obtido com o resultado obtido a partir de uma calculadora.

8 Taxas Relacionadas.

Um problema envolvendo taxas de variação de variáveis relacionadas é chamado de problema de *taxas relacionadas*. Assim, se uma variável x é função do tempo t, a taxa de variação de x em relação ao tempo é dada por $\dfrac{dx}{dt}$. Quando duas ou mais variáveis, todas função de t, são relacionadas por uma equação, a relação entre suas taxas de variação pode ser obtida diferenciando a equação em relação a t.

Em problemas com taxas relacionadas, as variáveis têm uma relação específica para os valores de t, onde t é a medida do tempo. Essa relação é usualmente expressa na forma de uma equação. Os valores das variáveis e as taxas de variação das variáveis em relação à t são frequentemente dados num determinado instante.

Diretrizes para Resolver Problemas envolvendo Taxas Relacionadas

1. Faça uma figura, se isso for possível;
2. Defina as variáveis. Em geral defina primeiro t, pois as outras variáveis usualmente dependem de t;
3. Escreva todos os fatos numéricos conhecidos sobre as variáveis e suas derivadas em relação à t;
4. Obtenha uma equação envolvendo as variáveis que dependem de t;
5. Derive em relação a t ambos os membros da equação encontrada na etapa acima;
6. Substitua os valores de quantidades conhecidas na equação da etapa acima e resolva em termos da quantidade desejada.

Q 135 Um balão está subindo verticalmente acima de uma estrada a uma velocidade constante de $1/3\ m/s$. Quando ele está a $17m$ acima do solo, uma bicicleta que se desloca a uma velocidade constante de $5\ m/s$ passa por baixo dele. A que taxa a distância entre a bicicleta e o balão aumentará $3s$ depois?

Q 136 Uma lâmpada colocada num poste está a $4m$ de altura. Se uma criança de $90cm$ de altura caminha afastando-se do poste à razão de $5\ m/s$, com que rapidez se alonga sua sombra? (Dica: use semelhança entre triângulos)

Q 137 Um balão de ar quente, subindo na vertical a partir do solo, é rastreado por um telêmetro (dispositivo de precisão destinado à medição de distâncias em tempo real) colocado a $500m$ de distância do ponto de decolagem. No momento em que o ângulo de elevação do telêmetro é $\pi/4$, e se o ângulo aumenta à razão de $0,14\ rad/min$, a que velocidade o balão sobe nesse momento?

Q 138 Um míssel é lançado verticalmente para cima de um ponto que está a $8\ km$ de uma estação de rastreamento, e à mesma altura desta. Durante os primeiros 20 segundo de vôo, seu ângulo de elevação θ varia à razão constante de 2 graus por segundo. Determine a velocidade do míssel quando o ângulo de elevação for 30 graus.

Q 139 Um bote é puxado em direção ao atracadouro por uma corda que está atada na proa do bote e que passa por uma polia sobre o ancoradouro (que está 1 m mais alto do que a proa do bote). Se a corda é puxada a uma taxa de 1 m/s, quão rápido está se aproximando o bote do ancoradouro quando ele estiver a 8 m dele?

Q 140 A medida de um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo está diminuindo a taxa de $\frac{\pi}{36} rad/seg$. Se o comprimento da hipotenusa é constante e igual a $40m$, com que velocidade a área está variando, no tempo em que a medida desse ângulo for igual $\frac{\pi}{6}$?

Q 141 Um meliante foge sobre uma muralha reta a uma velocidade de 4 m/s. Um holofote localizado a 20 metros de distância da muralha, e mesma altura que esta, focaliza o homem em fuga. A que taxa o holofote está girando quando o fujão se encontra a 15 metros do ponto da muralha que está mais próximo do holofote?

Q 142 Um observador vê um avião afastando-se em vôo horizontal a uma altura constante de $2,4km$ e velocidade de $1.600km/h$, sob um ângulo θ. Determine a variação de θ em relação ao tempo no instante em que $\theta = \frac{\pi}{3} rad$. Desconsidere a altura do observador.

Q 143 Uma câmera de televisão no nível do solo está filmando a subida de um ônibus espacial que está subindo verticalmente de acordo com a equação $s = 15t^2$, sendo s a altura e t o tempo. A câmera está a 600 m do local de lançamento. Encontre a taxa de variação da distância entre a câmera e a base do ônibus espacial, 10 segundos após o lançamento (suponha que a câmera e a base do ônibus estão no mesmo nível no tempo $t = 0$).

Q 144 Dois carros começam a se mover a partir de um mesmo ponto. Um deles viaja para o sul com velocidade constante de 60 km/h e outro viaja para o oeste com velocidade constante de 25 km/h. Qual é a taxa de variação da distância entre eles duas horas depois?

Q 145 As $8h$ o navio A está a 25 km ao sul do navio B. Se o navio A está navegando para o oeste à 16 km/h e o navio B está navegando para o sul a 20 km/h então determine a razão em que a distância entre os navios está variando às $8h$ $30min$.

Q 146 Uma escada de 5 m de comprimento está recostada em uma parede. A base da escada escorrega, afastando-se da parede a uma taxa (velocidade) de 2 cm/s. Com que velocidade cai o topo da escada, no momento em que a base da escada está a 3 m da parede?

Q 147 Deixa-se cair uma pedra em um lago de águas tranquilas, ocasionando ondas na forma de círculos concêntricos. O raio r da onda exterior está aumentando à razão constante de 1 cm/s. Quando o raio é igual a 4 cm, a que taxa está variando a área total A da água agitada?

Q 148 O ar está sendo bombeado para dentro de um balão esférico à razão de $4,5\ cm^3/min$. Determine a taxa de variação do raio quando este é de 2 cm.

Q 149 Um farol giratório completa uma volta a cada 15 segundos. O farol está a 60 m de P, o ponto mais próximo em uma praia retilínea. Determine a razão em que um raio de luz do farol está se movendo ao longo da praia em um ponto, Q, a 150 m de P. (Dica: 1 volta = 2π, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{15} rad/seg$)

Q 150 Suponha que uma bola de neve esteja se derretendo, com raio decrescendo à razão constante, passando de 30 cm para 20 cm em 45 minutos. Qual a variação do volume quando o raio está com 25 cm. (Dica: $dr/dt = -10/45 cm/min$)

9 A Regra de L'Hôspital (ou Regra de Cauchy?).

Q 151 (a) Enuncie a regra de L'Hôspital. (b) Para que serve esta regra? (c) Quando podemos utilizá-la?

Q 152 Identificando a indeterminação, calcule cada limite abaixo usando a regra de L'Hôspital.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-5x+5\,\text{sen}(x)}{2x^3}$

(b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4}$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{4x}}{5x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\text{sen}(x)}$

(e) $\lim\limits_{x\to -\infty} x\,\text{sen}\left(\dfrac{5}{x}\right)$

(f) $\lim\limits_{\to +\infty} x^2(e^{-x}-1)$

(g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{64}-1}{x^{32}-1}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\text{tg}(x)}{\text{sen}(x)}$

(i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x^3}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{x}$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}(64x)}{\text{tg}(32x)}$

(m) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(x)$

(n) $\lim\limits_{x\to (\pi/2)^+} \dfrac{\cos(x)}{1-\text{sen}(x)}$

(o) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$

(p) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$

(q) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(\ln(x))}{x}$

(r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x-3^x}{x}$

(s) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{\text{sen}(\pi x)}$

(t) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2e^x$

(u) $\lim\limits_{x\to 0^+} \text{sen}(x)\ln(x)$

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\text{sen}(x)}{x+\cos(x)}$

(w) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{1-\text{sen}(x)}{\text{cossec}(x)}$

(x) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{\text{senh}(x)}$

(y) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{arcsen}(x)}{x}$

(z) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\,\text{tg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(α) $\lim\limits_{x\to 0} \text{cotg}(2x)\,\text{sen}(6x)$

(β) $\lim\limits_{x\to 0} \text{cossec}(x)-\text{cotg}(x)$

(γ) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{5x^{-2}}$

(δ) $\lim\limits_{x\to 0} [\cos(2x)]^{3x^{-2}}$

(ε) $\lim\limits_{x\to 0} (2x^2+x)^x$

(ζ) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^2}$

(η) $\lim\limits_{x\to 0} [1-2x]^{x^{-1}}$

(θ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[1+3/x+5/x^2\right]^x$

(ι) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\ln(2)/(1+\ln(x))}$

(κ) $\lim\limits_{x\to +\infty} [e^x+x]^{x^{-1}}$

(λ) $\lim\limits_{x\to 0^+} [\cos(x)]^{x^{-2}}$

(μ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[1+\dfrac{1}{x}\right]^x$

(ν) $\lim\limits_{x\to 0} [1+x]^{1/x}$

(ξ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[x]{x}$

Alfabeto grego: Alpha (α), Beta (β), Gamma (γ); Delta (δ); Epsilon (ε); Zeta (ζ); Eta (η); Theta (θ); iota (ι); Kappa (κ); Lambda (λ); Mu (μ); Nu (ν); Xi (ξ).

10 Teoremas Relativos às Funções Deriváveis.

10.1 Teorema de Rolle

Teorema de Rolle (relativo às raízes da derivada):
Se $f(x)$ é contínua intervalo fechado $[a,b]$, derivável no aberto (a,b) e se anula nas extremidades deste segmento ($f(a)=f(b)=0$), existe, então, pelo menos, um ponto $c\in(a,b)$ tal que a derivada se anula, isto é, $f'(c)=0$.

Q 153 Comprove que as três condições das hipóteses do Teorema de Rolle estão satisfeitas pela função dada no intervalo indicado. Ache, então, um valor para c que satisfaça a conclusão do teorema.

(a) $f(x)=x^2-4x+3,\quad [1,3]$;

(b) $f(x)=x^3-2x^2-x+2,\quad [1,2]$;

(c) $f(x)=4x^3-9x,\quad [-3/2,3/2]$;

(d) $f(x)=\text{sen}(x),\quad [\pi,2\pi]$;

(e) $f(x)=\cos(x),\quad [\pi/2,3\pi/2]$;

(f) $f(x)=\cos^2(x),\quad [-\pi/2,\pi/2]$.

Q 154 Em cada item faça o esboço do gráfico da função no intervalo indicado. Teste as três condições das hipóteses do teorema de Rolle e determine quais entre elas são satisfeitas. Se as três forem satisfeitas determine um ponto no qual a reta tangente seja horizontal.

(a) $f(x)=1-|x|,\quad [-1,1]$;

(b) $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & \text{se } x<1 \\ 4-x & \text{se } x\geq 1 \end{cases},\quad [-2,4]$;

(c) $f(x)=x^2-x-12,\quad [-3,4]$;

(d) $f(x)=|2x-4|-2,\quad [1,3]$.

Q 155 Dada a função $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ (a) verifique que ela anula-se nas extremidades do intervalo $[-1, 1]$ e (b) que não existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$, ou seja, a derivada não se anula neste intervalo. (c) Explique por que o teorema de Rolle não pode ser aplicado.

10.2 Teorema de Lagrange

Teorema de Lagrange (dos crescimentos finitos):
Se $f(x)$ é contínua intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no aberto (a, b), existe, então, pelo menos, um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Q 156 A interpretação geométrica do teorema de Lagrange é que para um valor adequado c no intervalo aberto (a, b), a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P(c, f(c))$ é paralela à reta secante que passa pelos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$.

Em cada item, ache um valor de c que satisfaça a conclusão do teorema, faça um esboço do gráfico no intervalo indicado e coloque no gráfico as retas tangente e secante.

(a) $f(x) = 4 - x^2$, $[-1, 2]$;

(b) $f(x) = \text{sen}(x)$, $[0, \pi/2]$.

Q 157 Suponha que $s = s(t)$ seja a equação do movimento de uma partícula sobre uma reta, em que $s(t)$ satisfaz as hipóteses do teorema de Lagrange. É verdade que a conclusão deste teorema assegura que sempre existirá um certo instante em qualquer intervalo de tempo, no qual a velocidade instantânea será igual à velocidade média para o intervalo dado?

Q 158 Se a equação do movimento de uma partícula sobre uma reta for $s(t) = t^2 - t + 4$, $t \in [0, 4]$, ache o valor de t em que a velocidade instantânea é igual à volocidade média para o intervalo dado.

Q 159 Em que ponto a tangente à curva $y = \ln(x)$ é paralela à secante que passa pelos pontos $A(1, 0)$ e $B(e, 1)$?

Q 160 Use o teorema de Lagrange para mostrar que $e^x \geq 1 + x$.

11 Extremos de Funções.

Q 161 Em cada caso, verifique se a função f possui extremos globais no conjunto A indicado. Em caso afirmativo, calcule estes extremos.

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2$, $A = [-1; 3]$; (b) $f(x) = 2\cos(x) + \text{sen}(2x)$, $A = [0; 4\pi]$; (c) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3} + 2$, $A = [-2; 2]$.

Q 162 Mostre que $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ tem máximo absoluto em $x = e$. É verdade que $\pi^e < e^\pi$?

Q 163 Mostre que $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ para todo $x > 0$.

11.1 Problemas de Otimização.

Os problemas cujas soluções exigem a determinação de valores máximos e/ou mínimos das funções que os representam são chamados de problemas de otimização. Damos esta terminologia pelo fato de que as soluções encontradas são as melhores possíveis para cada caso, ou seja, resolver estes problemas com as técnicas de máximos e mínimos significa encontrar a solução ótima para eles.

Diretrizes para Resolver Problemas de Otimização

1. Atribuir símbolos a todas as grandezas dadas e a todas as grandezas a serem determinadas. Quando cabível, fazer um diagrama;
2. Estabelecer uma *equação fundamental* para a grandeza a ser maximizada ou minimizada;
3. Reduzir a equação fundamental a uma equação com uma única variável independente; isto pode envolver a utilização de uma *equação secundária* que relacione as variáveis independentes da equação fundamental;
4. Determinar o *domínio viável* da equação fundamental, isto é, determinar os valores para os quais o problema tem sentido;
5. Aplicar o Cálculo para o achar o valor máximo ou mínimo desejado.

✎ **Q 164** Ache os pontos do gráfico de $y = 4 - x^2$ que estão mais próximos do ponto $(0, 2)$. (Dica: Fórmula da distância entre dois pontos num plano $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ e para minimizar $f(x) = \sqrt{g(x)}$ basta minizar $g(x)$)

✎ **Q 165** Prove que se o produto de dois números positivos é constante, a soma é mínima quando os dois números são iguais.

✎ **Q 166** Dado um fio de arame de comprimento L como devemos moldá-lo, em forma de um retângulo, para que tenhamos a maior área possível? Qual a área deste retângulo?

✎ **Q 167** Uma reta variável passando pelo ponto $P(1, 2)$ intersecta o eixo x em $A(a, 0)$ e o eixo y em $B(0, b)$. Determine o triângulo OAB, de área mínima, para a e b positivos.

✎ **Q 168** Dentre os retângulos com base no eixo x e vértices superiores sobre a parábola $y = 12 - x^2$, determine o de área máxima.

✎ **Q 169** Um caixa com fundo quadrado e sem tampa deve ser formada com couro. Quais devem ser as dimensões da caixa que requerem a quantidade mínima de couro, sabendo que a sua capacidade é 32 litros? (Lembre-se que $1\ell = 1dm^3$)

✎ **Q 170** Um industrial deseja construir uma caixa aberta de base quadrada e área de superfície de 108 m^2. Que dimensões darão uma caixa com volume máximo?

✎ **Q 171** Um cartaz deve conter $50cm^2$ de matéria impressa com duas margens de $4cm$ em cima e embaixo e duas margens laterais de $2cm$ cada. Determine as dimensões externas do cartaz de modo que a sua área total seja mínima.

✎ **Q 172** Um tanque de base quadrada, sem tampa, deve conter $125cm^3$. O custo, por metro quadrado, para a base é de $R\$8,00$ e para os lados $R\$4,00$. Encontre as dimensões do tanque para que o custo seja mínimo.

✎ **Q 173** Desejamos fazer uma caixa retangular aberta com um pedaço de papelão de $8cm$ de largura e $15cm$ de comprimento, cortando um pequeno quadrado em cada canto e dobrando os lados para cima. Determine as dimensões da caixa de volume máximo.

✎ **Q 174** Corta-se um pedaço de arame de comprimento L em duas partes; com uma das partes faz-se uma circunferência e com a outra um quadrado. Em que ponto deve-se cortar o arame para que a soma das áreas compreendidas pelas duas figuras seja mínima?

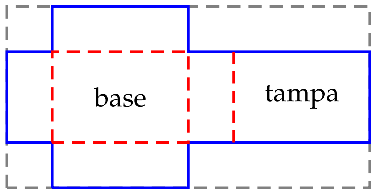
✎ **Q 175** Um fabricante deseja construir um recipiente, na forma de um cilindro circular reto, que deverá armazenar $2.000\pi\ cm^3$ de petróleo (o recipiente possui as tampas circulares). O custo de produção do recipiente é medido pela área total do recipiente. Determine a altura h e o raio da base r do cilindro (ambos medidos em cm) que minimizam o custo de produção.

✎ **Q 176** Considereando a questão anterior e considerando que o volume é $V_0\ cm^3$, mostre que o custo de produção do recipiente será mínimo quando $r = \sqrt[3]{\dfrac{V_0}{2\pi}}\ cm$ e $h = \sqrt[3]{\dfrac{4V_0}{\pi}}\ cm$.

Q 177 Um retângulo encontra-se inscrito em um semicírculo de raio r, de tal modo que um dos lados está sobre o diâmetro dese semicírculo. Encontre as dimensões do retângulo de maior área.

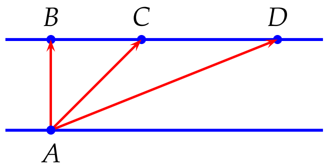
Q 178 Um fabricante quer construir caixas com tampa a partir de uma folha de papelão medindo $10 \times 15\ cm^2$.

Para construir a caixa, dois quadrados e dois retângulos são removidos dos cantos da folha de papelão. Indicando por x a medida do lado dos quadrados a serem removidos, qual o valor para x que maximiza o volume da caixa?



Q 179 Um homem lança seu bote em um ponto A na margem de um rio reto, com uma largura de 3 km, e deseja atingir tão rápido quanto possível um ponto D na outra margem, 8 km abaixo, conforme ilustra a figura.

Ele pode dirigir seu barco diretamente para o ponto B e então seguir andando para D, ou rumar diretamente para D, ou remar para algum ponto C entre B e D e então andar até D. Se ele pode remar a 6 km/h e andar a 8 km/h, onde ele deveria aportar para atingir D o mais rápido possível? Assuma que a velocidade da água é desprezível comparada com a velocidade na qual o homem rema.



Q 180 Um fabricante de móveis estima que o custo semanal da fabricação de x reproduções (manuais) de uma mesa colonial é dado por $C(x) = x^3 - 3x^2 - 80x + 500$. Cada mesa é vendida por $R\$$ 2.800, 00. Que produção semanal maximizará o lucro? Qual o máximo lucro semanal possível? (Dica: Lucro é igual a receita menos o custo $[L(x) = R(x) - C(x)]$ e a receita é o produto entre quantidade vendida e valor unitário $[R(x) = 2800x]$)

Q 181 Um projétil é lançado verticalmente para cima com uma velocidade de 120 m/s. Pela física sabemos que sua distância acima do solo após t segundos é $s(t) = -4,9t^2 + 120t$. (a) Que instante e com que velocidade o projétil atinge o solo? (b) Em que instante e qual será a altura máxima alcançada pelo projétil?

Q 182 Deve-se construir um tanque para armazenamento de gás propano em forma de cilindro circular reto com dois hemisférios nas extremidades. O custo de metro quadrado dos hemisférios é o dobro do custo da parte cilíndrica. Se a capacidade do tanque deve ser de $10\pi\ cm^3$, que dimensões minimizará o custo da construção?

Q 183 Determine o volume máximo de um cilindro circular reto que pode ser inscrito em:

(a) Um cone de 12 cm de altura e 4 cm de raio da base, se os eixos do cilindro e do cone coincidem;

(b) Um cone de altura H e raio da base R, se os eixos do cilindro e do cone coincidem. [Este item generaliza o item (a)]

(Dica: Para esta questão use semelhança entre triângulos)

12 Esboço de Gráficos.

A representação geométrica de uma função justifica-se, pois, por uma observação do gráfico podemos rapidamente fazer uma ideia das características da função representada, nomeadamente: *domínio*, *contradomínio*, *zeros*, *continuidade*, *comportamento assintótico*, *intervalos de crescimento e decrescimento*, *máximos e mínimos*, *pontos de inflexão*, *concavidades*, etc.

Abaixo apresentamos uma sequência de passos que podem ser seguidos e que, no seu conjunto, nos permitem elaborar o gráfico de uma função com uma certa segurança.

Roteiro para esboço de gráficos:

1. Determinar o domínio da função;
2. Calcular a interseção do gráfico com o eixo y e, se possível, calcular a interseção do gráfico com o eixo x resolvendo a equação $f(x) = 0$;
3. Fazer o estudo de sinal da função;
4. Verificar se o gráfico possui alguma simétrica: se a função é par o gráfico é simétrico em relação ao eixo y e, se a função é ímpar seu gráfico é simétrico em relação à origem. Também é conveniente analisar se a função é periódica;
5. Calcular as retas assíntotas verticais e horizontais do gráfico da função. Para as assíntotas verticais, determinar limites infinitos da função; Para as assíntotas horizontais, calcular os limites no infinito da função e verificar se o limite é finito;
6. Calcular f' e determinar todos os pontos críticos de f, ou seja, os pontos em $f'(x) = 0$ ou os pontos em que $f'(x)$ não existe;
7. Através do estudo do sinal de f', determinar os intervalos onde a função é crescente e os intervalos onde ela é decrescente;
8. Determinar os extremos relativos, isto é, os pontos de máximos e os pontos de mínimos;
9. Calcular f'' e determinar o sentido da concavidade de f, isto é, todos os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima ou côncavo para baixo;
10. Determinar Coordenadas de alguns pontos do gráfico, nos quais ajudem a traçar o gráfico de f;
11. Reunir todas essas informações e fazer o esboço do gráfico.

Observação: Dentre as funções reais de uma variável, certamente o polinômio é a mais simples para esboçar seu gráfico. De fato, seus gráficos possuem as seguintes características gráficas:

- O domínio e a imagem de um polinômio são toda a reta;
- Polinômios são funções contínuas e suaves em toda a reta. Isto quer dizer que seu gráfico não apresenta quebras, saltos ou bicos/quinas. Concluímos daqui que os gráficos de polinômios não admitem assíntota vertical;
- Graficamente, as raízes reais de uma função são os pontos de interseção de seu gráfico com o eixo x. Desse modo, um polinômio de grau n, tem no máximo n interseções com esse eixo;
- Raízes repetidas da equação $P(x) = 0$ produzem um gráfico que, localmente, é tangente ao eixo x. Se $P(x)$ tem um zero de multiplicidade (por exemplo) k em $x = a$, então o gráfico de $P(x)$ cruza o eixo de x em $(a, 0)$, se k é ímpar e toca (mas não corta) o eixo x em $(a, 0)$ se k é par;
- Raízes múltiplas de $P(x) = 0$ são sempre extremos locais da função. Este extremo será um máximo ou um mínimo dependendo da curvatura da função. Se, nesse ponto, a função for côncava para cima o ponto será um mínimo local. Se a função, nesse ponto, for côncava para baixo o ponto será um máximo local;
- Quanto maior for a multiplicidade da raiz, mais "achatado" será o gráfico ao tangenciar o eixo x;
- O gráfico de um polinômio do segundo grau é uma parábola e, portanto, não apresenta mudanças de curvatura. A parábola ou é virada para cima ($a > 0$) e nesse caso apresenta um ponto de mínimo global ou é virada para baixo ($a < 0$), apresentando, nesse caso, um máximo global;
- Os pontos onde uma função muda de curvatura são ditos pontos de inflexão. Se o grau de um polinômio $P(x)$ é n, então ele tem no máximo $n - 1$ pontos de inflexão. Assim, polinômios do segundo grau, cujos gráficos são parábolas, não têm pontos de inflexão pois não mudam de curvatura. Polinômios do terceiro grau têm um ponto de inflexão;
- Polinômios de grau par tendem ao mesmo limite à medida que o valor de x aumenta em valor absoluto. Por isso, as "extremidades" do gráfico de um polinômio de grau par são voltadas para um mesmo lado: ambas para cima ou ambas para baixo, dependendo do sinal de a_n. Em outras palavras, estes polinômios se comportam, no infinito, como uma parábola;
- Polinômios de grau ímpar crescem sem limite à medida que os valores de x crescem e decrescem sem limite à medida que os valores de x diminuem, ou vice versa, dependendo do sinal de a_n. Em outras palavras, estes polinômios se comportam no infinito como uma reta;
- Estes dois últimos itens nos garantem que gráficos de polinômios não admitem assíntotas horizontais.

✎ **Q 184** Levando em consideração o roteiro apresentado acima construa o gráfico para cada função abaixo.

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

(b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

(c) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2-4}$

(d) $f(x) = \dfrac{8-2x^2}{x^2-16}$

(e) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

(f) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$

(g) $f(x) = \dfrac{2x}{e^{x^2}}$

(h) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x+1}$

(i) $f(x) = e^{-x^2/2}$

(j) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$

(k) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

(l) $f(x) = \dfrac{5x}{x^2-4}$

☺ Confira seus gráficos com auxílio do WolframAlpha pelo endereço www.wolframalpha.com.

Exemplo: Para desenhar o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$ digite `plot(x^2)/(x^2-4)`. Acrescentando `,x=-4..4` o programa restringirá o x no intervalo $[-4,4]$ ou, acrescentando `,x=-4..4,y=-2..9` o programa restringirá o x no intervalo $[-4,4]$ e y no intervalo $[-7,7]$.

13 Wolfram | Alpha

O Wolfram | Alpha é um mecanismo de conhecimento computacional desenvolvido por Stephen Wolfram e sua empresa Wolfram Research. Excelente ferramenta que se demonstra como uma verdadeira fonte dinâmica de conhecimento.

O acesse é dado pelo endereço http://www.wolframalpha.com/ ou por algum aplicativo para iOS ou Android. Existe uma quantidade grande de exemplos para que o usuário possa tomar como base, bastando acessar http://www.wolframalpha.com/examples/. Em especial, que é o nosso caso, acesse a página destinada a exemplos para Cálculo Diferencial e Integral pelo endereço http://www.wolframalpha.com/examples/Calculus.html.

Alguns comandos úteis:

1. `plot x^3 - 6x^2 + 4x + 12`: desenha o gráfico da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x + 12$. Mais opções de plotagem em http://www.wolframalpha.com/examples/PlottingAndGraphics.html
2. `domain of 1/(x^2-4)`: exibe o domínio da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$;
3. `range of 1/(1+x^2)`: exibe a imagem da função $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$;
4. `is tan(x) continuous`: determinar se a função $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ é contínua;
5. `discontinuities (x^3+8)/(x^3+3x^2-4x-12)`: identificar os pontos de descontinuidade da função $f(x) = \dfrac{x^3+8}{x^3+3x^2-4x-12}$;
6. `lim (sin(x) - x)/x^3, x=0`: calcula o limite bilateral $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^3}$. Caso queira ver a resolução passo a passo, clique em **Step-by-step solution**;
7. `lim (sin(x) - x)/x^3, x=0-`: calcula o limite lateral à esquerda. De forma análoga o da direita;
8. `lim (1+1/x)^x, x=+infinity`: calcula o limite no infinito $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$;
9. `diff x^2`: deriva a função $f(x) = x^2$;
10. `d/dx x^2`: deriva, em relação a x, a função $f(x) = x^2$;
11. `d/dy x^2y^5`: deriva, em relação a y, a função $f(x,y) = x^2y^5$;

12. `d^3/dx^3 x^4 + sin(x)`: derivada de terceira ordem da função $f(x) = x^4 + \text{sen}(x)$. Mais opções para derivação em http://www.wolframalpha.com/examples/Derivatives.html
13. `int f(x)`: exibirá a família de primitivas de $f(x)$;
14. `int f(x), x=a..b`: exibirá o valor da integral definida $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$;
15. `f(x)=g(x)`: exibirá o conjunto solução desta equação, além da visualização gráfica das duas funções, auxiliando na identificação e cálculo da área de regiões limitadas por funções.

14 Referências

1. Diva Flemming – Cálculo A;
2. Eliana Azevedo – UDESC/Joinville;
3. Humberto José Bortolossi – UFF/RJ;
4. James Stwart – Cálculo;
5. Louis Leithold – O Cálculo com Geometria Analítica.

15 Respostas dos Exercícios

✉ Caso encontre alguma divegência com sua resposta, envie seu comentário para didisurf@gmail.com

☺ **Q 1** (a) $1/3$; (b) $1/4$; (c) $+\infty$ e $-\infty$; (d) $-1/2$; (e) 2; (f) $\sqrt{3}/6$.

☺ **Q 2** (a) Podemos afirmar que esse limite não existe, pois os limites laterais são diferentes. (b) O limite da função f, quando x tende a 5, é igual a mais infinito e, isto quer dizer que, à medida que os valores de x, estão arbitrariamente próximos de 5 (tanto pela direita e tanto pela esquerda) a função f cresce ilimitadamente. (c) Não podemos afirmar, pois a imagem de 3 pode ser qualquer valor ou, até mesmo, não existir. Por exemplo, a função $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 3 \\ -1, & x > 3 \end{cases}$ satisfaz (♣) e (✠) e não está definida em $x = 3$, ou seja, não existe a imagem de 3.

☺ **Q 3** (a) Podemos afirmar que o limite não existe pois, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 2 \neq 3 = \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$. (b) O limite da função f, quando x tende a 2, é igual a menos infinito e, isto quer dizer que, à medida que tomamos valores para x, arbitriamente próximos de 2, tanto pela direta quanto pela esquerda, os valores para a imagem da função f decrescem ilimitadamente. (c) Não podemos! Pois o valor para $f(5)$ pode ser qualquer um. Além disso, $f(5)$ talvez nem exista. Por exemplo, a função $f(x) = \begin{cases} 2, x < 5 \\ 3, x > 5 \end{cases}$ não está definida em 5, logo não existe $f(5)$, mesmo atendendo $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 3$.

☺ **Q 4** (a) As funções f e g são diferentes, pois possuem domínios diferentes: $f(x) = x - 4$ está definida em todo $\mathbb{R}$, ou seja, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, enquanto que $g(x)$ está definida para todo $x \neq 3$, ou seja, $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{3\}$. (b) Apesar das funções f e g serem diferentes, para valores de $x \neq 3$, vale que $f(x) = g(x)$, pois

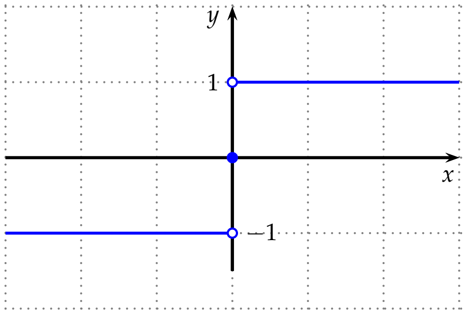
$$g(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} = \frac{(x-4)(x-3)}{x-3} = x - 4 = f(x),\ \forall\, x \neq 3$$

Como no cálculo de $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-4)(x-3)}{x-3}$ devemos considerar valores de x próximos de 3, mas diferentes de 3, podemos substituir $\dfrac{(x-4)(x-3)}{x-3}$ por $x - 4$ e assim $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-4)(x-3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} x - 4 = -1$.

☺ **Q 5** (i) (a) 1; (b) 2; (c) não existe pois os laterais são diferentes; (d) 3; (e) 1; (f) não existe. (ii) (a) -1; (b) -2; (c) não existe pois os laterais são diferentes; (d) 2; (e) 0; (f) não existe; (g) 3, (h) não existe; (i) 3.

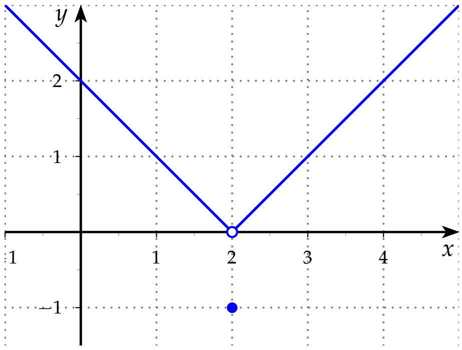
☺ **Q 6** (i) (a) 1; (b) 1; (c) 1; (d) $-\infty$; (e) $+\infty$; (f) 0. (ii) (a) -1; (b) 3; (c) não existe; (d) -1; (e) 3; (f) 3. (iii) (a) $1/2$; (b) $+\infty$; (c) não existe; (d) $-\infty$; (e) $1/2$; (f) $-1/2$.

☺ **Q 7** (a) 1, pois a função é contante e igual a 1 para qualquer $x > 0$;
(b) -1, pois a função é contante e igual a -1 para qualquer $x < 0$;
(c) não existe, pois os limites laterais são diferentes.



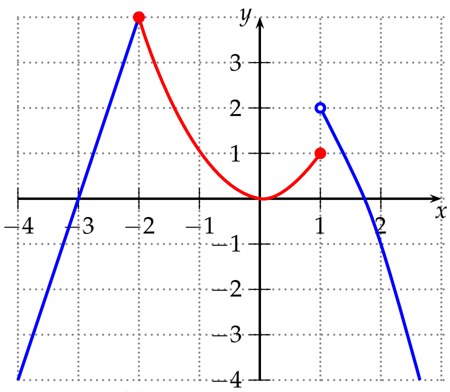
☺ **Q 8** Veja que a função $f(x) = |x-2|$, $\forall\ x \neq 2$ com $f(2) = -1$ é um contra-exemplo para as três afirmativas, pois é positiva para todo $x \neq 2$ e $f(2) = -1$.

Além disso, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$, contrariando (a), (b) e (c). Logo, as três são falsas.

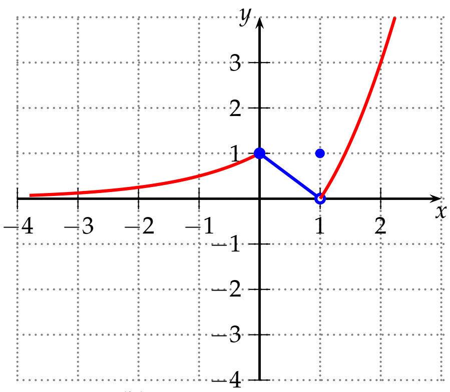


☺ **Q 9** Como $f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$, temos que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Assim $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ não existe.

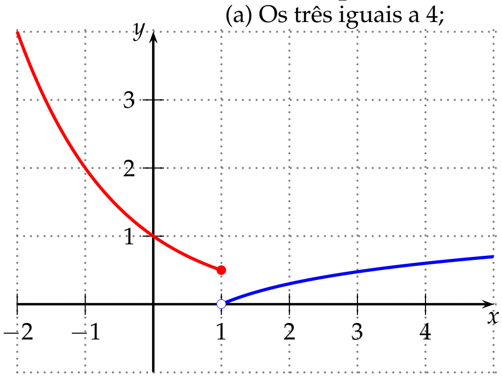
☺ **Q 10**



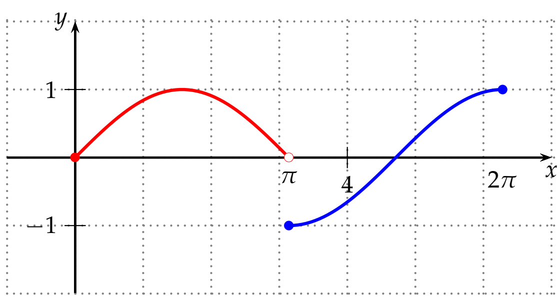
(a) Os três iguais a 4;



(b) Os três iguais a 0;



(c) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0,5$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$ e $\nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$;



(d) $\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to \pi^+} f(x) = -1$ e $\nexists \lim\limits_{x\to \pi} f(x)$.

☺ **Q 11** Em cada item, calcule cada limite lateral e depois compare um com o outro. (a) $a = -1$; (b) $a = -10$; (c) $a = 1$; (d) $a = -4$; (e) $b = 1 - 2a$; (f) $b = -1$ ou $b = 2$.

☺ **Q 12** (a) -6; (b) 13; (c) 16; (d) 2; (e) $-28/0 = \infty$, precisa ver a lateralidade para decidir entre $+\infty$ ou $-\infty$; (f) $38/0$, precisa ver a lateralidade para decidir entre $+\infty$ ou $-\infty$.

☺ **Q 13** (a) $2+0=2$; (b) não existe pois $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)+g(x) = 1+2 = 3 \neq 2 = 1+1 = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)+g(x)$; (c) $0\cdot 1{,}5 = 0$; (d) $-1/0^- = +\infty$; (e) $2^3\cdot 2 = 16$; (f) $\sqrt{3+1} = 2$.

☺ **Q 14** (a) 75; (b) -174; (c) $1/2$; (d) $4/9$; (e) 4; (f) -3; (g) $8e^{-1}+195$; (h) -2; (i) $\sqrt{2}$.

☺ **Q 15** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -2$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$.

☺ **Q 16** (a) 2, (b) 1, (c) 0, (d) 2/27, (e) (alterne lim com o log, calcule o lim depois o log) 2, (f) (alterne lim com sen, calcule o lim depois o sen) 0, (g) 4, (h) -5, (i) 3a/2, (j) 1, (k) 32, (l) 12, (m) -4/5, (n) 0, (o) -1/6, (p) 1, (q) 3, (r) 5/3, (s) 8 (t) 21/19, (u) 5/6.

☺ **Q 17** (a) 1/2, (b) 1/3, (c) 4/3, (d) $\sqrt{3}/18$, (e) 0, (f) 1/16, (g) -1/3, (h) 0, (i) 1/5, (j) 12, (k) 32, (l) 1/4, (m) 1/6, (n) 10/3, (o) $-\sqrt{2}/4$, (p) 108, (q) 3, (r) 1/2, (s) $\dfrac{b}{2a}$, (t) -1/3, (u) 2.

☺ **Q 18** (a) MV $x = y^6$ com $y \to 1$, $2/3$; (b) MV $x+12 = y^3$ com $y \to 2$, 12; (c) MV $x+8 = y^3$ com $y \to 2$, $1/12$; (d) MV $x = y^{12}$ com $y \to 1$, $4/3$; (e) MV $x = y^3$ com $y \to \sqrt[3]{a}$, $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$; (f) MV $x = y^3$ com $y \to 2$, $1/12$, (g) MV $3x+5 = y^3$ com $y \to 2$, $1/4$; (h) MV $x = y^{20}$ com $y \to 1$, $4/5$; (i) veja que $\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1 = (\sqrt[3]{x}-1)^2$, MV $x = y^3$ com $y \to 1$, $1/9$.

☺ **Q 19** (a) $+\infty$, (b) $-\infty$, (c) $+\infty$, (d) $-\infty$, (e) $-\infty$, (f) $-\infty$, (g) $-\infty$, (h) $+\infty$, (i) $+\infty$, (j) à esq. $+\infty$ e à dir. $-\infty$, (k) à esq. $+\infty$ e à dir. $-\infty$, (l) à esq. $-\infty$ e à dir. $+\infty$.

☺ **Q 20** (a) 0, (b) -2/3, (c) 0, (d) $\sqrt{2}/2$, (e) $-\infty$, (f) 0, (g) 2, (h) -1.

☺ **Q 21** Horizontais: (a) $y=2$, (b) $y=2$, (c) $y=-1$, (d) não existem, (e) não existem, (f) $y=1$, (g) não existem, (h) $y=1$, (i) $y=2$ e $y=-2$, (j) não existem, (k) $y=-1$ e $y=1$, (l) $y=3$. Verticais: (a) $x=3$, (b) $x=1$ e $x=-3$, (c) $x=0$, (d) $x=-1$, (e) $x=1$, (f) $x=2$ e $x=-2$, (g) $x=1$, (h) $x=2$ e $x=-2$, (i) não existem, (j) não existem, (k) $x=-2$ e $x=2$, (l) $x=1$.

☺ **Q 22** (a) $+\infty$, (b) 0, (c) 0, (d) 2, (e) $+\infty$, (f) 1/6.

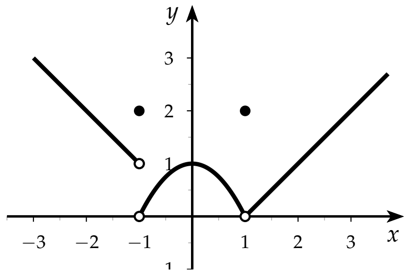
☺ **Q 23** (a) $a=4$ e $b=2$, (b) $a=1$ e $b=-6$, (c) $a=0$ e $b=-5$, (d) $a=4/3$ e $b=2/3$, (e) $a=0$, $b=12$, $c=36$ e $d=24$.

☺ **Q 24** (a) os dois limites são iguais a 2. (b) os dois limites são iguais a 3. (c) os dois limites são iguais a 1/2. (d) os dois limites são iguais a -1.

☺ **Q 25** Cadê o livro?

☺ **Q 26** (a) Sim, $f(-1)=0$. Não. Sim. Não. Sim. (b) Não. Não. Não. (c) Sim, $f(1)=1$. Sim. Não. (d) Sim, $f(2)=1$. Sim. Não. (e) Não. Não. Não. (f) $f(1)=2$ e $f(2)=0$. (g) Não, pois $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

☺ **Q 27** (a) $\mathbb{R} - \{1,3\}$, (b) $(0,2)\cup(2,+\infty)$, (c) $\{x \in \mathbb{R}; x \neq k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, (d) $[-2,+\infty)$, (e) $\mathbb{R} - \{-1\}$, (f) $\mathbb{R}$, (g) $\mathbb{R}$, (h) $\{x \in \mathbb{R}; x \neq \pi/2 + k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.



☺ **Q 28** Do gráfico, afirmamos: (a) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$; (b) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$; (c) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0$; (d) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1$; (e) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ e (f) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$. Como não existe $\lim_{x\to -1} f(x)$, visto que $\lim_{x\to -1^+} f(x) \neq \lim_{x\to -1^-} f(x)$, f não é contínua em $x = -1$. Além disso, temos que $\lim_{x\to 1} f(x) = 0 \neq f(1) = 2$, ou seja, f também não é contínua em $x = 1$.

☺ **Q 29** (a) 1; (b) $-\infty$; (c) $+\infty$; (d) $\nexists$; (e) 3; (f) 2; (g) $\nexists$; (h) $-\infty$; (i) 3; (j) 3; (k) 3; (l) 2; (m) 1; (n) $\nexists$; (o) 1; (p) $+\infty$; (q) 1; (r) 1; (s) 2; (t) 3; (u) não; (v) não; (w) sim; (x) não; (y) sim.

☺ **Q 30** Existem várias possibilidades.

☺ **Q 31** (a) $\nexists \lim_{x\to 1} f(x)$. (b) $\lim_{x\to -1} f(x) = -2 \neq 2 = f(-1)$. (c) $\lim_{x\to 4} f(x) = 6 \neq 3 = f(4)$. (d) $\nexists \lim_{x\to 2} f(x)$.

☺ **Q 32** (a) $4/3$; (b) $1/2$.

☺ **Q 33** $f(1) = 1/2$, $g(4) = 8/5$ e $h(-4) = -1/16$

☺ **Q 34** Não. Que f seja contínua em $x = 2$.

☺ **Q 35** (a) Seja $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 1 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$. Assim, temos que f não é contínua (apenas) em $x = 2$. Agora, se modificarmos, na definição de f, $f(2) = 1$ para $f(2) = 3$, teremos f contínua; (b) Seja $g(x) = \dfrac{1}{x^2}, \forall x \neq 0$ e $g(x) = 1$ se $x = 0$. Neste caso, não podemos atribuir algum valor para $f(0)$ de modo que fique igual ao $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ visto que, este limite é infinito.

☺ **Q 36** (a) Falso. Por exemplo, dada função $f(x) = \begin{cases} 4, x \geq 2 \\ 3, x < 2 \end{cases}$, temos $f(2) = 4$ e, vemos que não existe $\lim_{x\to 2} f(x)$. (b) Falso. A partir de $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$, garantimos que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ mas nada podemos dizer sobre $f(a)$, pois $f(a)$ pode ser qualquer valor ou, até mesmo, não existir. Agora, se f fosse contínua (não temos essas informação) certamente asseguraríamos $f(a) = L$, as não é o caso. (c) Temos que f é descontínua em $x = 0$. Assim, ou $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$ ou não existe este limite. Portanto, a afirmativa é falsa. (d) Se o limite bilateral é igual a L, isso quer dizer que os laterais são iguais e iguais a L. Logo $L - L = 0$. Portanto, a afirmativa é falsa.

☺ **Q 37** (a) Falso! Por exemplo, a função constante $f(x) = 3$ é contínua e $f(-1) = 3$. No entanto, $\lim_{x\to 3} f(x) = 3 \neq -1$. (b) Falso! Veja que, para a função $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{se} \quad x \neq 2 \\ -1 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$ temos $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$. No entanto, $f(2) = -1 < 0$ contrariando a afirmação $f(x) > 0$ *para todo* $x \in (1, 3)$. (c) Falso! Como $\lim_{x\to 1} x - 1 = 0$ e $\lim_{x\to 1} \dfrac{3 - f(x)}{x - 1}$ é finito, devemos ter, obrigatoriamente, $\lim_{x\to 1} 3 - f(x) = 0$ pois, caso contrários, teríamos uma impossibilidade $\dfrac{K}{0}$. Portanto, $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$. (d) Falso! Veja que a função $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x \neq 3 \\ -2 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$ satisfaz $f(x) > 0$ se $x \neq 3$ e, $f(3) = -2$. No entanto, existe o limite $\lim_{x\to 3} f(x)$, que é igual a 2.

☺ **Q 38** NÃO. Por exemplo, considere a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$, tal que $f(0) = 2$. Temos $f(x) < 0$ para todo $x < 0$ e $f(x) > 0$ para todo $x > 0$ e, no entanto, não existe, obrigatoriamente, número algum que anule f.

☺ **Q 39** Cadê o livro?

☺ **Q 40** Veja que $2^2 = 2^2 = 4$ e $4^2 = 2^4 = 16$, ou seja, que $x = 2$ e $x = 4$ são raízes da equação $x^2 = 2^x$. Como $g(x) = 2^x$ e $h(x) = x^2$ são duas funções contínuas em $\mathbb{R}$, vemos que a função $f(x) = g(x) - h(x) = 2^x - x^2$ é contínua em $\mathbb{R}$. Assim, precisamos de dois números a e b tais que $f(a) \cdot f(b) < 0$ para garantir que existe algum $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Seja $a = -1$ e $b = 0$. Temos:

$$f(-1) = 2^{-1} - (-1)^2 = 0{,}5 - 1 = -0{,}5 < 0 \quad \text{e} \quad f(0) = 2^0 - (0)^2 = 1 - 0 = 1 > 0.$$

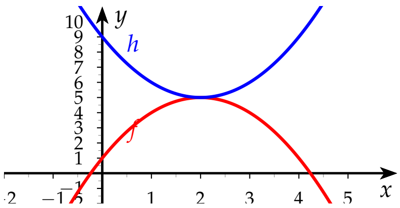
Portanto, existe algum número c, entre -1 e 0, ta que $f(c) = 0$, isto é $x = c$ é outra solução para a equação $x^2 = 2^x$. Perceba que $(-1, 0)$ é o menor intervalo, de comprimento inteiro, contendo esta outra raiz.

☺ **Q 43** Construa, num mesmo sistema de coordenadas, os gráficos das funções $y = \cos(x)$ e $y = x$ para estimar o intervalo $[a, b]$ que contém raiz da equação $\cos(x) = x$. Em seguida, adote que $f(x) = \cos(x) - x$ argumentandu sua continuidade, em especial no intervalo. Daí use o TVI para mostrar que existe um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$ e, portanto, raiz da equação.

☺ **Q 44** Análogo à questão anterior.

☺ **Q 45** Sim. Comece argumentando que todo polinômio é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Supondo (primeiramente) $a_n > 0$, determine os limites no infinito deste polinômio. Observe que os sinais, destes limites, serão opostos. Com isso, use o TVI. Depois, suponha $a_n < 0$ e repita o processo.

☺ **Q 46** Como $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} 1 + 4x - x^2 = 5$ e $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = \lim\limits_{x\to 2} x^2 - 4x + 9 = 5$, segue do teorema do sanduíche, que $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 5$.



☺ **Q 47** (a) Temos que $\forall\, x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$. Daí $-\dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$. Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, pelo teorema do confronto, segue-se que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x^2} = 0$. (b) Temos que $\forall\, x \neq 0$, $-1 \leq \cos(2/x) \leq 1$. Daí $-x^4 \leq x^4\cos(2/x) \leq x^4$. Como $\lim\limits_{x\to 0} -x^4 = \lim\limits_{x\to 0} x^4 = 0$, segue-se pelo teorema do sanduíche que $\lim\limits_{x\to 0} x^4 \cdot \cos\left(\dfrac{2}{x}\right) = 0$. (c) Temos que $\forall\, x \neq 0$, $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq 1$. Daí $-x^2 \leq x^2\operatorname{sen}(1/x) \leq x^2$. Como $\lim\limits_{x\to 0} -x^2 = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, segue-se pelo teorema do sanduíche que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$. (d) 1, veja no livro!

☺ **Q 48** Na-na-ni-na-NÃO! Por exemplo, o $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ não existe e $-1 \leq \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1$.

☺ **Q 49** (a) 0, (b) 0, (c) 0, (d) $+\infty$, (e) 1, (f) 0, (g) 0, (h) 0.

☺ **Q 50** (a) Na-na-ni-na-NÃO! Por exemplo, para $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = x$, temos $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \cdot g(x) = 1 \neq 0$. (b) Na-na-ni-na-NÃO! Por exemplo, para $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2}$ e $g(x) = x$, temos $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ que não existe. (c) Na-na-ni-na-NÃO! Por exemplo, para $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, que é limitada, e $g(x) = 1$, temos $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ que não existe.

☺ **Q 51** (a) 0, (b) 1/2, (c) 1, (d) 3, (e) 5/7, (f) 0, (g) π, (h) $+\infty$, (i) -1, (j) 7/3, (k) 1/2, (l) 5/16.

☺ **Q 52** (a) e^{ab}, (b) e^6, (c) e^{-5}, (d) e^{30}, (e) Ponha $y = \cos(x)$, com $y \to 0$. Veja que o LFE ficará elevado a 5, obtendo e^5, (f) Veja que $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \dfrac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{-1}{x}}$, depois obtenha $\dfrac{e^1}{e^{-1}} = e^2$.

☺ **Q 53** (a) $1/2$, (b) e^2, (c) 1, (d) e^x, (e) $25\ln(5)$, (f) $3^x\ln(3)$.

☺ **Q 54** Cadê o livro?

☺ **Q 55** (a) É igual a 1; (b) É igual a 2; (c) É igual a -3; (d) É igual a a

☺ **Q 56** (a) 4 seg; (b) $s(7) - s(3) = 12\ m$; (c) $Vm = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{12}{4} = 3$ m/s

☺ **Q 57** (a) 5 m/s; (b) $V_{t=0} = V(0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{s(t)-s(0)}{t-0} = -2$, $V(4) = \lim\limits_{t\to 4} \dfrac{s(t)-s(4)}{t-4} = 6$, $V_{t=w} = \lim\limits_{t\to w} \dfrac{s(t)-s(w)}{t-w} = 2w-2$; (c) $t = 1$.

☺ **Q 58** $\lim\limits_{r\to 5} \dfrac{\Delta A}{\Delta r} = \lim\limits_{r\to 5} \dfrac{A(r)-A(5)}{r-5} = 10\pi$. No instante que $r = 5\ cm$, a área varia 10π, que equivale ao comprimento da circunferência de raio 5.

☺ **Q 59** $\lim\limits_{r\to 2} \dfrac{\Delta V}{\Delta r} = \lim\limits_{r\to 2} \dfrac{V(r)-V(2)}{r-2} = 16\pi$. No instante que $r = 2\ cm$, o volume varia 16π, que equivale à medida da área da esfera de raio 2.

☺ **Q 60** (a) $19,6\ m$; (b) $V(2) = \lim\limits_{t\to 2} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{t\to 2} \dfrac{s(t)-s(2)}{t-2} = 19,6\ m/s$

☺ **Q 61** Cadê o livro?

☺ **Q 62** (a) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$ (primeiro limite) e $f(x) = \sqrt{x+1}$, $x_0 = 0$ (segundo limite); (b) $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$; (c) $f(x) = x^9$, $x_0 = 1$; (d) $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 3\pi$, (e) $f(x) = \text{sen}(x)$, $x_0 = \pi/2$, (f) $f(x) = 3^x$, $x_0 = 0$. (g) $f(x) = \text{tg}(x)$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; (h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 4$.

☺ **Q 63** (a) 5; (b) -1/9; (c) 1/8.

☺ **Q 64** $f'(0) = 0$

☺ **Q 65** Sim e $f'(1) = -1/2$

☺ **Q 66** (a) $f'(3) = 2$; (b) $f'(2) = 12$; (c) $f'(5) = 11$; (d) Não; (e) Não; (f) $f'(\pi/6) = -1/2$; (g) $f'_-(0) = f'_+(0) = 1$; (h) 1/6; (i) Não, $f'_-(2) = -3 \neq f'_+(2) = 1$.

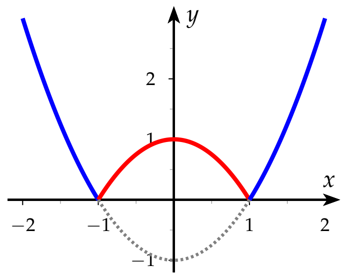
☺ **Q 67** Como é análogo para cada item, exibiremos a resposta apenas do item (a).

f sem o módulo: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se} \quad x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 1 - x^2 & \text{se} \quad -1 < x < 1 \end{cases}$.

As derivadas laterais de f nos pontos $x = -1$ e em $x = 1$:

- ⋄ $f'_-(-1) = -2$ e $f'_+(-1) = 2 \Rightarrow \nexists\ f'(-1)$;
- ⋄ $f'_-(1) = -2$ e $f'_+(1) = 2 \Rightarrow \nexists\ f'(1)$.

Veja as quinas no gráfico ao lado.



☺ **Q 68** (a) Em $x_0 = -1$ e em $x_0 = 8$ pois o gráfico de f tem uma "quina", nestes pontos. Em $x_0 = 4$ pois f é descontínua neste ponto. E, em $x_0 = 11$ pois a reta tangente ao gráfico de f é vertical neste ponto, ou seja, o limite da definição de derivada é infnito; (b) Em $x_0 = 9$ e em $x_0 = 10$ pois, nestes pontos, a reta tangente é paralela ao eixo x; (c1) $f'(x) < 0$ nos intervalos $(-\infty, -1)$, $(8, 9)$ e $(10, +\infty)$, pois nestes intervalos a função é decrescente. (c2) $f'(x) > 0$ nos intervalos $(-1, 4)$, $(4, 8)$ e $(9, 10)$, pois nestes intervalos a função é crescente.

☺ **Q 69** Para cada item, calcule $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ou $\displaystyle\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$.

☺ **Q 70** (a)-(2); (b)-(4); (c)-(1); (d)-(3).

☺ **Q 71** $f(4) = 3$ e $f'(4) = 1/4$

☺ **Q 72** Duas: $y = 6x - 2$ para $x_0 = 1$ e $y = 6x + 2$ para $x_0 = -1$.

☺ **Q 73** (a) $t : y = x + 1$, $n : y = -x + 5$; (b) $y = 4$, $n : x = 1$; (c) $t : y = 4x - 4$, $n : 4y = -x + 18$; (d) $t : 4y = x + 4$, $n : y + 4x = 18$; (e) $t : 8y = 4\sqrt{2}x + \sqrt{2}(4 - \pi)$, $n : 4y = -4\sqrt{2}x + \sqrt{2}(2 + \pi)$; (f) $t : y = 1$, $n : x = \pi/2$;

☺ **Q 74** Temos $a_r = -1/2$, donde $a_t = 2$. Como $a_t = f'(x_p)$, temos $2x_p - 6 = 2$, implicandoi $x_p = 4$ e $y_p = f(x_p) = f(4) = -8$. Daí, a euqação da reta tangente solicitada é $t : y - (-8) = 2(x - 4)$ que, após um ajuste, temos $t : y = 2x - 16$.

☺ **Q 75** Prmeiro determine $a_t = f'(1) = \ldots = 1$. Em seguida determine $y_p = f(x_p) = f(1) = -2$. Com estes dados escrevemos $t : y - (-2) = 1 \cdot (x - 1)$, ou seja, $t : y = -x - 3$ é a equação da tangente. Agora, para a reta normal, usamos o fato em que $a_n = -1/a_t$ para obter $n : y + x + 1 = 0$.

☺ **Q 76** Temos $a_r = 2$. Como $r \perp t$, então $a_t = -1/2$. Da equação $f'(x_p) = -1/2$ obtemos $x_p = -3/4$. Daí $y_p = 63/16$ e $t : 16y + 8x = 57$.

☺ **Q 77** (a) $t : 2y + x = 3$; (b) Não existe, pois não existe $p \in \mathbb{R}$ tal que $\sqrt{p^3} = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, visto que $f'(p) = -\dfrac{1}{2\sqrt{p^3}}$.

☺ **Q 79** (a) $a = -5$; (b) $a = 1$ e $b = -6$.

☺ **Q 80** $f'(x) = \dfrac{-1}{(x - 1)^2}$, $a_t = -1$, $a_n = 1$, $t : y + x = 4$ e $n : y = x$

☺ **Q 81** Basta mostrar que a equação $f'(p) = 3p^2 + 7 = 4$ não tem solução em $\mathbb{R}$.

☺ **Q 82** Basta resolver a equação $f'(x) = 0$. Os pontos são $(-1/3; 32/27)$ e $(1; 0)$.

☺ **Q 83** Temos $a_t = 3$ e $f'(x) = 2ax + b$. No ponto, temos $a_t = f'(1) = 2a + b = 3$. COmo $f(x_) = y_p$, temos $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 = 1$. Resolva o sistema $\{2a + b = 3 \wedge a + b = 1\}$ para obter $a = 2$ e $b - 1$. Portanto, a parábola é $y = 2x^2 - x$.

☺ **Q 84** (a) $x = -2$ e $x = 2/3$; (b) $x = 0$ e $x = -4/3$

☺ **Q 85** Temos $a_r = -1/2$, donde $a_t = 2$. Como $a_t = f'(x_p)$, temos $2x_p - 3 = 2$, implicandoi $x_p = 5/2$ e $y_p = f(x_p) = f(5/2) = -5/4$. Daí, a euqação da reta tangente solicitada é $t : y - (-5/4) = 2(x - 5/2)$ que, após um ajuste, temos $t : 4y - 8x + 25 = 0$.

☺ **Q 86** Note que $a_t = -2$ (por que?). Resolve a equação $f'(x_p) = -2$ para obter $x_p = 2$. Com os pontos M e N escreva a equação da reta tangente que é $t : y = -2x + 5$. Como $x_p = 2$, então $y_p = -2 \cdot 2 + 5 = 1$. Agora, resolva a equação $f(2) = 1$ para obter $k = 2$.

☺ **Q 87** Determine a equação da reta normal para obter o ponto $A(-3/2, 5/4)$ (interseção entre a reta e a função). O ponto $B(-3/2, 0)$ tem abscissa igual a do ponto A. Daí obterá área igual a $25/16$ $u.a$.

☺ **Q 88** (a) $t : y = 15x - 21$ e $n : 15y = 137 - x$; (b) $t : y = x$ e $n : y = -x - 2$

☺ **Q 89** $x_0 = 2, y_0 = -2$ e $t : y + x = 0$

☺ **Q 90** Não existe.

☺ **Q 91** $x_p = 0, y_p = -1, t : y = -1$ e $n : x = 0$ (eixo-y).

☺ **Q 93** $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ ou $x_0 = -1/2$ e $y_0 = 1/4 - \ln(2)$

☺ **Q 95** $t : y - \dfrac{\pi^2}{9} = \dfrac{\pi(x - \sqrt{3})}{6}$ e $n : y - \dfrac{\pi^2}{9} = \dfrac{6\sqrt{3} - 6x}{\pi}$

☺ **Q 96** $f'(x) = 2\cos(x) + 2\,\mathrm{sen}(x)\cos(x)$ e os pontos são da forma $(\pi/2 + k\pi, 3)$ e $(3\pi/2 + 2k\pi, -1)$, com $k \in \mathbb{Z}$.

☺ **Q 97** $t : 2y - 4x + 3 = 0$

☺ **Q 100**

☺ **Q 101** (a) $f'(3) = 2$; (b) $f'(2) = 12$; (c) $f'(5) = 11$; (d) Não; (e) Não; (f) $f'(\pi/6) = -1/2$; (g) $f'_-(0) = f'_+(0) = 1$; (h) $1/12$; (i) Não, $f'_-(2) = -3 \neq f'_+(2) = 1$.

☺ **Q 102** (a) $(f \cdot g)'(5) = -16$; (b) $(f/g)'(5) = -20/9$; (c) $(g/f)'(5) = 20$

☺ **Q 103** $a = 4$ e $b = -4$

☺ **Q 104** $a = -1/2$ e $b = 3/2$.

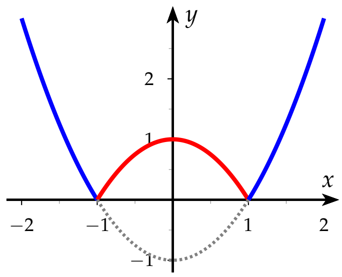
☺ **Q 105** Como é análogo para cada item, exibiremos a resposta apenas do item (a).

f sem o módulo: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se} \quad x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 1 - x^2 & \text{se} \quad -1 < x < 1 \end{cases}$.

As derivadas laterais de f nos pontos $x = -1$ e em $x = 1$:

- ⋄ $f'_-(-1) = -2$ e $f'_+(-1) = 2 \Rightarrow \nexists\ f'(-1)$;
- ⋄ $f'_-(1) = -2$ e $f'_+(1) = 2 \Rightarrow \nexists\ f'(1)$.

Veja as quinas no gráfico ao lado.



☺ **Q 106** (a) $f'(x) = 8x^3 - 6x + 1$; (b) $f'(x) = -30x^5 + 12x^3 - 2$; (c) $f'(x) = -\dfrac{3}{4x^2} + \dfrac{10\sqrt[3]{x^2}}{3} - \dfrac{3}{2\sqrt{x^3}}$; (d) $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; (e) $f'(x) = \dfrac{ad - bc}{(cx+d)^2}$; (f) $f'(x) = -\dfrac{14}{(3x-1)^2}$; (g) $f'(x) = \dfrac{-48x}{(x^2-16)^2}$; (h) $f'(x) = xe^x(2+x)$; (i) $f'(x) = \dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$; (j) $f'(x) = \dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$; (k) $f'(x) = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$; (l) $f'(x) = 18x^2 - \dfrac{3x}{2} + 12$; (m) $f'(x) = \dfrac{2cx}{(x^2+c)^2}$; (n) $f'(x) = 2(x+1)[(x+1)\sec^2(x) + 2\operatorname{tg}(x)]$; (o) $f'(x) = 2\operatorname{sen}(x) + 2x\cos(x)$; (p) $f'(x) = 2\cos(2x) + 8\sec(x)[2\operatorname{tg}^2(x) + 1]$; (q) $f'(x) = -\dfrac{2}{5}\cos(x) + 9\sec(x)\operatorname{tg}(x)$; (r) $f'(x) = x\cos(x)$; (s) $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2+2)^3}$; (t) $f'(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$; (u) $f'(x) = 2x\operatorname{tg}(x) + x^2\sec^2(x)$.

☺ **Q 107** $-5/2$

☺ **Q 109** $p'(1) = 0$ e $q'(5) = -2/3$.

☺ **Q 110** (a) Cresc: $\mathbb{R}$ se $a > 0$ ou Decresc: $\mathbb{R}$ se $a < 0$; (b) Cresc: $(-\infty, -b/2a)$ e Decresc: $(-b/2a, +\infty)$ se $a < 0$ ou Decresc: $(-\infty, -b/2a)$ e Cresc: $(-b/2a, +\infty)$ se $a > 0$; (c) Decresc: $\mathbb{R} - \{1\}$; (d) Cresc: $(-1, 1)$ e Decres: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; (e) Cresc: $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ e Decres: $(1, 3)$; (f) Cresc: $(0, 4) \cup (4, +\infty)$ e Decres: $(-\infty, -4) \cup (-4, 0)$; (g) Cresc: $(-\infty, 0) \cup (\sqrt[3]{6}, +\infty)$ e Decres: $(0, \sqrt[3]{6})$; (h) Cresc: $(-1/2, 2)$ e Decres: $(-\infty, -1/2) \cup (2, +\infty)$; (i) Cresc: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ e Decres: $(0, 1) \cup (1, 2)$.

☺ **Q 111** (a) $f'(x) = 3(2x^3 + 5x - 8)^2(6x^2 + 5)$; (b) $f'(x) = (5x^3 + 2x)^2(x - x^2)(-65x^4 + 55x^3 - 14x^2 + 10x)$; (c) $f'(x) = \dfrac{2 + 3x^2}{4\sqrt[4]{(1 + 2x + x^3)^3}}$; (d) $f'(x) = \dfrac{60x^3 + 25}{2\sqrt{3x^4 + 5x + 1}}$; (e) $f'(x) = 7(x^3 + 4x)^6(3x^2 + 4)$; (f) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$; (g) $f'(x) = \dfrac{2(x-1)^3(5 + 4x - 3x^2)}{(x^2 + 2x)^6}$; (h) $f'(x) = 3(x^2 - x + 1)^2(2x - 1)$; (i) $f'(x) = (12x + 12)e^{3x^2 + 6x + 7}$; (j) $f'(x) = 3\operatorname{sen}^2(x)\cos(x)$; (k) $f'(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x}$; (l) $f'(x) = -2x\operatorname{sen}(x^2 + 1)$; (m) $f'(x) = \sec(x)$; (n) $f'(x) = \dfrac{-8(2x-5)^3(4x^2 - 30x + 5)}{(8x^2 - 5)^4}$; (o) $f'(x) = \dfrac{84(3x-3)^3}{(2x+5)^5}$; (p) $f'(x) = -e^x\operatorname{sen}(e^x + 1)$; (q) $f'(x) = \dfrac{8x^3}{3\sqrt[3]{1 + x^4}}$; (r) $f'(x) = \dfrac{\sec^2(x)}{3\sqrt[3]{(1 + \operatorname{tg}(x))^2}}$; (s) $f'(x) = 12x^2(x^4 - 1)^2(x^3 + 1)^3(2x^4 + x - 1)$; (t) $f'(x) = -3x^2 2^{5 - x^3}\ln(2)$; (u) $f'(x) = -ae^{-ax}$; (v) $f'(x) = -2x\ln(10) \cdot 10^{1 - x^2}$; (w) $f'(x) = \dfrac{(2x-3)^2(12 - 6x)}{(5 - 3x)^3}$; (x) $f'(x) = \dfrac{-12x^3}{(x^4 + 1)^4}$.

☺ **Q 112** (a) $f'(x) = 4(1 + 4x)^4(3 + x - x^2)^7(17 + 9x - 21x^2)$; (b) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; (c) $f'(x) = -3x^2\operatorname{sen}(a^3 + x^3)$; (d) $f'(x) = -3x^2\operatorname{sen}(x^3)$; (e) $f'(x) = 20\sec(5x)\operatorname{tg}(5x)$; (f) $f'(x) = 2x\sqrt[3]{x^2 + 2}\left(1 + \dfrac{x^2 + 1}{3x^2 + 6)}\right)$; (g) $f'(x) = \cos[\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))] \cdot \cos[\operatorname{sen}(x)] \cdot \cos(x)$; (h) $f'(x) = \cos[\operatorname{tg}(\sqrt{\operatorname{sen}(x)})] \cdot \sec^2\left[\sqrt{\operatorname{sen}(x)}\right] \cdot \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\operatorname{sen}(x)}}$;

(i) $f'(x) = \dfrac{\left[2^{2x}\ln(4)\cos(3x) - 3 \cdot 2^{2x}\operatorname{sen}(3x)\right] \cdot \operatorname{sen}(5x) - 5 \cdot 2^{2x}\cos(3x)\cos(5x)}{\operatorname{sen}^2(5x)}$; (j) $f'(x) = \dfrac{2x\cos(2x)\ln(x^2) - 2\operatorname{sen}(2x)}{x\ln^2(x^2)}$;

(k) $f'(x) = \dfrac{3}{(3x-1)\ln(2)}$; (l) $f'(x) = 4x\cos(x^2)\cos(x+1) - 2\operatorname{sen}(x^2)\operatorname{sen}(x+1)$; (m) $f'(x) = 3\cos(x)e^{\operatorname{sen}(x)}$; (n)

$f'(x) = e^{\sqrt{x}}\left[\dfrac{x^3-5x}{2\sqrt{x}}+3x^2-5\right]$; (o) $f'(x) = e^{-x^2}(1-2x^2)$; (p) $f'(x) = -e^{-5x}[3\,\mathrm{sen}(3x)+5\cos(3x)]$; (q) $f'(x) = e^{x\cos(x)}[\cos(x)-x\,\mathrm{sen}(x)]$; (r) $f'(x) = \dfrac{2}{x}+\mathrm{cotg}(x)+\dfrac{1}{2+2x}$; (s) $f'(x) = -\mathrm{sen}(x)\sec^2(\cos(x))$; (t) $f'(x) = \mathrm{sen}(x)(1+\sec^2(x))$; (u) $f'(x) = \pi\ln(2)\cos(\pi x)\cdot 2^{\mathrm{sen}(\pi x)}$; (v) $f'(x) = 6\,\mathrm{tg}(3x)\sec^2(3x)$; (w) $f'(x) = \ln(x)$; (x) $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$ (y) $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; (z) $f'(x) = \dfrac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$; ($\alpha$) $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$.

☺ **Q 113** $h'(1)=30$, $H'(1)=36$, $F'(2)=20$ e $G'(3)=63$.

☺ **Q 114** $F'(3)=28$.

☺ **Q 115** (a) $f''(x)=g''(x+2\cos(3x))\cdot[1-6\,\mathrm{sen}(3x)]^2-18\cos(3x)g'(x+2\cos(3x))$ e $f''(0)=g''(2)\cdot 1^2-18\cdot 1=-10$; (b) $g''(x)=-\cos(x)\cdot[f(x)]^2-4\cdot f(x)\cdot f'(x)\cdot\mathrm{sen}(x)+2\cos(x)[(f'(x))^2+f(x)\cdot f''(x)]$ e $g''(0)=3$.

☺ **Q 117** (a) 2; (b) $-6/5$; (c) 20; (d) $2x+8/3$.

☺ **Q 119** (a) $(f\circ u)'(x) = 6x^2(x^3-4)$ e $(f\circ u)'(1) = -18$; (b) $\dfrac{dy}{dx} = 2x[\mathrm{sen}(x^2)+x^2\cos(x^2)]$ e $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\sqrt{\pi}} = -2\pi\sqrt{\pi}$; (c) $(f\circ u)'(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x=1}}\cdot\dfrac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$ e $(f\circ u)'(1) = -1/3$; (d) $f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$ e $f'(4) = \sqrt{3}/24$; (e) $f'(x) = \mathrm{sen}(\pi/5+3x)+3x\,\mathrm{cossec}(\pi/5+3x)-\mathrm{sen}(2\pi/5+2x)$ e $f'(0)=\mathrm{sen}(\pi/5)-\mathrm{sen}(2\pi/5)$; (f) $f'(t)=3\ln(2)(2^{3t}-2^{-3t})$ e $f'(0)=0$; (g) $f'(x)=\sec(x)$ e $f'(4\pi/3)=-2$; (h) $f'(x)=2(3x^2-1+e^x)\,\mathrm{cossec}[2(x^3-x+e^x)]$ e $f'(0)=0$.

☺ **Q 120** (a) $y' = \dfrac{-2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}$; (b) $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$; (c) $y' = 2x\,\mathrm{arcsen}^3(x)+\dfrac{3x^2\,\mathrm{arcsen}^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}$; (d) $y' = e^x\,\mathrm{arcsec}(x)+\dfrac{e^x}{x\sqrt{x^2-1}}$; (e) $y' = \dfrac{7\ln(2)\cdot 2^{7x}}{1+2^{14x}}$; (f) $y' = \dfrac{-1}{x\ln^2(x)+x}$; (g) $y' = \dfrac{1}{2x^2+2x+1}$; (h) $y' = -\dfrac{6x^2}{\sqrt{1-4x^6}}$; (i) $y' = 1+\dfrac{2x\cdot\ln 3\cdot 3^{\mathrm{arctg}(x^2)}}{1+x^4}$; (j) $y' = -\dfrac{3x^2}{\arccos(x^3+1)\sqrt{1-(x^3+1)^2}}$; (k) $y' = -\dfrac{1}{2\ln(3)\sqrt{x}(1+x)\,\mathrm{arccotg}(\sqrt{x})}$; (l) $y' = \dfrac{x^2}{x^2+1}$; (m) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$; (n) $y' = 1-\dfrac{x\,\mathrm{arcsen}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$; (o) $y' = 1+2x\,\mathrm{arctg}(x)$; (p) $y' = \dfrac{1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1+\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)^2} = \dfrac{1}{2+2x^2}$; (q) $y'=\arccos(x)$; (r) $y' = -\dfrac{\mathrm{sen}(x)}{1+\cos(\,x)}$.

☺ **Q 121** (a) $f'(x) = 36x^2$; (b) $f'(x) = 6a$; (c) $f'(x) = 16e^{2x}$; (d) $f'(x) = \mathrm{sen}(x)$; (e) $f'(x) = 2\sec^2(x)\,\mathrm{tg}(x)$; (f) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^2}}$; (g) $f'(x)=\dfrac{1}{e^x}$; (h) $f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}$; (i) $f'(x)=-13\,\mathrm{sen}(3x)\cos(2x)-12\cos(3x)\,\mathrm{sen}(2x)$; (j) $f'(x) = -\dfrac{6x+6}{\sqrt{(x^2+2x-1)^7}}$; (k) $f'(x)=-4x^2\,\mathrm{sen}(x^2+1)+2\cos(x^2+1)$; (l) $f'(x)=-32\cdot\ln^5(3)3^{-2x}$; (m) $f'(x)=-\dfrac{3^6\cdot 5!}{(3x+1)^6}$; (n) $f'(x)=-\dfrac{5!}{(x+2)^6}$; (o) $f'(x)=2e^x-3e^{-x}$

☺ **Q 124** A partir da derivada de ordem $n+1$. Ou seja, $p_n^{(n+1)}(x)=0,\ \forall\, n\in\mathbb{N}$.

☺ **Q 125** (a) $h'(x)=f''(x)g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)$; (b) $h'(x)=f''\left(g(x)\right)\cdot[g'(x)]^2+f'\left(g(x)\right)\cdot g''(x)$.

☺ **Q 126** (a) $y' = -\dfrac{x}{y}$; (b) $y' = \dfrac{1-y^2}{2xy+6y^2+2}$; (c) $y' = \dfrac{-2xy^2-\operatorname{sen}(y)}{2x^2y+x\cos(y)}$; (d) $y' = \dfrac{ye^{xy}-1}{1-xe^{xy}}$; (e) $y' = \dfrac{2y}{3y^2(x+y)^2+2x}$; (f) $y' = \dfrac{y}{\sec^2(x)-x}$.

☺ **Q 127** (a) $y' = -\dfrac{x}{y}$ e $y'_P = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x' = -\dfrac{y}{x}$ e $y'_Q = -\sqrt{3}$; (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{8x+5}{4y^3+3}$ e $y'_P = -5$; (c) $y' = \dfrac{4}{4-\cos(y)}$ e $y'_P = 1$; (d) $y' = -\dfrac{y}{e^y+x}$ e $y'_P = -\dfrac{1}{e}$; (e) $y' = \dfrac{2-y^2}{2xy+3y^2+2}$, $P(x_p, y_p) = (-2,-2)$ e $y'_P = \dfrac{-1}{11}$.

☺ **Q 128** (b) Área $= \dfrac{4-\pi}{4}$; (c1) $t: 6x+13y+19=0$, em $P(-1,-1)$ e $t: 6x+13y-19=0$ em $Q(1,1)$, $n: 6y-13x-7=0$ em P e $n: 6y-13x+7=0$ em Q; (c2) $t: y=-x$ e $n: y=x+2$; (c3) $y=0$ e $x=0$; (c4) $y=x$; (c5) $y = 4+\dfrac{\sqrt{3}x}{3}$; (c6) $13y = 10-9x$; (c7) $y=-2$.

☺ **Q 131** Ajuste a equação para obter $\cos^4(x+y) = 1$ e, então obter $-4\cos^3(x+y)\cdot\operatorname{sen}(x+y)\cdot(1+y') = 0$. Conclua que $y' = -1$.

☺ **Q 132** $x = 1$

☺ **Q 133** -3

☺ **Q 134** (a), ..., (e) cadê o livro? (f1) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 9$, $dx = 0,1$, $\sqrt{9,1} \approx 3,016667$; (f2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 9$, $dx = -0,1$, $\sqrt{8,9} \approx 2,983333$; (f3) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$, $dx = 0,1$, $\sqrt[3]{8,1} \approx 2,008333$; (f4) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$, $dx = -0,1$, $\sqrt[3]{7,9} \approx -1,991667$; (f5) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $x_0 = 0$, $dx = 1^\circ = \pi/180$, $\operatorname{sen}(1^\circ) \approx 0,017453$; (f6) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $x_0 = 0$, $dx = 2^\circ = \pi/90$, $\operatorname{sen}(2^\circ) \approx 0,034907$; (f7) $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 0$, $dx = 1^\circ = \pi/180$, $\cos(1^\circ) \approx 1,000000$; (f8) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, $x_0 = 60^\circ$, $dx = -0^\circ 55' 30'' = -0^\circ 55,5' = -\dfrac{11,1}{12} = -\dfrac{11,1\pi}{12\times 180}$, $\operatorname{tg}(59^\circ 04' 30'') \approx 1,667473$.

☺ **Q 135** $27/\sqrt{61}\ m/s$

☺ **Q 136** $45/31\ m/s$

☺ **Q 137** $\dfrac{dh}{dt} = 140\ m/s$

☺ **Q 138** $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{16\pi}{135}\ km/s$

☺ **Q 139** $-\sqrt{65}/8\ m/s$

☺ **Q 140** Escreva a área do triângulo em função do ângulo θ (o agudo que está diminuindo), obtendo $A = 400\cdot\operatorname{sen}(2\theta)$. Derive em relação a t e depois substitua os dados obtendo $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{100\pi}{9}\ m^2/s$

☺ **Q 141** $\dfrac{16}{125}\ rad/s$

☺ **Q 142** $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{500}{3}\ rad/h$

☺ **Q 143** $278,54\ m/s$

☺ **Q 144** $65\ km/h$

☺ **Q 145** $-\dfrac{172}{17}\ km/h$, isto é, eles estão se aproximando

☺ **Q 146** $1,5\ cm/s$

☺ **Q 147** $\dfrac{dA}{dt} = 8\pi cm^2/s$

☺ **Q 148** $\dfrac{dr}{dt} \approx 0,09\ cm/min$

☺ **Q 149** $58\pi\ m/seg = 3480\pi\ m/min$

☺ **Q 150** $\dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{5.000\pi}{9}\ cm^3/min$

☺ **Q 151** (a) Cadê o livro? (b) Cadê o livro? (c) Cadê o livro?

☺ **Q 152** (a) $-5/12$; (b) $-9/4$; (c) $+\infty$; (d) 2; (e) 5; (f) $+\infty$; (g) 2; (h) 2; (i) $+\infty$; (j) $+\infty$; (k) 3; (l) 2; (m) 0; (n) $-\infty$; (o) 0; (p) 0; (q) 0; (r) $\ln(5/3)$; (s) $-1/\pi$; (t) 0; (u) 0; (v) 0; (w) 0; (x) 1; (y) 1; (z) 1; (α) 3; (β) 0; (γ) 1; (δ) e^{-6}; (ε) 1; (ζ) 1; (η) e^{-2}; (θ) e^3; (ι) 2; (κ) e; (λ) $1/\sqrt{e}$; (μ) e; (ν) e; (ξ) 1.

☺ **Q 153** (a) f é um polinômio e, portante, contínua e derivável em qualquer intevalo. Além disso, $f(1) = 0$ e $f(3) = 0$. Como $f'(x) = 2x - 4$, da igualdade $f'(c) = 0$, temos $2c - 4 = 0$ donde $c = 2 \in (1, 3)$;
(b) Argumetação idem (a) e raízes da derivada sendo $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$ donde $c = \dfrac{2 + \sqrt{7}}{3} \in (1, 2)$;
(c) Argumetação idem (a) e raízes da derivada sendo $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Como ambas pertencem ao intervalo $(-3/2, 3/2)$, então temos duas possibilidade para c;
(d) Argumetação idem (a) para a função trigonométrica $\operatorname{sen}(x)$. Como $f'(x) = \cos(x)$, daí $f'(c) = 0$ implica $\cos(c) = 0$ com $c = \pi/2 \notin (\pi, 2\pi)$ ou $c = 3\pi/2 \in (\pi, 2\pi)$; (e) Argumentação idem (a) para a função trigonométrica $\cos(x)$. Como $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$, daí $f'(c) = 0$ implica $-\operatorname{sen}(c) = 0$ com $c = 0 \notin (\pi/2, 3\pi/2)$ ou $c = \pi \in (\pi/2, 3\pi/2)$;
(f) Argumentação idem (a) para a função trigonométrica $\operatorname{sen}^2(x)$. Como $f'(x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = \operatorname{sen}(2x)$, daí $f'(c) = 0$ implica $\operatorname{sen}(2c) = 0$ com $2c = 0$, isto é, $c = 0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ ou $2c = \pi$, isto é, $c = \pi/2 \notin (\pi/2, \pi/2)$.

☺ **Q 154** (a) O gráfico é o deslocamento do gráfico de $y = |x|$ uma unidade para baixo; (i) $f(-1) = 1 - |-1| = 1 - 1 = 0$ e $f(1) = 1 - |1| = 1 - 1 = 0$; (ii) f é contínua em $[-1, 1]$ e, (iii) f não é derivável em $x = 0$ por não existir a reta tangente neste ponto. Assim, o teorema de Rolle não pode ser aplicado;
(b) O gráfico é composto por duas retas, uma aclive e outra declive; (i) $f(-2) = 2 \cdot (-2) + 4 = 0$ e $f(4) = 4 - 4 = 0$; (ii) f não é contínua em $x = 1 \in [-2, 4]$ e, (iii) f não é derivável em $x = 1$ por não ser contínua neste ponto. Assim, o teorema de Rolle não pode ser aplicado, por dois motivos;
(c) O gráfico é de uma parábola com concavidade voltada para cima, raízes -3 e 4, vértice com abscissa $1/2$ e intercepta o eixo y em -12. (i) $f(-3) = (-3)^2 - (-3) - 12 = 0$ e $f(4) = 4^2 - 4 - 12 = 0$; (ii) e (iii) f é um polinômio, logo contínua e derivávem em qualquer intervalo. Assim, o teorema de Rolle é aplicável a reta tangente é horizontal no ponto em que $x = 1/2$, ou seja, no vértice da parábola;
(d) Obtenha gráfico reconhcendo o módulo como uma função em duas sentenças. (i) $f(1) = |2 \cdot 1 - 4| - 2 = |-2| - 2 = 0$ e $f(3) = |2 \cdot 3 - 4| - 2 = |2| - 2 = 0$; (ii) f é contínua em $[1, 3]$ e, (iii) f não é derivável em $x = 2$ por não existir a reta tangente neste ponto. Assim, o teorema de Rolle não pode ser aplicado.

☺ **Q 155** (a) $f(-1) = 1 - \sqrt[5]{(-1)^4} = 1 - 1 = 0$ e $f(1) = 1 - \sqrt[5]{1^4} = 1 - 1 = 0$;
(b) Note que $f'(x) = [1 - x^{4/5}]' = 0 - \frac{4}{5} \cdot x^{-1/5} = -\frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$, $\forall\, x \neq 0$. Equacionando $f'(c) = 0$, temos $-\frac{4}{5\sqrt[5]{c}} = 0$ e, então, vemos que não existe $c \in \mathbb{R}$;
(c) Veja que f é contínua no intervalo $[-1, 1]$, contudo não é derivável no aberto $(-1, 1)$, pois $f'(0)$ não existe. Logo, a segunda condição da hispóteses do teorema de Rolle não é aceita.

☺ **Q 156** (a) Parábola com concavidade voltada para baixo, raízes -2 e 2, vértice no ponto $(0, 4)$. Inclinação da secante dada por $a_s = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = -1$. Derivada $f'(x) = -2x$; $f'(c) = -2c = -1$, logo $c = 1/2$;
(b) Gráfico da função $\operatorname{sen}(x)$. Inclinação da secante dada por $a_s = \frac{f(\pi/2) - f(0)}{\pi/2 - 0} = 2/\pi$. Derivada $f'(x) = \cos(x)$; $f'(c) = \cos(c) = \pi/2$, logo $c = \arccos(\pi/2) \approx 0,8807$.

☺ **Q 157** Sim! Por que?

☺ **Q 158** A inclinação da secante é $a_s = \frac{s(4) - s(0)}{4 - 0} = 4$. Como $s'(t) = 2t - 1$, então $2c - 1 = 4$ nos dá $c = 5/2$. Assim, o instante em que a velocidade instantânea é igual à média, é $t = 5/2$.

☺ **Q 159** A inclinação da secante é $a_s = \frac{1 - 0}{e - 1} = \frac{1}{e - 1}$. Como $f'(x) = \frac{1}{x}$, da equação $\frac{1}{c} = \frac{1}{e - 1}$, temos que no ponto de abscissa $c = e - 1$.

☺ **Q 160** Aplique o teorema levanto em conta a função $f(x) = e^x$ no intervalo $[0, x]$, $\forall x > 0$. Depois, analogamente no intervalo $[x, 0]$, $\forall x < 0$.

☺ **Q 161** (a) Os pontos de mínimo global de f em A são -1 e 2 e os pontos de máximo global são 0 e 3. O valor mínimo da função f em A é -4 e o valor máximo é 0; (b) Os pontos de mínimo global de f em A são $5\pi/6$ e $17\pi/6$ e os pontos de máximo global são $\pi/6$ e $13\pi/6$. O valor mínimo da função f em A é $-3\sqrt{3}/2$ e o valor máximo é $3\sqrt{3}/2$. (c) O ponto de mínimo global de f em A é -2 e o ponto de máximo global é 2. O valor mínimo da função f em A é $-26/15$ e o valor máximo é $86/15$.

☺ **Q 162** Como $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$, então $x = e$ é o único ponto crítico de f e $\operatorname{Dom}(f) = (0, +\infty)$. Use o teste da primeira derivada e veja que f é crescente no intervalo $(0, e)$ e decrescente no intervalo $(e, +\infty)$. Logo, $x = e$ é máximo local e, portanto, global. Sim, é verdade que $\pi^e < e^\pi$. Como $e < \pi$ e $f(x)$ é descrescente para $x > e$, temos que $f(e) > f(\pi)$. Daí, $\frac{\ln(e)}{e} > \frac{\ln(\pi)}{\pi}$ implicando em $\ln(e^\pi) < \ln(e^\pi)$ e conseuentemente $\pi^e < e^\pi$.

☺ **Q 163** Tomando $f(x) = x + \frac{1}{x}$, temos $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ e com $x = 1$ o único ponto crítico de f no intervalo $(0, +\infty)$. Use o teste da primeira derivada e veja que f é decrescente no intervalo $(0, 1)$ e crescente no intervalo $(1, +\infty)$. Logo, $x = 1$ é mínimo local e, portanto, global no intervalo $(0, +\infty)$. Dessa forma $f(x) = x + \frac{1}{x} \geq f(1) = 2$.

☺ **Q 164** $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$ e $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$

☺ **Q 166** $L^2/16$

☺ **Q 167** Base 2 e altura 4

☺ **Q 168** Base 4 e altura 8

☺ **Q 169** $4 \times 4 \times 2dm^3$

☺ **Q 170** Base 6×6 e altura 3.

☺ **Q 171** 9×18

☺ **Q 172** Base $5 \times 5cm^2$ e altura $5cm$

☺ **Q 173** $5/3, 14/3, 35/3$

☺ **Q 174** Raio do círculo $\dfrac{L}{2\pi + 8}$ e lado do quadrado $\dfrac{L}{\pi + 4}$

☺ **Q 175** $r = 10\ cm$ e $h = 20\ cm$.

☺ **Q 177** $b = \sqrt{2} \cdot r$ e $h = \dfrac{\sqrt{2} \cdot r}{2}$

☺ **Q 178** $x = \dfrac{25 - 5\sqrt{7}}{6}$

☺ **Q 179** Primeiro, calcule o tempo gasto se ele for de A até B de barco e, em seguida, de B até D andando. Segundo, calcule o tempo ele indo direatemente de barco até D. Compare os tempos. Adote $x = dist(B, C)$. Da fórmula $tempo = \dfrac{\Delta s}{v}$, temos que o tempo gasto saindo de A para D, passando por C, é dado pela função $T(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \dfrac{8 - x}{8}$, com $x \in [0, 8]$. Determine os pontos críticos de T neste intervalo e, com o teste da segunda derivada, veja que o homem deve aportar o bote no ponto $\dfrac{9}{\sqrt{7}}\ km$ rio abaixo a partir do ponto B.

☺ **Q 180** $L(x) = R(x) - C(x) = 2.800x - (x^3 - 3x^2 - 80x + 500)$, $x = 32$ mesas e $L(32) = R\$61.964$.

☺ **Q 181** (a) Instante $t_1 = 24,5\ s$ e velocidade $v(t_1) = s'(t_1) = -120,1\ m/s$; (b) Altuma máxima será alcançada quando $t = 120/9,8 \approx 12,24\ s$ e será igual a $s(120/9,8) = -4,9 \cdot (120/9,8)^2 + 120 \cdot 120/9,8 = ...$

☺ **Q 182** $r = \dfrac{\sqrt[3]{15}}{2}\ m$ e $h = 2\sqrt[3]{15}\ m$.

☺ **Q 183** (a) Por semelhança $\dfrac{12}{12 - h} = \dfrac{4}{r}$, donde $h = 3(4 - r)$. Daí, o volume é $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ que, em função de r, fica $V(r) = 3\pi \cdot (4r^2 - r^3)$. Use o critério da primeira derivada e obtenha $r = 8/3\ cm$ e $h = 4\ cm$; (b) Repita o precesso acima alterando 12 por H e 4 por R, na relação de semelhança.

☺ **Q 184** (a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$; interseção com eixo y o ponto $(0, 2)$; não tem assíntotas; crescente no conjunto $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$; decrescente no conjunto $(1, 3)$; ponto máximo é $(1, 6)$; ponto mínimo é $(3, 2)$; CVB no intervalo $(-\infty, 2)$; CVC no intervalo $(2, +\infty)$; PI: $(2, 4)$.
(b) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$; interseção com os eixos os pontos $(-1, 0)$ e $(0, -1)$; assíntotas são as retas $x = 1$ e $y = 1$; estritamente decrescente; não possui máximos e nem mínimos; CVB no intervalo $(-\infty, 1)$; CVC no intervalo $(1, +\infty)$; não tem PI.
(c) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$; interseção com os eixos são os pontos $(-1, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, -1/4)$; assíntotas são as retas $x = -2$, $x = 2$ e $y = -1$; crescente no conjunto $(0, 2) \cup (2, +\infty)$; decrescente no conjunto $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$; $x = -1/4$ é ponto de mínimo; não possui ponto máximo; CVB no conjunto $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$; CVC no intervalo $(-2, 2)$; não tem PI.

(d) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$; interseção com os eixos são os pontos $(-2, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, -1/2)$; assíntotas são as retas $x = -4$, $x = 4$ e $y = -2$; crescente no conjunto $(0, 4) \cup (4, +\infty)$; decrescente no conjunto $(-\infty, -4) \cup (-4, 0)$; ponto mínimo é $(0, -1/2)$; não possui ponto máximo; CVB no conjunto $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$; CVC no intervalo $(-4, 4)$; não tem PI.
(e) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$; interseção com eixo y o ponto $(0, -2)$; não tem assíntotas; crescente no conjunto $(-1, 1)$; decrescente no conjunto $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; ponto máximo é $(1, 0)$; ponto mínimo é $(-1, -4)$; CVC no intervalo $(-\infty, 0)$; CVB no intervalo $(0, +\infty)$; PI: $(0, -2)$. (f) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$; interseção com os eixos o ponto $(0, 0)$; $y = 0$ é assíntota horizontal; crescente no conjunto $(-1, 1)$; decrescente no conjunto $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; ponto máximo é $(1, 2)$; ponto mínimo é $(-1, -2)$; CVC no conjunto $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$; CVB no conjunto $(-\infty, \sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$; PI: $(0, -2)$.
(g) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$; interseção com eixo y o ponto $(0, 0)$; $y = 0$ é assíntota horizontal; crescente no conjunto $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$; decrescente no conjunto $(-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (\sqrt{2}/2, +\infty)$; $x = -\sqrt{2}/2$ é ponto mínimo local; $x = \sqrt{2}/2$ é ponto de máximo local; CVC no conjunto $(-\sqrt{6}/2, 0) \cup (\sqrt{6}/2, +\infty)$; CVB no conjunto $(-\infty, -\sqrt{6}/2) \cup (0, \sqrt{6}/2)$; os pontos em que $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ e $x = \sqrt{3}$ são PI.
(h) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$; interseção com os eixos são os pontos $(0, 0)$ e $(2, 0)$; $x = -1$ é assíntota vertical; crescente no conjunto $(-\infty, -\sqrt{3} - 1) \cup (\sqrt{3} - 1, +\infty)$; decrescente no conjunto $(-\sqrt{3} - 1, -1) \cup (-1, \sqrt{3} - 1)$; $x = \sqrt{3} - 1$ é ponto de mínimo local; $x = -\sqrt{3} - 1$ é ponto de máximo local; CVB no conjunto $(-\infty, -1)$; CVC no intervalo $(-1, +\infty)$; não tem PI.
(i) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$; interseção com os eixos o ponto $(0, 1)$; assíntota a reta $y = 0$; crescente no conjunto $(-\infty, 0)$; decrescente no conjunto $(0, +\infty)$; não tem ponto mínimo; ponto de máximo é $(0, 1)$; CVC no conjunto $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; CVB no intervalo $(-1, 1)$; PI $(-1; 0, 6)$ e $(1; 0, 6)$.
(j) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; não hã intersecão com os eixos; $x = 0$ é assíntota vertical e $y = 1$ é asíntota horizontal; crescente no conjunto $(-\infty, 0)$; decrescente no conjunto $(0, +\infty)$; não possui pontos extremantes; CVC em todo o domínio; não tem PI. (k) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$; interseção com os eixos no ponto $(0, 0)$; $y = 0$ é assíntota horizontal; crescente no conjunto $(-\infty, 1)$; decrescente no conjunto $(1, +\infty)$; não possui ponto mínimo; $x = 1$ é ponto de máximo global; CVB no intervalo $(-\infty, 2)$; CVC no intervalo $(2, +\infty)$; PI em $x = 2$.
(l) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$; interseção com os eixos na origem; assíntotas são as retas $x = -2$, $x = 2$ e $y = 0$; estritamente decrescente; não possui pontos extremantes; CVB no conjunto $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$; CVC no conjunto $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$; PI $(0, 0)$.

Texto composto em $\LaTeX 2_\varepsilon$, Cattai, 2 de outubro de 2014