CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

— Prof. ADRIANO CATTAI —

Apostila 02: Assíntotas

NOME: ______________________________ DATA: ____/____/______

"Não há ciência que fale das harmonias da natureza com mais clareza do que a matemática"

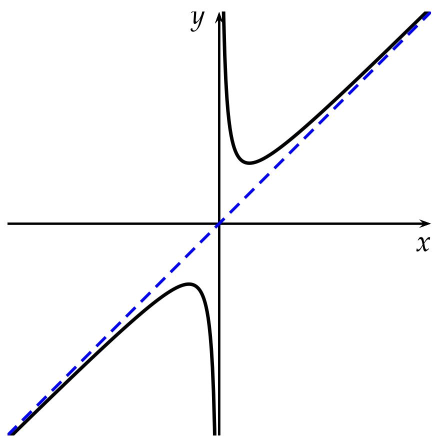
(Paulo Carus)

1 Introdução

A ideia de que uma curva pode vir arbitrariamente próximo de uma linha, sem realmente tornar-se o mesmo, frequentemente dão significados importantes na interpretação de alguma experiência cotidiana. Consideremos os seguintes exemplos.

Exemplo 1
A função $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$ possui duas assíntotas, ambas retilíneas:

◇ Uma vertical, a reta $x = 0$ (o eixo y); ◇ Outra oblíqua, a reta $r : y = x$.



De fato, a reta $r(x)$ é assíntota (oblíqua), pois:

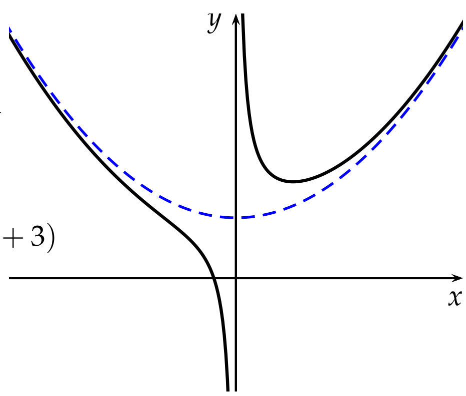
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - r(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x + \frac{1}{x} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

E, o eixo y (reta $x = 0$) é assíntota (vertical), pois:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x + \frac{1}{x} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x + \frac{1}{x} = -\infty.$$

Exemplo 2
A função $g(x) = \dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{x}$ admite a parábola $p(x) = x^2 + 2x + 3$ como assíntota. De fato,



$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - p(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+2x^2+3x+4}{x} - (x^2+2x+3)\\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x} = 0.\end{aligned}$$

Ainda, o eixo y é assíntota (vertical) de g, pois

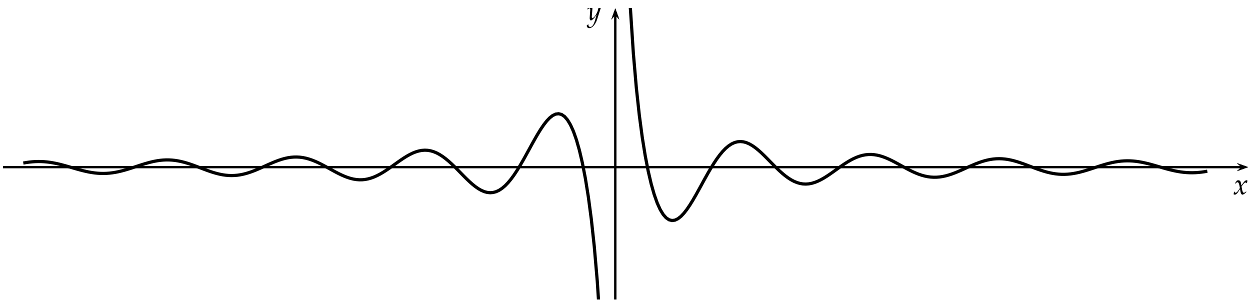
$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 + 2x + 3 + \frac{4}{x} = 0 + 0 + 3 + \infty = +\infty;$$
$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 + 2x + 3 + \frac{4}{x} = 0 - 0 + 3 - \infty = -\infty.$$

Definição 1 (Assíntota)
Uma *assíntota* de uma curva C é uma linha (imaginária) de onde os pontos de C se aproximam à medida que se percorre C. Em outras palavras, a assíntota e a curva ficam arbitrariamente próximas a medida que se afastam da origem do sistema de coordenadas.

Este conceito nos dá um modo de encontrá-las, como veremos. Em geral, no Cálculo, o termo assíntota refere-se a uma reta. Assim, podemos dizer que assíntota é uma linha reta, que se aproxima indefinidamente de uma curva, "sem poder tocá-la".

Etimologia da palavra Assíntota
A palavra Assíntota foi formada a partir do Grego "ASYMPTOTOS", que significa *não cair juntos, o que não coincide*, de **A**, negativo; mais **SYN**, junto; mais **PTOTOS**, caído.

Observação 1
Cuidado com a expressão "sem poder tocá-la". Por exemplo, a função $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$ possui o eixo x (reta $y = 0$) como uma assíntota horizontal e o gráfico de f intercepta essa assíntota numa infinidade de vezes. Porém, quanto $x \to \pm\infty$, $f(x)$ é cada vez mais próximo ao eixo x, mantendo uma distância infinitésima.



Observação 2
Veja que o gráfico de uma função jamais intercepta uma assíntota vertical. Por que?

2 Assíntotas Retilíneas

Existem potencialmente três tipos de assíntotas: *horizontais*, *verticais* e *oblíquas*. Para curvas dadas pelo gráfico de uma função $y = f(x)$, temos:

(i) *Assíntotas verticais* são linhas verticais, perto da qual a função cresce sem limites;

(ii) *Assíntotas horizontais* são retas horizontais em que o gráfico da função se aproxima continuamente quando x tende a $+\infty$ ou a $-\infty$;

(iii) *Assíntotas oblíquas* são retas não paralelas aos eixos coordenados em que o gráfico da função se aproxima continuamente quando x tende a $+\infty$ ou a $-\infty$.

Uma reta de equação $x = a$ é uma *Assíntota Vertical* do gráfico de uma função $f(x)$, se algum dos limites laterais em a for infinto, ou seja,

$$x = a \text{ é assíntota vertical de } f \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

Uma reta de equação $y = b$ é uma *Assíntota Horizontal* do gráfico de uma função $f(x)$, se algum dos limites no infinito for b, ou seja,

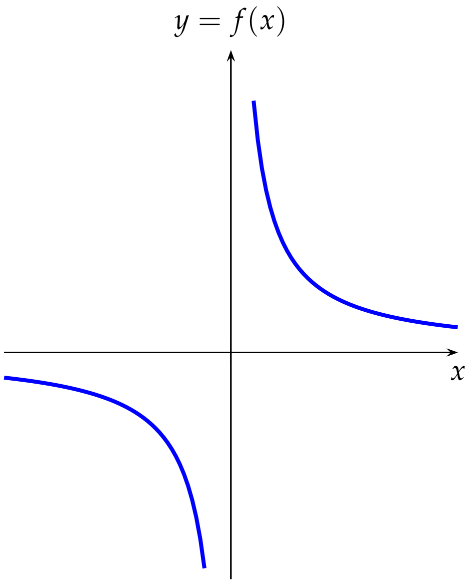
$$y = b \text{ é assíntota horizontal de } f \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = b.$$

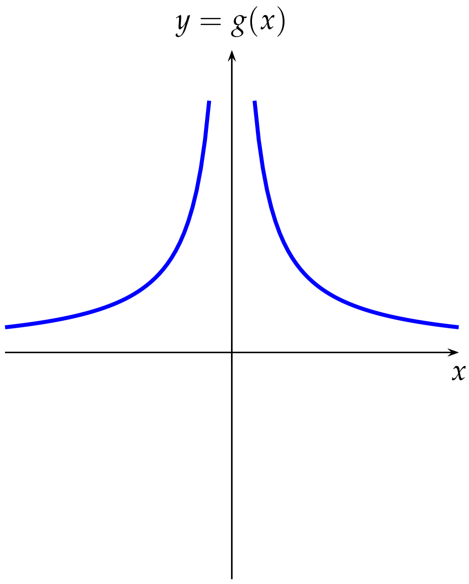
Exemplo 3
Sejam a funções $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. O eixo y (reta $x = 0$) é assíntota vertical para as duas funções, pois:

$$f: \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty;$$
$$g: \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Enquanto que, o eixo x (reta $y = 0$), é assíntota horizontal para as duas funções, pois:

$$f: \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0;$$
$$g: \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$





Exemplo 4
Seja $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^2 + 4}$. Como

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(3 - 1/x^2)}{x^2(1 + 4/x^2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3 - 1/x^2}{1 + 4/x^2} = \frac{3 - 0}{1 + 0} = 3,$$

temos que $y = 3$ é assíntota horizontal de f. Ou seja, à medida em que x cresce/descrece ilimitadamente o gráfico de $f(x)$ se aproxima arbitrariamente da reta $y = 3$.

Veja que f não possui assíntota vertical pois, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + 4$ se anule.

Exemplo 5
A função $g(x) = \dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{2x-1}$ possui duas assíntotas horizontais, as retas $y = \pm 3/2$. De fato:

$$\frac{\sqrt{9x^2+1}}{2x-1} = \frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{9+1/x^2}}{x(2-1/x)} = \begin{cases} \dfrac{x\cdot\sqrt{9+1/x^2}}{x(2-1/x)}, & x>0 \\ \dfrac{-x\cdot\sqrt{9+1/x^2}}{x(2-1/x)}, & x<0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{9+1/x^2}}{2-1/x}, & x>0 \\ \dfrac{-\sqrt{9+1/x^2}}{2-1/x}, & x<0. \end{cases}$$

Lembre que $\sqrt{x^2} = |x|$. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{2x-1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9+1/x^2}}{2-1/x} = \frac{\sqrt{9+0}}{2-0} = \frac{3}{2}, \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{9x^2+1}}{2x-1} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{9+1/x^2}}{2-1/x} = \frac{-\sqrt{9+0}}{2-0} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

> Uma reta de equação $r(x) = Mx + N$ é uma *Assíntota oblíqua* do gráfico de uma função $f(x)$, se
>
> $$M = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad N = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - Mx,$$
>
> desde que esses limites sejam finitos.

De fato. A reta $r(x) = Mx + N$ é uma assíntota se $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (Mx+N) = 0$. Temos as seguintes equivalências:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - Mx - N = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - Mx = N \Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - M\right) = N.$$

Assim, devemos ter $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} - M = 0$, para que exista o limite. Logo, $M = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Exemplo 6
A função $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$ tem a reta $r : y = x$ como uma assíntota oblíqua.

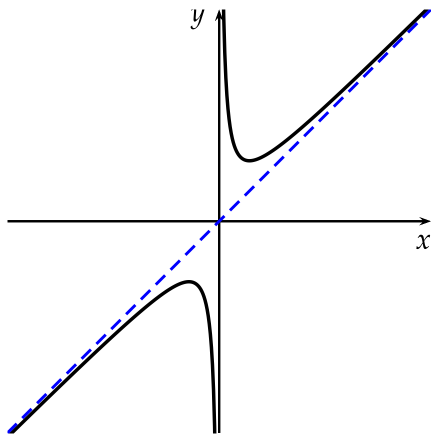
De fato:

$$M = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$N = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 1\cdot x = \lim_{x\to\pm\infty} x + \frac{1}{x} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Veja, também, que:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - r(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x + \frac{1}{x} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$



Exemplo 7
Dada a função $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$, $r(x) = -x + 2$ é uma assíntota oblíqua, pois:

$$M = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{6x^2-x^3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{6/x-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{6/x-1} = \sqrt[3]{0-1} = -1$$

$$N = \lim_{x\to-\infty} f(x) + 1\cdot x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{6x^2-x^3} + x = \ldots = 2.$$

O último limite pode ser calculado usando o fator racionalizante $\sqrt[3]{(6x^2-x^3)^2} - x\sqrt[3]{6x^2-x^3} + x^2$.

Exemplo 8
Vejamos duas funções em que M ou N não é possível ser determinado.

(a) A função $f(x) = e^x$ não possui assíntota oblíqua, pois

$$M = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty \quad \text{ou} \quad M = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{e^{+\infty}\cdot(-\infty)} = \frac{1}{-\infty} = 0.$$

Ou seja, quando $x \to -\infty$ o eixo-x é assíntota horizontal e, quando $x \to +\infty$ não existiu M.

(b) Se $f(x) = \ln(x) + 3x$, temos que

$$M = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)+3x}{x} = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}}_{\infty/\infty\ ,\ L'H} + \lim_{x\to+\infty} 3 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} + 3 = 3.$$

Porém, como $N = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - Mx$, temos:

$$N = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) + 3x - 3x = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Ou seja, não existe a costante N.

Observação 3
Algumas observações sobre assíntotas oblíquas de equação $r(x) = Mx + N$:

(i) Se os limites $M = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ forem finitos e distintos, o gráfico de f poderá ter duas assíntotas oblíquas distintas, dependendo então da existência de valores finitos para N;

(ii) Quando $M = 0$, a equação da assíntota será $y = N$, desde que exista este N, passando a ser então uma assíntota horizontal. Assim, as assíntotas horizontais são as assíntotas oblíquas como casos particulares destas, em que $M = 0$. No entanto, em nosso texto, usaremos a expressão oblíqua somente quando a reta for não paralela a algum dos eixos;

(iii) As funções racionais (quociente entre polinômios), em que o grau do numerador é uma unidade a mais do que o grau do denominador, sempre possuem assíntotas oblíquas;

✓ Pois, quando dividir a função por x, o grau do denominador ficará igual ao do numerador que, no infinito, tem limite finito;

(iv) O coeficiente angular M da assíntota oblíqua de uma função f, pode ser determinado, também, pelo limite $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x)$.

Observação 4
Em respeito ao item (iii) da observação acima, de um modo geral, se a função racional $f(x) = \dfrac{p_m(x)}{q_n(x)}$ é imprópria ($m > n$), podemos obter dois polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que $f(x) = Q(x) + \dfrac{R(x)}{q(x)}$, pela simples divisão entre polinômios, em que o grau de $R(x) < n = \text{gr}(q_n)$. Logo, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{R(x)}{q_n(x)} = 0$. Assim,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - Q(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{R(x)}{q(x)} = 0,$$

implicando que $Q(x)$ é uma assíntota de f.

Questões

Q 1 Determine as assíntotas horizontais de:

(a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 2}{\sqrt{x^4 - 16}}$; (b) $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{8x^3 + 2x + 4}}{1 - 2x}$; (c) $h(x) = \dfrac{5x - 1}{3x - 1 - \sqrt{4x^2 - 8}}$;

(d) $p_1(x) = \dfrac{3x^2 - x + 3}{6x^5 + 4x^3 - x^2}$; (e) $p_2(x) = \dfrac{3x^5 - x + 3}{6x^5 + 4x^3 - x^2}$; (f) $p_3(x) = \dfrac{3x^7 - x + 3}{6x^5 + 4x^3 - x^2}$.

Q 2 Determine as assíntotas verticais de:

(a) $f(x) = \dfrac{5x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$; (c) $h(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^4 - 16}}$;

(b) $g(x) = \dfrac{2 - x}{x^4 + x^2 - 2}$; (d) $i(x) = \dfrac{3x + 2}{\sqrt{4 - x^2}}$.

Q 3 Mostre que as assíntotas da hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ são as retas $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Q 4 Determine as assíntotas oblíquas de:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$; (c) $h(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x}$; (e) $j(x) = 2x - 1 + e^{-x}$;

(b) $g(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$; (d) $i(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + x - 2}$; (f) $k(x) = \ln(x) - 2x + 1$.

Q 5 Efetue a divisão entre polinômios, como descrito na Observação 4, para determine a assíntota da função racional.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$; (b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 81}{x - 1}$; (c) $f(x) = \dfrac{x^4 + 3}{x^2 - 1}$;

Respostas

☺ **Q 1** (a) $y = 2$; (b) $y = -1$; (c) $y = 1$ e $y = 5$; (d) $y = 0$; (e) $y = 1/2$; (f) não possui.

☺ **Q 2** (a) $x = \pm 1$ e $x = 2$; (b) $x = \pm 1$; (c) $x = -2^-$ e $x = 2^+$; (d) $x = -2^+$ e $x = 2^-$.

☺ **Q 4** (a) $y = x + 1$; (b) $y = x$; (c) $y = 2x + 3$; (d) $y = x - 1$; (e) $y = 2x - 1$; (f) Não possui, pois $M = -2$, $\nexists\, N$.

☺ **Q 5** (a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, assíntota oblíqua $y = x$; (b) $f(x) = x^2 - \dfrac{81}{x - 1}$, assíntota curvilínea $y = x^2$; (c) $f(x) = x^2 + 1 + \dfrac{4}{x^2 - 1}$, assíntota curvilínea $y = x^2 + 1$.