CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

— Prof. ADRIANO CATTAI —

ac 01

Apostila 01: Introdução ao Limite e Funções Contínuas

NOME: ____ DATA: ____/____/_______

"Não há ciência que fale das harmonias da natureza com mais clareza do que a matemática"

(Paulo Carus)

1 Introdução

Antes de começarmos com as fantásticas idéias e as importantes terminologias do Cálculo, quero agradecer por lerem estas notas de aula e por contribuirem nas possíveis correções de digitação e na apresentação das ideias básicas para introdução desse novo e básico conceito que iremos trabalhar. É muito importante que tomem os seguintes cuidados:

✓ Este material **não** substitui o livro e **jamais** deverá ser tratado como único texto ou como texto base para seus estudos;

✓ Estas notas serão nosso "ponto de partida" ou nossa orientação na sequência dos conteúdos que são conversados em nossas "saborosas" aulas de Cálculo;

✓ Prestem bem atenção com a notação utilizada. A matemática possui uma linguagem própria, por isso, curta-a!

A seguir, uma síntese de outros textos que tentam explicar o que é Cálculo e por que precisamos estudá-lo.

O **Cálculo Diferencial e Integral**, também chamado de **Cálculo Infinitesimal**, ou simplesmente **Cálculo**, é um ramo importante da Matemática, desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria, que se dedica ao estudo de taxas de variação de grandezas (como a inclinação de uma reta) e a acumulação de quantidades (como a área debaixo de uma curva ou o volume de um sólido).

De toda Matemática que, provavelmente, vocês tenham estudado o Cálculo é fundamentalmente diferente. Ele é a matemática dos movimentos contínuos e suas variações. Onde há movimento ou crescimento e onde forças variáveis agem produzindo aceleração, o Cálculo é a matemática a ser empregada. Antes dele a Matemática se restringia essencialmente a padrões estáticos: **contagem**, **medição** e **descrição de forma**. Ele ajuda em vários conceitos e definições desde a matemática, química, ciências econômicas, ciências biológicas, física clássica e até a física moderna.

Com a introdução de técnicas para lidar com movimentos e variações, podemos estudar: deslocamento de planetas e de corpos; funcionamento de maquinas; fluxo de líquidos; expansão de gases; forças físicas, como o magnetismo e a eletricidade; corpos em queda livre na Terra; crescimento de plantas e animais; disseminação de epidemias; flutuação de lucros, etc.

Aprender cálculo é um processo que não ocorre na primeira tentativa. Seja paciente e perseverante, faça perguntas, discuta ideias e trabalhe com seus colegas. Procure ajuda o mais rápido que precisar. A recompensa de aprender Cálculo é muito gratificante, tanto intelectualmente como profissional. O estudante de cálculo deve ter um conhecimento em certas áreas da Matemática, como funções, geometria e trigonometria, pois são a base do Cálculo.

O Cálculo estuda basicamente as **funções**, a partir de 3 operações-base: **Limites**, **Derivadas** e **Integrais**.

Consultem o **plano de disciplina** e vejam o detalhamento dos conteúdos que iremos estudar; os objetivos específicos e a justificativa da presença do Cálculo em nosso rol de discplinas.

2 Introdução ao Limite de Funções

O conceito fundamental e básico sobre o qual o cálculo se apóia é o de *limite* de função. Abordaremos sobre esse conceito, de forma intuitiva, e usaremos para estudar a noção de *continuidade* de função.

A ideia de limite é fácil de ser captada com alguns exemplos presentes em nosso senso comum. Vejamos alguns.

Exemplo 1 (Placa Metálica)
Suponha que uma placa metática, na forma de um quadrado, esteja expandindo uniformemente porque está sendo aquecida. Se x for o comprimento do lado, a área da placa é dada por $A(x) = x^2$. Assim, quanto mais x se aproxima (ou se avizinha) de 4, a área A tende a 16. Dizemos, então, que *quando x se aproxima de* 4, *x^2 se aproxima de* 16 *como um limite*. Em símbolos, escrevemos:

$$\lim_{x\to 4} A(x) = \lim_{x\to 4} x^2 = 4^2 = 16.$$

Aqui, a notação "$x \to 4$" indica que x tende a 4 e "lim" significa *o limite de*. Assim, 16 é o limite da função $A(x) = x^2$, quando x tende a 4.

Generalizando, se f é uma função e a é um número, entendemos a notação $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ como *o limite de $f(x)$, quando tende a a, é L*, isto é, *$f(x)$ é cada vez mais próximo do número L quando x é arbitrariamente do número a*.

Ainda não temos uma definição "formal" de limite. No entanto, a partir de alguns exemplos, teremos condições de adquirir uma compreensão prática de limites.

Exemplo 2 (Limite de uma função num ponto)
Considere a função $f(x) = x + 1$. Quando x assume uma infinidade de valores aproximando-se mais e mais de 1, a função $x + 1$ assume uma infinidade de valores aproximando-se de $1 + 1 = 2$. Dizemos que **o limite de $f(x)$, quando x tende a 1, é igual a 2**. Escrevemos

$$\boxed{\lim_{x\to 1} x + 1 = 2}.$$

Claramente, existem duas possibilidades para x aproximar-se de 1:

Uma: x se aproxima de 1 por valores inferiores a 1, neste caso, diremos que x tende para 1 **pela esquerda**. Iindicaremos $x \to 1^-$:

x	$0,5$	$0,9$	$0,99$	$0,999$	$0,9999$	$\cdots$	$\longrightarrow\ 1^-$
$f(x)$	$1,5$	$1,9$	$1,99$	$1,999$	$1,9999$	$\cdots$	$\longrightarrow\ 2$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} x + 1 = 2$$

Outra: x se aproxima de 1 por valores superiores a 1 neste caso, diremos que x tende para 1 **pela direita**. Indicaremos $x \to 1^+$:

x	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001	$\cdots$	$\longrightarrow\ 1^+$
$f(x)$	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001	$\cdots$	$\longrightarrow\ 2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} x+1 = 2$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 1} f(x) = 2.$$

Em ambos os casos, os valores de $f(x)$ se aproximam de 2 à medida que x se aproxima de 1. Assim, podemos tornar $f(x)$ tão próximo de 2 quanto desejarmos, bastando para isso tomarmos x suficientemente próximo de 1. Por isso dizemos que **existe** o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 e seu valor é 2.

Observação 1 (Limites Laterais)
Os limites $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, do exemplo anterior, são os **limites laterais** de f no ponto $x = 1$.

Exemplo 3 (Limite Intuitivo da Função Afim)
Temos que $\lim\limits_{x\to -2} 3x+5 = -1$, pois quando x é muito próximo a -2, $3x$ é cada vez mais próximo a -6 que, adcionado a 5, obtemos -1. De um modo geral, temos

$$\lim_{x\to x_0} ax+b = a\cdot x_0 + b.$$

Ou, mais geralmente, se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ é um polinômio, então

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0 = p(x_0).$$

Ou seja, basta obter a imagem do ponto pelo polinômio.

Infelizmente, não é possivel determinarmos (sempre) o limite de uma dada função por simples considerações aritméticas, como fizemos com a função afim. Primeiramente, podemos ter funções em que os valores variam tão desordenadamente que nunca se estabelecem e tendem a um limite, quando diremos simplesmente que *o limite não existe*. Em segundo, a função pode ser tão complicada que exista o limite, mas não é tão evidente por simples inspeção aritmética.

Os três exemplos que seguem, ilustram limites de funções que existem, num determinado ponto, porém não estão tão evidentes.

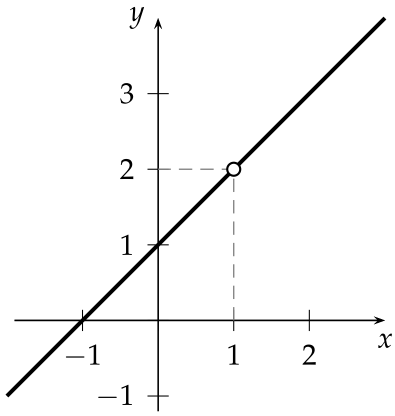
Exemplo 4 (Limite de uma função racional, num ponto)
Definimos como *função racional*, a toda função que é um quociente entre plinômios. Assim, seja a seguinte função racional $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $\forall\ x \neq 1$. Notem que f não está definida para $x = 1$, isto é, não existe a imagem $f(1)$. Veja que no gráfico (abaixo) $x = 1$ não está associado a algum y.

Como $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, podemos simplificar f e, quando $x \neq 1$, escrevemos $f(x) = x+1$.

Deste modo, temos:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2.$$

Ou seja, podemos fazer $f(x)$ próximo de 2 o quanto quisermos, bastando tomar x bem próximo de 1, com $x \neq 1$.



O limite obtido aqui, pode ser ilustrado geometricamente com o traçado do gráfico da função $f(x) = x+1$ desde que, para $x \neq 1$, a função se comporta como uma reta, excluído o ponto $(1, 2)$.

De um modo geral, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ nos diz que $f(x)$ assume valores tão próximo de um número L quanto desejarmos, pela simples escolha de x suficientemente perto de a, mantendo $x \neq a$. Ou seja:

na determinação do limite de $f(x)$, quando x tende para a, não interessa como f está definida em a (nem mesmo se f está realmente definida em a). A única coisa que interessa é como f está definida para valores muito próximos a a, isto é, numa vizinhança de a.

Observação 2 (Limite de Funções Racionais)
Sejam $p(x)$ e $q(x)$ dois polinômios e $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$. Então:

(i) Se $q(a) \neq 0$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dfrac{p(a)}{q(a)}$;

(ii) Se $p(a) = q(a) = 0$, então o limite é indeterminado $\dfrac{0}{0}$ e isto não significa a inexistência do limite. Significa que precisamos "afastar" esta indeterminação através da divisão de polinômios, dividindo $p(x)$ e $q(x)$ por $x - a$ e, obtém-se o limite desejado. O dispositivo prático de Briot-Ruffini efetua essa divisão rapidamente;

(ii) Se $p(a) \neq 0$ e $q(a) = 0$, então $f(a)$ é uma impossibilidade, digamos $\dfrac{k}{0}$, e isto significa que o limite não existe, pois iremos obter $\pm\infty$. Neste caso, analisamos os limites laterais de $f(x)$ no ponto a, para decidirmos entre $+\infty$ ou $-\infty$, como veremos em Limites Infinitos, mais adiante.

Exemplo 5
Vamos ilustrar essa observação:

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x-4}{2x-1} = \dfrac{(-1)^2+3\cdot(-1)-4}{2\cdot(-1)-1} = \dfrac{-6}{-3} = 2$;

(b) $\underbrace{\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-7x-6}{x^2-4x+3}}_{0/0} \overset{\text{B.R.}}{=} \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x^2+3x+2)}{(x-3)(x-1)} \overset{\star}{=} \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+3x+2}{x-1} = \dfrac{20}{2} = 10$;

$\star$: Como $x \to 3$, temos $x - 3 \neq 0$, pois $x \neq 3$.

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x+1}{x^2-1} = \dfrac{5}{0} \overset{??}{=} \pm\infty$. (Veremos depois!)

Exemplo 6 (Limite de uma função irracional, num ponto)
Seja $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$, $\forall\ x \neq 0$. Com auxílio de uma calculadora obtemos imagens de valores muito próximos a 0, conforme tabelas abaixo.

(1) $x \to 0^-$

x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$	$-0,00001$	$\cdots$	$\to\ 0^-$
$f(x)$	$1,948683$	$1,994987$	$1,999499$	$1,999949$	$1,999995$	$\cdots$	$\to\ 2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2$

(2) $x \to 0^+$

x	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$	$0,00001$	$\cdots$	$\to\ 0^+$
$f(x)$	$2,048808$	$2,004987$	$2,000499$	$2,000049$	$2,000005$	$\cdots$	$\to\ 2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$

Por evidências numéricas, induzimos o valor do limite e afirmamos que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1} = 2$. Por outro lado, como $(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$, podemos racionalizar o denominador (neste caso, multiplicando numerador e denominador pelo conjugado de $\sqrt{x+1}-1$), obtendo:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1})^2 - 1^2} = \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x} \overset{x\neq 0}{=} \sqrt{x+1}+1.$$

Assim, temos:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{x+1}+1 = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x+1}+1 = 2.$$

Ou, simsplesmente, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x+1}+1 = 2.$

Exemplo 7
Seja $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+10}-2}{x+2}$, em que $x \neq -2$. Estamos interessados em saber se existe algum número em que $f(x)$ se aproxime quando x se aproxima (continuamente) de -2. Ou seja, estamos querendo saber se existe $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x+10}-2}{x+2}$.

Como temos uma raiz cúbica (não quadrada) a racionalização feita no exemplo anterior (produto pelo conjugado) não é eficaz aqui. Neste caso usamos o recurso de troca de variável, que faremos da seguinte forma:

(i) O radicando $x+10$ igual a alguma variável ao cubo: $y^3 = x+10$;

(ii) Ajustar o denominador: $x+2 = y^3 - 10 + 2 = y^3 - 8 = y^3 - 2^3 = (y-2)(y^2+2y+4)$;

(iii) Alterar a tendência: $x \to -2 \Rightarrow y^3 \to 8$, logo $y \to 2$.

Fazendo a troca, temos:

$$\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt[3]{x+10}-2}{x+2} = \lim_{y\to 2} \frac{\sqrt[3]{y^3}-2}{y^3-10+2} = \lim_{y\to 2} \frac{y-2}{(y-2)(y^2+2y+4)} = \lim_{y\to 2} \frac{1}{y^2+2y+4} = \frac{1}{12}.$$

Logo, afirmamos que $f(x) \to \dfrac{1}{12}$ sempre que $x \to -2$.

Observação 3
Quando o limite apresentar mais do que um radical com índices diferentes, e radicandos comuns, adote o radicando como sendo igual a alguma variável elevada a n, em que n é o menor múltiplo comum aos índices. Por exemplo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{1-\sqrt[4]{x}} &\overset{(MV)}{=} \lim_{y\to 1}\frac{\sqrt[3]{y^{12}}-1}{1-\sqrt[4]{y^{12}}} = \lim_{y\to 1}\frac{y^4-1}{1-y^3} = \lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y^3+y^2+y+1)}{(1-y)(1+y+y^2)}\\ &= \lim_{y\to 1}\frac{-(y^3+y^2+y+1)}{1+y+y^2} = -\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Em que $n = \text{m.m.c}(3,4) = 12$, a mudança de variável (MV) foi $x = y^{12}$ e $y \to 1$.

Fatoração de $a^n - b^n$, $n \geq 2$:

$$\begin{array}{ll} a^2-b^2=(a-b)(a+b) & a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)\\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) & a^6-b^6=(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)\\ a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) & a^7-b^7=(a-b)(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6)\end{array}$$

$$a^n-b^n=(a-b)(\underbrace{a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}}_{n \text{ parcelas, cada com soma dos expoentes resultando } n-1})$$

Observação 4 (Forma Indeterminada 0/0)
Nestes três últimos exemplos, percebemos que se tentarmos calcular o limite diretamente, sem algum manuseio algébrico, iremos obter a expressão $\dfrac{0}{0}$. Esta expressão é muito comum no cálculo de limites e não tem significado como valor de um limite. A expressão $\dfrac{0}{0}$ é um *símbolo de indeterminação*. **Esta ocorrência significa que o limite ainda não foi calculado**. Vejamos uma justificativa para essa terminologia:

$$\frac{0}{0} = \heartsuit \quad\Rightarrow\quad 0 = 0\cdot\heartsuit \quad\Rightarrow\quad \nexists!\ \heartsuit \text{ tal que } 0 = 0\cdot\heartsuit$$

Por isso dizemos que $\heartsuit$ é uma indeterminação, por não existir um único $\heartsuit$ que satisfaça $0 = 0\cdot\heartsuit$.

2.1 Propriedades do Limite

Calculamos os limites de algumas funções por intuição, como por exemplo $\lim\limits_{x\to -2} 3x+1$ que é -5, fazendo a simples consideração aritmética $3\cdot(-2)+1=-5$. Quando não era tão evidente, fizemos algumas manipulações algébricas até que tivemos o cálculo evidente. Na prática, os limites são cálculados pelo uso direto de certas propriedades por uma inspeção artmética que, conforme a lei da função, é feita diretamente antes ou depois da manipulação algébrica. Por exemplo:

$$\lim_{x\to 2} 3x+1 = 3\cdot 2+1 = 7 \quad\text{e}\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 1+1 = 2.$$

Supondo que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ e $k \in \mathbb{R}$ um número qualquer, as propriedades são:

◇ PL01: $\lim\limits_{x\to a} x = a$;

◇ PL02: $\lim_{x\to a} k = k$;

✓ O limite da constante é a própria constante.

◇ PL03: $\lim_{x\to a} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L \pm M$;

✓ O limite da soma/diferença é a soma/diferença dos limites.

◇ PL04: $\lim_{x\to a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x\to a} f(x) = k \cdot M$;

✓ O limite da constante pela função é a constante pelo limite.

◇ PL05: $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L \cdot M$;

✓ O limite do produto é o produto dos limites.

◇ PL06: $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, desde que $M \neq 0$;

✓ O limite do quociente é o quociente dos limites, se o denominador for não nulo.

◇ PL07: $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$, em que n é inteiro positivo;

✓ O limite da potência é a potência do limite.

◇ PL08: $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, em que se n for par, L não pode ser negativo;

✓ O limite da raiz é a raiz do limite.

◇ PL09: $\lim_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim_{x\to a} f(x)\right| = |L|$;

✓ O limite do módulo é o módulo do limite.

◇ PL10: Se g é alguma função tal que $f(x) = g(x)$ numa vizinhança de a (exceto possivelmente em a), então $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = L$.

Totas estas propriedades devem ser bastante razoáveis para o cálculo intuitivo do limite. As propriedades 03 e 05 são válidas para um número finito de funções, ou seja, se $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x\to a} f_2(x) = L_2, \ldots, \lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$, então,

◇ $\lim_{x\to a}(f_1 \pm f_2 \pm \ldots \pm f_n)(x) = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x) \pm \ldots \pm \lim_{x\to a} f_n(x) = L_1 \pm L_2 \pm \ldots \pm L_n$;

◇ $\lim_{x\to a}(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)(x) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x) \cdot \ldots \cdot \lim_{x\to a} f_n(x) = L_1 \cdot L_2 \cdot \ldots \cdot L_n$.

A propriedade **PL10** é a que nos permite manipular algebricamente a função até obter uma expressão que seja possível a inspeção aritmética.

Exemplo 8

Dado o limite $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{5x^2+7}}{x^2+1}$, diretamente pelas propriedades 06, 08 e 03, temos:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{5x^2+7}}{x^2+1} = \frac{\sqrt[3]{\lim_{x\to 2} 5x^2+7}}{\lim_{x\to 2} x^2+1} = \frac{\sqrt[3]{5\cdot 2^2+7}}{2^2+1} = \frac{\sqrt[3]{27}}{5} = \frac{3}{5}.$$

Exemplo 9

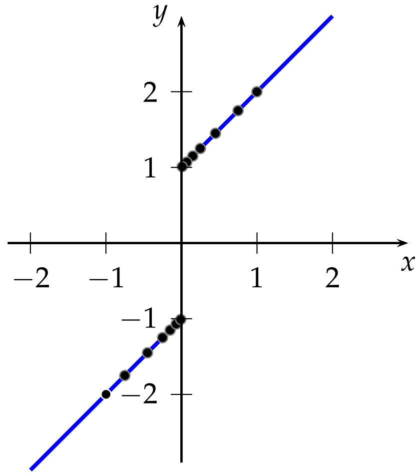
Dado o limite $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x^2-4}$, vemos que $\lim_{x\to 2} x^4 - 16 = 0$ e $\lim_{x\to 2} x^2 - 4 = 0$, ou seja, o limite é indeterminado $0/0$. Assim, pela propriedade 10, temos:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} x^2+4 = 8.$$

2.2 Limites Laterais Diferentes

O exemplo que segue, ilustrará a situação em que, quando x se aproximar de a com valores menores do que a, o limite da função f será diferente quando x se aproximar de a com valores maiores do que a. Esses limites são os mesmos *Limites Laterais* da Observação 1, página 3.

Exemplo 10 (Limites Laterais Diferentes)
Seja f uma função definida por $f(x) = x + \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} x+1, \text{ se } x > 0 \\ x-1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$.



Observemos o comportamento de f quando:

(1) $x \to 0^+$

x	$+1$	$+0,8$	$+0,5$	$+0,2$	$+0,1$	$+0,01$	$+0,001$
$f(x)$	2	$1,8$	$1,5$	$1,2$	$1,1$	$1,01$	$1,001$

(2) $x \to 0^-$

x	-1	$-0,8$	$-0,5$	$-0,2$	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$
$f(x)$	-2	$-1,8$	$-1,5$	$-1,2$	$-1,1$	$-1,01$	$-1,001$

Note que, à medida que os valores de x se aproximam de 0, com **valores maiores** do que 0, os valores da função se aproximam de 1, e que, à medida que os valores de x se aproximam de 0, com **valores menores** do que 0, os valores da função se aproximam de -1. Concluímos, então, que não existe o limite de f quando x tende a 0, pois os **limites laterais** existem e são desiguais. Em símbolos:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Longrightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x).$$

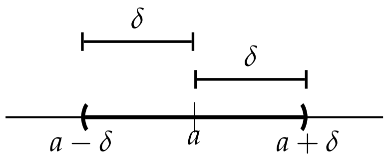
Temos, portanto, uma **relação** entre **limites laterais** e **limites bilaterais**:

> O limite bilateral existe se, e somente se, existirem os limites laterais (isto é, são finitos) e são iguais. Escrevemos,
> $$\lim_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L.$$

O **limite**, portanto, estabelece qual o comportamento da função na vizinhança de um ponto x_0, sem que este pertença necessariamente ao seu domínio. Caso x_0 perteça ao domínio, $f(x_0)$ não interfere no limite de f em x_0.

Vejamos a definição de vizinhança numérica.

Definição 1 (Vizinhança Numérica)
Chama-se *vizinhança numérica* do número a, ou simplesmente *vizinhança* de a, a todo intervalo aberto $V(a)$ que contém a. Se a é o centro da vizinhança, então diz-se que a vizinhança é simétrica.



$V(a;\delta) = V_\delta(a)$

A distância δ de a a qualquer um dos extremos da vizinhança simétrica é chamada de raio da vizinhança. Denotaremos por $V(a;\delta)$ ou $V_\delta(a)$ uma vizinhança simétrica de centro em a e de raio δ.

Em outros termos, dizer que $x \in V_\delta(a)$ é equivalente a dizer que a diferença $x - a$ em valor absoluto é menor do que δ, isto é, $|x - a| < \delta$.

Assim, temos as seguintes equivalências:

$$x \in V_\delta(a) \Rightarrow |x-a| < \delta \Rightarrow -\delta < x - a < \delta \Rightarrow a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow x \in (a-\delta, a+\delta).$$

Por exemplo, $1,4 \in V_1(2) = (1;3)$, pois $|1,4 - 2| = |-0,6| = 0,6 < 1$.

2.3 Definição do Limite

Esta primeira definição, é uma definição intuitiva do limite. Ela nos permite entender seu significado de uma forma intuitiva, sem o rigor matemático aplicado na outra definição, que seguirá naturalmente.

Definição 2 (Intuitiva do Limite)
Suponhamos que $f(x)$ é uma função real definida para todo número em algum aberto (ou em uma reunião de intervalos) contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Dizemos que:

(1) **[Limite Bilateral]** O limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L, quando podemos fazer $f(x)$ arbitrariamente próximo de L, tomando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mantendo $x \neq a$. Em símbolos, escrevemos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

(2) **[Limite Lateral Esquerdo]** O limite de $f(x)$, quando x tende a a pela esquerda, é igual a L_E, quando podemos fazer $f(x)$ arbitrariamente próximo de L_E, tomando x suficientemente próximo de a, com valores menores do que a, mantendo $x \neq a$. Em símbolos, escrevemos:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_E.$$

(3) **[Limite Lateral Direito]** O limite de $f(x)$, quando x tende a a pela direita, é igual a L_D, quando podemos fazer $f(x)$ arbitrariamente próximo de L_D, tomando x suficientemente próximo de a, com valores maiores do que a, mantendo $x \neq a$. Em símbolos, escrevemos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_D.$$

Esta outra definição, é a definição de limite. Ela apresenta o rigor matemático da aproximação com o uso de vizinhanças. Ela é geralmente conhecida como como a definição formal do limite ou definição ε-δ.

Definição 3 (Limite ε-δ)
Seja f uma função e a um número real para o qual exista algum intervalo I aberto contendo a (ou seja, $I = V(a)$) e $I - \{a\}$ esteja contido no domínio de f. Definimos:

(1) **[Limite Bilateral]** Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende ao número a é o número real L se, dado um número real arbitrário e positivo, $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um número real real postivo, $\delta > 0$, tal que
$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$
Equivalentemente, $x \in V_\delta(a) \implies f(x) \in V_\varepsilon(L)$. Isto é, sempre que x for arbitrariamente próximo de a, $f(x)$ é arbitrariamente próxima de L.

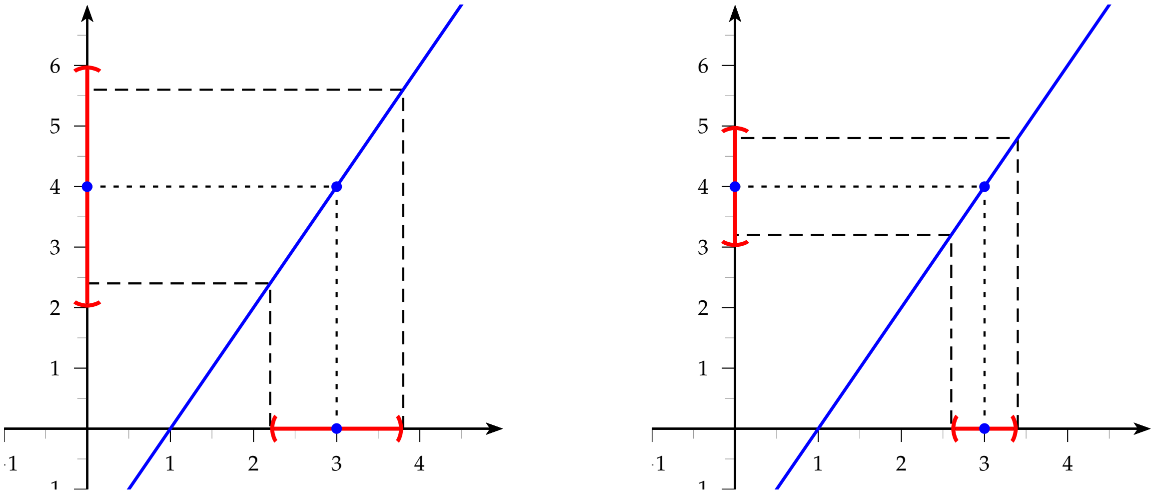
(2) **[Limite Lateral Esquerdo]** Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende ao número a, com valores menores do que a, é o número real L_E se, dado um número real arbitrário e positivo, $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um número real real postivo, $\delta > 0$, tal que
$$0 < a - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - L_E| < \varepsilon.$$

(3) **[Limite Lateral Direito]** Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende ao número a, com valores maiores do que a, é o número real L_D se, dado um número real arbitrário e positivo, $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um número real real postivo, $\delta > 0$, tal que
$$0 < x - a < \delta \Longrightarrow |f(x) - L_D| < \varepsilon.$$

Exemplo 11
Por simples inspeção aritmética, afirmamos que $\lim\limits_{x\to 1} 2x + 1 = 3$, ou seja, afirmamos que existe uma correspondência entre as vizinhanças de $L = 3$ e $a = 1$. Outra maneira de dizer isto, é que podemos tomar o valor absoluto da diferença entre $f(x)$ e 3 tão pequeno quanto desejarmos, tomando o valor absoluto da diferença entre x e 1 suficientemente pequeno. Isto é, $|f(x) - 3|$ pode ser tão pequeno quanto desejarmos, tomando $|x - 1|$ suficientemente pequeno. Assim, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe algum valor $\delta > 0$, tal que
$$0 < |x - 1| < \delta \quad \Leftrightarrow \quad |f(x) - 3| < \varepsilon.$$
Vamos verificar que é verdade. Como $f(x) = 2x + 1$, então
$$|f(x) - 3| = |2x + 1 - 3| = |2(x - 1)| = 2|x - 1|.$$
Queremos agora, encontrar $\delta > 0$, tal que:
$$\begin{array}{llcrcl} \text{se} & 0 < |x-1| < \delta & \text{então} & |f(x) - 3| & < & \varepsilon \\ \text{se} & 0 < |x-1| < \delta & \text{então} & 2|x - 1| & < & \varepsilon \\ \text{se} & 0 < |x-1| < \delta & \text{então} & |x - 1| & < & \varepsilon/2 \end{array}$$
Portanto, se fizermos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, teremos $0 < |x - 1| < \delta$.

Exemplo 12
Vamos mostrar que $\lim\limits_{x\to 3} 2x - 2 = 4$. Precisamos mostrar que
$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0;\ 0 < |x - 3| < \delta \ \Rightarrow\ |2x - 2 - 4| < \varepsilon.$$
Como $|2x - 2 - 4| = |2(x - 3)| = |2| \cdot |x - 3| < 2 \cdot \delta$, sempre que considerarmos $\delta < \dfrac{\varepsilon}{2}$, teremos o desejado. De fato,
$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0;\ 0 < |x - 3| < \delta \ \Rightarrow\ |2x - 2 - 4| = 2 \cdot |x - 3| < 2 \cdot \delta < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vamos escolher dois epsilons, $\varepsilon_1 = 2$ e $\varepsilon_2 = 1$. Assim, temos duas vizinhanças, em y, para o número 4, $V_{\varepsilon_1}(4) = (2,6)$ e $V_{\varepsilon_2}(4) = (3,5)$. Agora, adotando $\delta_1 = 0,8 < 1 = \varepsilon_1/2$ e $\delta_2 = 0,4 < 0,5 = \varepsilon_2/2$, temos duas vizinhanças, em x, para o número 3: $V_{\delta_1}(3) = (2,2;3,8)$ e $V_{\delta_2}(3) = (2,6;3,4)$. Nas figuras, vemos que $f\big(V_{\delta_1}(3)\big) \subset V_{\varepsilon_1}(4)$ e $f\big(V_{\delta_2}(3)\big) \subset V_{\varepsilon_2}(4)$.



Observação 5

Generalizando, para mostrar que $\lim\limits_{x\to x_0} a\cdot x + b = a\cdot x_0 + b$, se $a \neq 0$, precisamos mostrar que

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0;\ 0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |a\cdot x + b - (a\cdot x_0 + b)| < \varepsilon.$$

Para tanto, observemos que:

$$|a\cdot x + b - (a\cdot x_0 + b)| = |a(x - x_0)| = |a|\cdot|x - x_0| < |a|\cdot\delta.$$

Portanto, assumindo $\delta < \dfrac{\varepsilon}{|a|}$, mostramos que:

$$\begin{aligned}\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0;\ 0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |a\cdot x + b - (a\cdot x_0 + b)| &= |a|\cdot\delta \\ &< |a|\cdot\frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Exemplo 13

Para mostrar que $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$, precisamos mostrar que

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0;\ 0 < |x - 3| < \delta\ \Rightarrow\ |x^2 - 9| < \varepsilon.$$

Para tanto, observemos que:

$$|x^2 - 9| = |(x-3)\cdot(x+3)| = |x-3|\cdot|x+3| < \delta\cdot|x+3|.$$

Como $0 < |x-3| < \delta$, restringindo δ entre 0 e 1, temos $0 < |x-3| < 1$, donde $-1 < x - 3 < 1$, ou ainda, $5 < x + 3 < 7$. Assim, $0 < |x+3| < 7$. Logo,

$$|x^2 - 9| = |(x-3)\cdot(x+3)| = |x-3|\cdot|x+3| < \delta\cdot 7.$$

Portanto, assumindo $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{7}\right\}$, mostramos que:

$$\begin{aligned}\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0;\ 0 < |x - 3| < \delta\ \Rightarrow\ |x^2 - 9| &= |x-3|\cdot|x+3| \\ &< \varepsilon\cdot 7 \\ &< \frac{\varepsilon}{7}\cdot 7 = \varepsilon.\end{aligned}$$

3 Função Contínua

Da relação entre os limites laterais e o bilateral, dizemos que o limite bilateral existe se os laterais forem finitos e iguais.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow L_1 = L_2 = L.$$

Conforme os limites laterais, podemos notar:

(1) Se $L_E = L_D$, então **existe** $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L$, em que $L = L_E = L_D$;

(2) Se $L_E \neq L_D$, então **não existe** $\lim_{x \to a} f(x)$;

(3) Pode existir um e outro não. Daí **não existe** $\lim_{x \to a} f(x)$;

(4) Ambos não existem. Daí **não existe** $\lim_{x \to a} f(x)$.

Na determinação do limite de $f(x)$, quando x atende a a, não interessa como f está definida em a (nem mesmo se f está realmente definida em a). A única coisa que interessa é como f está definida para valores de x muito próximo a a (numa vizinhança de a). Assim, podemos distinguir três casos possíveis, como segue:

Suponha que $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Então, extamente um dos três casos é válido:

Caso 1. f está definida em a e $f(a) = L$;

Caso 2. f não está definida em a;

Caso 3. f está definida em a e $f(a) \neq L$.

Quando o primeiro caso acontecer, diremos a *função é contínua no ponto* $x = a$.

Definição 4 (Continuidade)
Seja $f(x)$ uma função real definida em $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que:

(1) **[Num ponto]** A função $f(x)$ é *contínua no ponto* $x = a$ se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$;

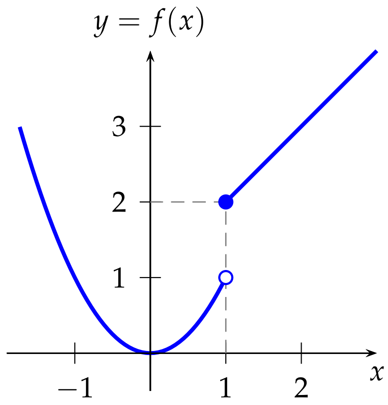
(2) **[Num Conjunto]** A função $f(x)$ é *contínua num conjunto* A se f for contínua em todo $a \in A$;

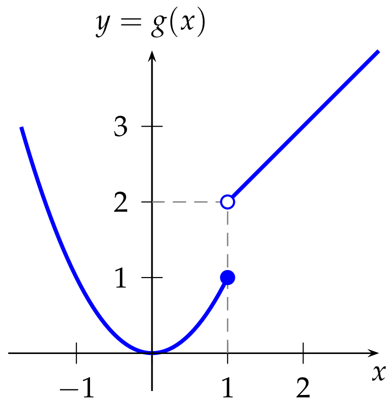
(3) **[Contínua]** A função $f(x)$ é *contínua* quando f for contínua em todos os pontos de seu domínio.

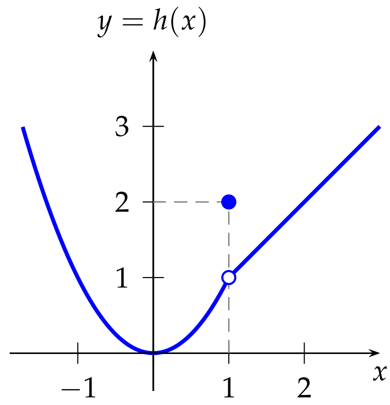
A seguir, exemplos ilustrando esses conceitos.

Exemplo 14
Sejam f, g e h três funções definidas em $\mathbb{R}$, dadas abaixo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 1 \\ x+1 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \leq 1 \\ x+1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 1 \\ 2 & \text{se} \quad x = 1 \\ x & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$







A partir de seus gráficos, temos:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to1^-} f(x) = 1\\ \lim_{x\to1^+} f(x) = 2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to1} f(x); \quad \left.\begin{aligned}\lim_{x\to1^-} g(x) = 1\\ \lim_{x\to1^+} g(x) = 2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to1} g(x); \quad \left.\begin{aligned}\lim_{x\to1^-} h(x) = 1\\ \lim_{x\to1^+} h(x) = 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to1} h(x) = 1.$$

Temos as seguintes conclusões:

(i) As funções f e g são **descontínuas** (não são contínuas) em $x = 1$, pois o limite, quando $x \to 1$, não existiu;

(i.1) f é **contínua à direita** em $x = 1$ pois $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 2 = f(1)$;

(i.2) g é **contínua à esquerda** em $x = 1$ pois $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = 1 = g(1)$;

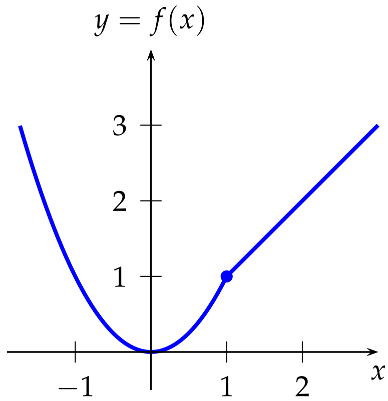
(ii) A função h é **descontínua** em $x = 1$, pois $\lim\limits_{x\to1} h(x) = 1 \neq 2 = h(1)$.

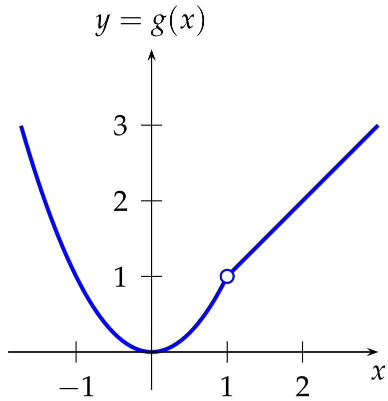
Exemplo 15

Sejam f e g duas funções, cujos gráficos estão ao lado.

Afirmamos que ambas são contínuas, isto é, não possuem ponto algum de descontinuidade em seus domínios. Porém, possuem domínios diferentes:

◇ f é contínua em todo $\mathbb{R}$;
◇ g é contínua em $\mathbb{R} - \{1\}$.





Observação 6

Como $1 \notin \mathrm{Dom}(g)$, ou seja, não existe $g(1)$, não se questiona a continuidade de g neste ponto. Ou seja, que a definição de função contínua, exige que a análise da continuidade num ponto seja requerida somente quando o ponto é do domínio da função. Caso contrário, não há sentido em analisar a continuidade da função no ponto.

Exemplo 16

Analisando o domínio de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, que é $\mathbb{R} - \{0\}$, vemos que f é contínua. De fato, $\forall\ a \neq 0$, temos:

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} = f(a).$$

Agora, se o 0 fosse incluído no domínio, precisaríamos atribuir um valor para $f(0)$. Pergunta-se:

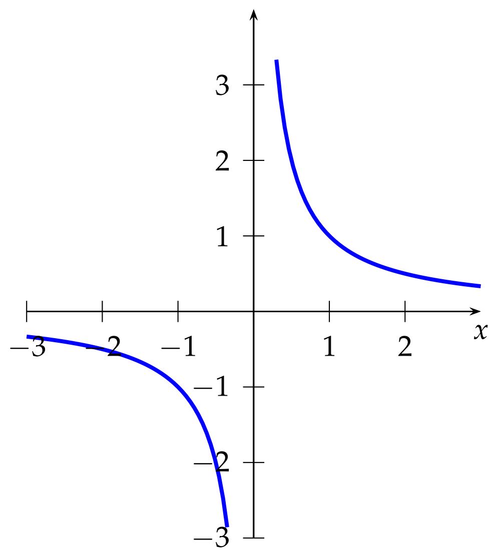
Qual o valor para $f(0)$ de tal modo que f seja contínua?

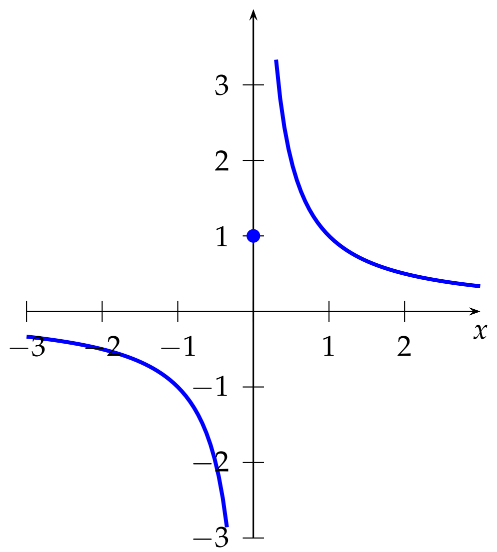
Analisando os limites laterais em zero:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Como os limites laterais são infinitos (falaremos disso mais adiante), o limite bilateral não existe. Logo, não podemos atribuir valor real algum para $f(0)$ de tal forma que f seja contínua em zero.

Agora, considerando $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$, vemos que g é descontínua em $x = 0$.





Exemplo 17

A reta $f(x) = m \cdot x + n$ é contínua em $\mathbb{R}$. De fato, para todo $a \in \mathbb{R}$ temos

$$\lim_{x\to a} mx + b = m \cdot a + n = f(a).$$

De modo geral, se $p_n(x)$ é um polinômio de grau n, então $p_n(x)$ é úma função contínua em $\mathbb{R}$. De fato, seja $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, daí:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} p_n(x) &= \lim_{x\to a} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= a_n \cdot a^n + a_{n-1} \cdot a^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot a^2 + a_1 \cdot a + a_0 \\ &= p_n(a). \end{aligned}$$

Isto nos diz que: o limite de um polinômio $p(x)$ em $x = a$, é $p(a)$.

Exemplo 18

A função exponencial $y = a^x$, em que $0 < a \neq 1$, é contínua em $\mathbb{R}$.

Obs. Algumas propriedades úteis:

$$\diamond\, a^x \cdot a^y = a^{x+y};\ \diamond\, a^x/a^y = a^{x-y};\ \diamond\, a^x \cdot b^x = (a\cdot b)^x;\ \diamond\, a^{-x} = \frac{1}{a^x};\ \diamond\, \sqrt[y]{a^x} = a^{x/y}.$$

??? Detalhar ...

Exemplo 19

A função logarítmica $f(x) = \log_a(x)$, em que $0 < a \neq 1$, é contínua em $\mathbb{R}_+^*$.

Obs 1. Se $x > 0$, então $\log_a(x)$ é o expoente ao qual deve se elevar a base a para se obter o valor de x, isto é, $\log_a(x) = y$ se, e somente se, $a^y = x$.

Obs 2. Se $x > 0$, então $\ln(x)$ (logaritmo natural) é o expoente ao qual deve se elevar a base e para se obter o valor de x, isto é, $\ln(x) = \log_e(x) = y$ se, e somente se, $e^y = x$, em que $e \approx 2{,}7$, é a constante de Euler.

Obs 3. Se $x > 0$, então $\log(x)$ é o expoente ao qual deve se elevar a base 10 para se obter o valor de x, isto é, $\log(x) = \log_{10}(x) = y$ se, e somente se, $10^y = x$.

Obs 4. Algumas propriedades úteis:

$\diamond$ $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$; $\diamond$ $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$; $\diamond$ $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$.

Exemplo 20
A função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2}, & x \neq -2 \\ -4, & x = 2 \end{cases}$ é contínua em $x = -2$, pois:

$$\lim_{x\to-2} f(x) = \lim_{x\to-2} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x\to-2} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to-2} x-2 = -4 = f(-2).$$

Exemplo 21
A função $f(x) = \begin{cases} -x+2, & x > 1 \\ 2, & x = 1 \\ x, & x < 1 \end{cases}$ é descontínua em $x = 1$, pois:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to1^-} f(x) &= \lim_{x\to1^-} x = 1 \\ \lim_{x\to1^+} f(x) &= \lim_{x\to1^+} -x+2 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to1} f(x) = 1 \neq 2 = f(1).$$

Exemplo 22
A função $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ x+1, & x \geq 1 \end{cases}$ é contínua à direita em $x = 1$, pois:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to1^-} f(x) &= \lim_{x\to1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x\to1^+} f(x) &= \lim_{x\to1^+} x+1 = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to1^+} f(x) = 2 = f(1).$$

Note que f é descontínua em $x = 1$.

Exemplo 23
A função $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$ é contínua à esquerda em $x = 1$, pois:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to1^-} f(x) &= \lim_{x\to1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x\to1^+} f(x) &= \lim_{x\to1^+} x+1 = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to1^-} f(x) = 1 = f(1).$$

Note que f é descontínua em $x = 1$.

Exemplo 24
Determine o valor de k para que $f(x) = \begin{cases} k \cdot x, & x \leq 2 \\ -x+4, & x > 2 \end{cases}$ seja contínua.

Solução: Como $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} k \cdot x = 2k$ e que $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} -x+4 = 2$, então para que o limite exista, devemos ter $2k = 2$, ou seja, $k = 1$. Veja que $f(2) = 2k$ que, para $k = 1$, teremos $f(2) = 2 = \lim\limits_{x\to2} f(x)$. $\triangleleft$

Proposição 1 (Propriedades)
Sejam f e g duas funções.

(a) Se f e g são contínuas em a, então $f \pm g$ e $f \cdot g$ são contínuas em a;

(b) Se f e g são contínuas em a, então f/g é contínua em a, desde que $g(a) \neq 0$;

(c) Se g é contínua em a e f é contínua em $g(a)$, então $f \circ g$ é contínua em a;

(d) Se f e g são funções contínuas, então $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g, $|f|$, $f \circ g$ e $g \circ f$ são funções contínuas;

(e) Um função polinomial é contínua em todo $\mathbb{R}$;

(f) Um função racional (quociente entre polinômios) é contínua em seu domínio;

(g) Se f é uma função contínua e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$, então $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right) = f(L)$, desde que $L \in \text{Dom}(f)$.

Exemplo 25
A função $f(x) = |x| + \sqrt[3]{x}$ é contínua em $\mathbb{R}$, pois $\forall a \in \mathbb{R}$, temos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} |x| + \sqrt[3]{x} = |\lim_{x\to a} x| + \sqrt[3]{\lim_{x\to a} x} = |a| + \sqrt[3]{a} = f(a).$$

Ou, de outro modo, se $f_1(x) = |x|$ e $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$, vemos que f é uma soma entre duas contínuas. Já a função $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ é contínua em $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$.

Exemplo 26
Por ser contínua, a função logarítmica, temos:

$$\lim_{x\to 2} \log_4\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = \log_4\left(\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}\right) = \log_4\left(\lim_{x\to 2} x+2\right) = \log_4(4) = 1.$$

Exemplo 27
(a) As funções $\text{sen}(x)$ e $\cos(x)$ são contínuas em $\mathbb{R}$, ou seja, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, temos:

$$\lim_{x\to a} \text{sen}(x) = \text{sen}(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} \cos(x) = \cos(a).$$

(b) As funções $\text{tg}(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$ e $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ são contínuas para todo $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ou seja:

$$\lim_{x\to a} \text{tg}(x) = \text{tg}(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} \sec(x) = \sec(a) \Leftrightarrow \forall\, a \notin \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

(c) As funções $\text{cotg}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$ e $\text{cossec}(x) = \dfrac{1}{\text{sen}(x)}$ são contínuas para todo $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ou seja:

$$\lim_{x\to a} \text{cotg}(x) = \text{cotg}(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} \text{cossec}(x) = \text{cossec}(a) \Leftrightarrow \forall\, a \notin \{x \in \mathbb{R}; x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

4 Funções Contínuas Definidas num Intervalo

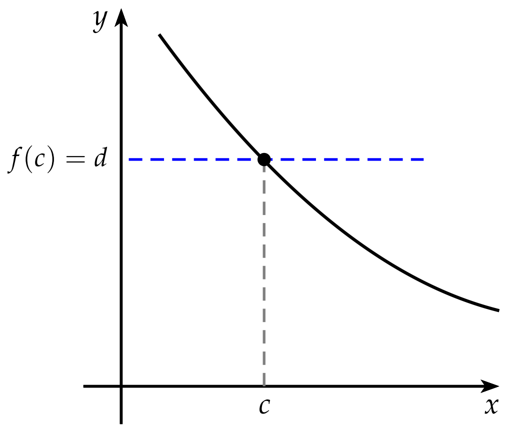
A expressão, *"função contínua é aquela que seu gráfico é desenhado sem que o lápis seja removido do papel"* é falsa. Por exemplo, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é contínua em $\mathbb{R}^*$ e seu gráfico não pode ser desenhado sem que o lápis não seja removido do papel. Porém, quando a função é contínua num intervalo, essa afirmação é verdadeira, devido ao seguinte teorema, devido a Bernar Bolzano e Augustin Louis Cauchy.

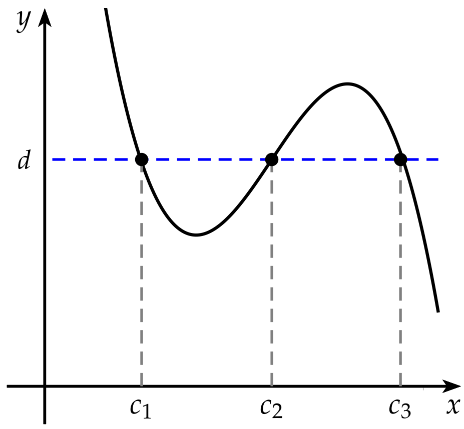
Teorema 1 (do Valor Intermédio - TVI)
Se f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então para todo d entre $f(a)$ e $f(b)$ existe, pelo menos, um $c \in (a, b)$ tal que $d = f(c)$.

Ou, equivalentemente, seja f é contínua no intervalo $[a, b]$. Então para cada $c \in [a, b]$ é existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $d = f(c)$.

Este teorema possui grande significado na determinação de valores específicos, como por exemplo zeros de função.

As figuras que seguem nos ajufam a esclarecer que, considerada uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$, se traçarmos uma reta horizontal $y = d$, em que d estão entre $f(a)$ e $f(b)$, esta intersetará o gráfico de f em pelo menos um ponto, neste caso de coordenadas (c, d).





Geometricamente, interpretamos também este teorema da seguinte forma:

> *se f é contínua num intervalo I, então seu gráfico é desenhado sem que o lápis seja retirado do papel ou, equivalenetmente, seu gráfico é formado apenas por uma linha ininterrúpta.*

Observação 7
Se $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua, então a imagem do intervalo I é outro intervalo, digamos J. Escrevemos $f(I) = J$.

Exemplo 28
Sabemos, da trigonometria que $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$ e $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, ou seja, as funções $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ são funções limitadas e estão definidas em todo $\mathbb{R}$. Como elas são contínuas (afirmação!), então $\operatorname{sen}(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ e $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. Assim, para cada $d \in [-1, 1]$, existe (pelo menos) um número $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = d$ e $g(c) = d$. Na verdade, para cada d existem infinitos $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = d$ e $g(c) = d$.

No caso particular em que $d = 0$, a reta será $y = 0$ (eixo x). Assim, cada c corresponderá a um zero de f. Por isso mesmo, este teorema tem especial importância na localização de zeros de determinadas funções (principalmente funções em que não é possível obter os seus zeros por meros processos algébricos). Assim, podemos enunciar a seguinte aplicação do TVI:

Proposição 2
Se f é uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe pelo menos um valor real $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

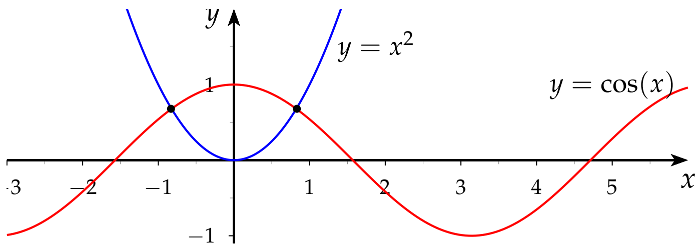
> Esta proposição apenas indica se a função possui raiz no determinado intervalo, sem indicar quantas e nem como determiná-la.

Exemplo 29
A função $f(x) = x^3 + x - 1$ possui uma raiz no intervalo $[0, 1]$, pois: (i) f é contínua em $\mathbb{R}$ e, em especial, em $[0, 1]$ e (ii) $f(0) = -1$ e $f(1) = 1$, implicando $f(0) \cdot f(1) < 0$. Daí, pelo TVI, existe algum, $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = 0$.

Com um pouco de trabalho, dá para verificar que $c = \dfrac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}(9 + \sqrt{93})}}{\sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{\dfrac{2}{3(9 + \sqrt{93})}}$.

Exemplo 30
Com auxílio de uma calculadora, vemos que a equação $\cos(x) = x^2$ possui duas raízes reais, aproximadamente $\pm 0,824132312302522 42296$. Com o TVI podemos identificar intervalos onde esses números estão, mas não como obtê-los. Vejamos.

Primeiramente, esboçando essas duas funções, x^2 e $\cos(x)$, as raízes da equação serão os pontos de interseção desses dois gráficos. Assim, o esboço abaixo nos permite afirmar que que as raízes estão nos intervalos $[-\pi/2, 0]$ e $[0, \pi/2]$.



Como a equação $\cos(x) = x^2$ é equivalente a $x^2 - \cos(x) = 0$, podemos adotar $f(x) = x^2 - \cos(x)$, como sendo a função que queremos mostrar, com o TVI, a existência de raízes. Assim, vemos que f é contínua em todo $\mathbb{R}$, por se tratar de uma direferança entre duas contínuas em $\mathbb{R}$, em especial nos intervalos $[-\pi/2, 0]$ e $[0, \pi/2]$. Calculando as imagens nos extremos destes intervalos, temos:

$$\begin{array}{lclclclcl} f(-\pi/2) & = & (-\pi/2)^2 - \cos(-\pi/2) & = & \pi^2/4 - 0 & = & \pi^2/4 & > & 0 \\ f(0) & = & (0)^2 - \cos(0) & = & 0 - 1 & = & -1 & < & 0 \\ f(\pi/2) & = & (\pi/2)^2 - \cos(\pi/2) & = & \pi^2/4 - 0 & = & \pi^2/4 & > & 0 \end{array}$$

Pela continuidade de f e, visto que $f(-\pi/2) \cdot f(0) < 0$ e $f(0) \cdot f(\pi/2) < 0$, o TVI garante a existência de uma raiz em cada intervalo e, portanto, mostramos que a equação $\cos(x) = x^2$ possui (pelo menos) duas raízes.

5 Limites Infinitos

Nos dois exemplos que seguem, veremos funções que possuem limites laterais que não existem, ou seja, que algum deles é infinito.

Exemplo 31
Seja $f(x) = \dfrac{1}{x}, \forall\, x \neq 0$. Consideremos as seguintes tabelas:

(1) $x \to 0^+$

x	$+1$	$+0,1$	$+0,01$	$+0,001$	$+0,0001$	$+0,00001$	$+0,000001$	$\longrightarrow$	0^+
$f(x)$	$+1$	$+10$	$+100$	$+1.000$	$+10.000$	$+100.000$	$+1.000.000$	$\longrightarrow$	$+\infty$

(2) $x \to 0^-$

x	-1	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$	$-0,00001$	$-0,000001$	$\longrightarrow$	0^-
$f(x)$	-1	-10	-100	-1.000	-10.000	-100.000	$-1.000.000$	$\longrightarrow$	$-\infty$

Note que,

- ⋄ à medida que os valores de x se aproximam de 0, com valores maiores do que 0, os valores da função **crescem sem atingir um limite**, e que,
- ⋄ à medida que os valores de x se aproximam de 0, com valores menores do que 0, os valores da função **descrescem sem atingir um limite**.

Concluímos, então, que não existe o limite de f quando x tende a 0, nem pela esquerda e nem pela direira, pois os **limites laterais** não existem. Em símbolos, escrevemos:

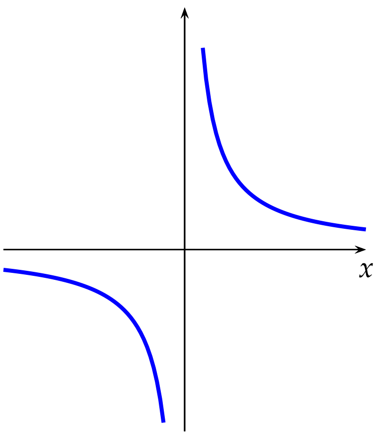
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Exemplo 32
Seja agora a função $g(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}, \forall\, x \neq 0$. Com um raciocínio análogo ao exemplo anterior, temos:

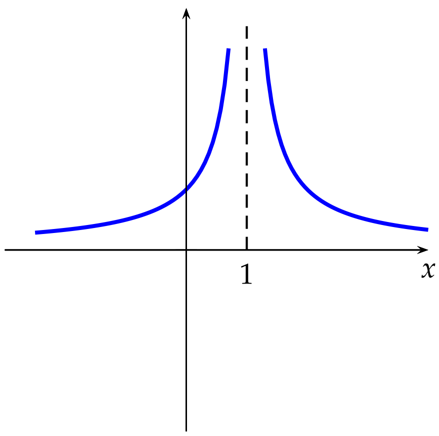
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(-0)^2} = \frac{1}{+0} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(+0)^2} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

Note que, que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$, mas o limite $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$ não existe, pois seus limites laterais são infinitos.

$y = f(x) = \dfrac{1}{x}$



$y = g(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$



Observação 8 (Assíntota Vertical)
Dizemos que o a reta vertical $x = 0$ (eixo-y) é uma *assíntota vertical* para o gráfico da função f pois, pelo menos, um dos limites laterais em zero foi infinto e, a reta vertical $x = 1$ é assíntota vertical para a função g.

Generalizando, diremos que a reta vertical $x = a$ é uma *assíntota vertical* vertical para o gráfico da função f se, algum dos limites em a for infinito, ou seja

$$x = a \text{ é assíntita vertical} \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{e/ou} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Os símbolos $-\infty$ e $+\infty$ não são números e devemos usá-los com muito cuidado. A seguir, a definição de limite infinito.

Definição 5 (Limite Infinito)
Seja $D \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in D$. Se f está definida em $D - \{a\}$, então

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

quando, x ao se aproximar de a, $f(x)$ cresce ilimitadamente, ou seja,

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff (\forall\, M > 0, \exists\, \delta > 0;\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M).$$

(ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

quando, x ao se aproximar de a, $f(x)$ decresce ilimitadamente, ou seja,

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff (\forall\, N < 0, \exists\, \delta > 0;\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < N).$$

Observação 9
Ilustrando a definição, com a função g dada acima, vemos que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$, uma vez que se fizermos $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$, teremos

$$|x - 1| < \frac{1}{\sqrt{M}} \Longrightarrow \sqrt{M} < \frac{1}{|x-1|} \Longrightarrow \frac{1}{(x-1)^2} > M, \ \ \forall\, M > 0.$$

Note que as funções $\dfrac{1}{x}$ e $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ são exemplos de duas funções quocientes, ou seja, da forma $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, em que $p(x)$ e $q(x)$ são funções. Do mesmo modo que tratamos com os outros exemplos, procederemos informalmente com inspeções aritméticas das funções envolvidas que, nestes casos, devemos notar que:
se o denominador da fração tender a zero e o numerador tender a uma constante diferente de zero, então a fração tenderá a ter um enorme valor absoluto.
Ou seja, se

$$\lim_{x \to a} p(x) = k \neq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} q(x) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \pm\infty.$$

A decisão entre $-\infty$ ou $+\infty$ é dada estudando o sinal do quociente, em especial, do denominador, considerando os limites laterais.

Exemplo 33
Vamos considerar a função $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$. Como 2 anula tanto numerado como denominador, podemos reescrever f da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x^2+x+1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+x+1}{x+2}.$$

Assim, vemos que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{7}{4}$ e que $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \dfrac{3}{0} = \pm\infty$. Analisando os limites laterais, temos:

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+x+1}{x+2} = \frac{3}{-0} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+x+1}{x+2} = \frac{3}{+0} = +\infty.$$

Em que,

$$\lim_{x\to -2^-} x+2 = -0 \quad \text{devido que} \quad x \to -2^- \quad \text{implica} \quad x < -2 \Leftrightarrow x+2 < 0$$
$$\lim_{x\to -2^+} x+2 = +0 \quad \text{devido que} \quad x \to -2^+ \quad \text{implica} \quad x > -2 \Leftrightarrow x+2 > 0.$$

Definição 6 (Zero com Sinal)
Dizemos que:

(i) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -0 \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $f(x) < 0$ quando $x \to a^-$;

(ii) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -0 \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $f(x) < 0$ quando $x \to a^+$;

(i) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +0 \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $f(x) > 0$ quando $x \to a^-$;

(ii) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +0 \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $f(x) > 0$ quando $x \to a^+$.

Intuimos assim, a seguinte "aritmética":

$$\frac{k}{+0} = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad k > 0 \\ -\infty & \text{se} \quad k < 0 \end{cases} \qquad \frac{k}{-0} = \begin{cases} -\infty & \text{se} \quad k > 0 \\ +\infty & \text{se} \quad k < 0 \end{cases}$$

Exemplo 34
Vejamos os seguintes lmites:

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+1}{x^2 - 6x + 9} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+1}{(x-3)^2} = \dfrac{10}{(0)^2} = \dfrac{10}{+0} = +\infty;$

(b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2 - 10}{2x - x^2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-10}{x(2-x)} = \dfrac{-6}{+0} = -\infty$ (em que $x \to 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow 2 - x > 0$).

Intuitivamente, temos a seguinte "Aritmética" com o *Infinito*: $k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	$(\pm\infty)^2 = +\infty$	$k \cdot (+\infty) = +\infty,\ k > 0$	$\dfrac{+\infty}{k} = +\infty,\ k > 0$
$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	$(\pm\infty)^3 = \pm\infty$	$k \cdot (+\infty) = -\infty,\ k < 0$	$\dfrac{+\infty}{k} = -\infty,\ k < 0$
$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$	$(\pm\infty)^{n \text{ par}} = +\infty$	$k \cdot (-\infty) = -\infty,\ k > 0$	$\dfrac{-\infty}{k} = -\infty,\ k > 0$
$k \pm \infty = \pm\infty$	$(\pm\infty)^{n \text{ ímpar}} = \pm\infty$	$k \cdot (-\infty) = +\infty,\ k < 0$	$\dfrac{-\infty}{k} = +\infty,\ k < 0$

Também é fácil intuir que:

$$\frac{+\infty}{+0} = +\infty \qquad \frac{+\infty}{-0} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{+0} = -\infty \qquad \frac{-\infty}{-0} = +\infty$$

Exemplo 35
Determine as assíntotas verticais da função $f(x) = \dfrac{x-6}{x^2-9}$.

Solução: Como $x = \pm 3$ anula o denominador e não o numerador, vemos que $f(\pm 3) = \dfrac{k}{0}$, ou seja, podemos usar a "aritmética" desenvolvida acima para garantir que $x = -3$ e $x = 3$ são assíntotas verticais. Para tanto, basta calcular os seguintes limites:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{x-6}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{-9}{-3\times(-0)} = \dfrac{-9}{+0} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{x-6}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{-9}{-3\times(+0)} = \dfrac{-9}{-0} = +\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x-6}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{-3}{-0\times 6} = \dfrac{-3}{-0} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x-6}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{-3}{+0\times 6} = \dfrac{-3}{+0} = -\infty \end{cases}$$

◁

Observação 10 (Cuidado! Cuidado! Cuidado!)
Os "resultados"

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad +\infty-\infty, \quad -\infty+\infty, \quad 0\cdot(\pm\infty)$$

são símbolos de indeterminação. Eles não significam nada como valores de limites. Indica apenas que é preciso repensar o procedimento adotado no cálculo que levou até eles.

Exemplo 36
Considere o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} - \frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{1}{+0} - \frac{4}{+0} = +\infty - \infty.$$

Com o cálculo direto, obtivemos a indeterminação $+\infty - \infty$. Repensando o cálculo, temos:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} - \frac{x+3}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1-(x+3)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-4}{(x-1)^2} = \frac{-4}{+0} = -\infty.$$

6 Um Limite Muito Especial (A Derivada)

A partir de uma dada função $f(x)$, iremos calcular um limite que, para o Cálculo, é muito especial.

Sejam x e y duas variáveis relacionadas pela equação $y = f(x)$. Indicamos por Δx uma variação em x e $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ a variação em y (ou da função f) quando há variação Δx em x. Note que, se f for contante, então $\Delta y = 0$.

O quociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ é a *Taxa de Variação Média* (ou *Taxa Média de Variação*) da função $f(x)$ no intervalo $[x, x+\Delta x]$.

Por exemplo, se $f(x) = x^2$, então:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Ou, se $f(x) = x^3$, temos:

$$\begin{aligned}\frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} &= \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} \\ &= 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2.\end{aligned}$$

Agora, se calcularmos o limite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, teremos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 = 3x^2.$$

Ou seja, dada a função $f(x) = x^2$, o cálculo do limite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ resultou $2x$. Ou, para a função $f(x) = x^3$, resultou $3x^2$.

> O quociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ é chamado, também, de *quociente de diferença* ou *quociente de Newton*. O limite quando Δx tende a zero, de um quociente de diferença é a *taxa de variação instantânea* da função. Este limite define uma nova função, a qual indicamos por $f'(x)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ e denominados de *Derivada*.

A definição que segue, resume estas observações.

Definição 7 (Derivada)
Dada uma função f, a função f' definida por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

é chmada a *derivada* de f.

Observação 11

(i) Na definição subtende-se que o domínio da função derivada f' é o conjunto de todos os números x no domínio de f para os quais o limite exista. Assim $\mathrm{Dom}(f') \subseteq \mathrm{Dom}(f)$;

(ii) No cálculo deste limite, devemos tomar cuidado em tratar x como uma constante e Δx como a variável, tendendo a zero;

(iii) A notação f' é a *notação de Lagrange*. Também indicamos por $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, que é a *notação de Leibniz*. Assim, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

(iv) O processo de calcular a derivada f' de uma função (primitiva) f é chamado de *diferenciação*. Assim, o símbolo ("imcompleto") $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ é visto como uma instrução para obter a derivada do que lhe acompanha, como também o par de colchetes com a linha $[\,\cdot\,]'$ indica que devemos obter a derivada do que está dentro. Por exemplo,

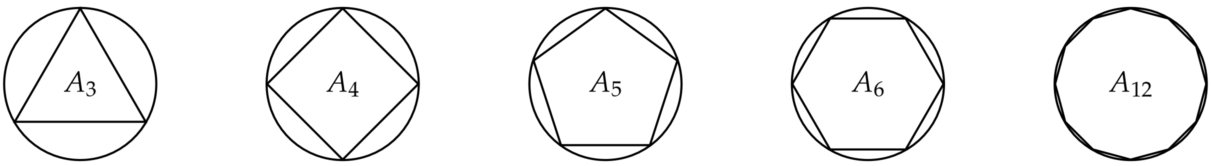
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^2] = [x^2]' = 2x \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^3] = [x^3]' = 3x^2.$$

O quadro que segue ilustra este processo:

PROCESSO DE DERIVAÇÃO		
f (Primitiva)	$\xrightarrow[\text{(Limite Especial)}]{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$	f' (Derivada)
EXEMPLO		
x^2	$\xrightarrow[\text{(Limite Especial)}]{}$	$2x$
x^3	$\xrightarrow[\text{(Limite Especial)}]{}$	$3x^2$

7 Limites no Infinito – ? incompleto

Exemplo 37 (Exaustão)
A ideia de uma "quantidade" aproximando-se de um valor "limite" pode ser vista quando se procura estabelecer a fórmula que representa a área de um círculo C de raio r. Estamos supondo aqui que conhecemos a área A_n de cada polígono regular de n lados, inscrito no círuclo, conforme ilustração abaixo.



À medida em que o número de lados cresce ilimitadamente ($n \to +\infty$) o que podemos afirmar sobre o valor A_n?

1°	A_n cresce ilimitadamente ?	ou equivalentemente	$A_n \to +\infty$?
2°	A_n tenderá a algum valor ?	ou equivalentemente	$A_n \to k$?

Notem que, à medida que aumentamos o valor de n, a área A_n do polígono inscrito ficará cada vez mais próxima da área do círculo, ou seja, como n representa o número de lados do polígono, $A_3, A_4, A_5, A_6, \ldots$, representam uma sucessão de valores que tendem ao valor da área do círculo C, $A(C) = A_{+\infty}$. Assim, afirmamos que fazendo n crescer ilimitadamente, a área do polígono tende a um *limite* e este é definido como a área do círculo. Em símbolos escrevemos:

$$A_{+\infty} = \lim_{n \to +\infty} A_n = A(C) = \pi r^2 .$$

Notem que $A_n < \pi r^2$, para todo e qualquer n.

Duas ideias, aqui, foram apresentadas: a de sucessão de infinitos valores e a de aproximação destes valores de um outro.

Exemplo 38 (Sequências)
Agora, vamos construir essa ideia trabalhando com o conjunto dos números reais. Analisemos os seguintes exemplos de sucessões numéricas:

(a) $\{a_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$;

(b) $\{b_n\} = \{-1, -2, -3, -4, -5, \ldots\}$;

(c) $\{c_n\} = \{0, 1, 0, 1, 0, 1 \ldots\}$;

(d) $\{d_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$.

Observe que, na sucessão (a) os termos tornam-se cada vez maiores **sem atingir um limite**; em (b), os termos da sucessão decrescem ilimitadamente **sem atingir um limite**; em (c), os termos estão oscilando, **não havendo um limite** e, em (d), os temos estão se aproximando de zero, ou seja, **zero é seu limite**. Assim, podemos dizer que existe limite apenas na sucessão do item (d).