Cálculo Diferencial I

— Prof. Adriano Cattai —

Apostila 00: Funções

(*Atualizada em 24 de julho de 2016*)

02

Nome: ______________________________ Data: ____/____/______

> "Não há ciência que fale das harmonias da natureza com mais clareza do que a matemática"
> (Paulo Carus)

Sumário

1 Apresentação

Agradeço por lerem estas notas de aula e por contribuirem na correção tipográfica e na apresentação das ideias básicas para introdução dos conteúdos que pretendemos estudar. Elas foram organizadas a partir dos livros indicados na bibiografia, direcionada aos alunos, das disciplinas de Cálculo (UNEB/UFBA), que precisam resgatar alguns conceitos básicos de Funções. Vale destacar:

✓ Esta apostila **não** substitui o livro e **jamais** deverá ser tratado como único texto para seus estudos;

✓ Esta apostila é nosso "ponto de partida" ou nossa orientação na sequência dos contéudos que são conversados em nossas "saborosas" aulas de Matemática;

✓ Prestem bem atenção com a notação utilizada. A matemática possui uma linguagem própria.

2 Relações

2.1 Par Ordenado e Produto Cartesiano

Definição 1
Dados dois conjuntos não vazios A e B, se $a \in A$ e $b \in B$, definimos o *par ordenado*, denotado por (a, b), em que o primeiro elemento é $a \in A$ e o segundo elemento é $b \in B$. O *produto cartesiano* de A por B é o conjunto de todos esses pares ordenados e será indicado por $A \times B$. Em símbolos escrevemos

$$A \times B = \{(x, y);\ x \in A \ \text{ e } \ y \in B\}.$$

Observação 1
Para as definições estabelecidas acima, temos:

(a) Dados (a, b) e (c, d) em $A \times B$, teremos $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = b \ \text{ e } \ c = d$. Assim, por exemplo, $(2, 9)$ e $(9, 2)$ são pares ordenados distintos;

(b) $A \times \varnothing = \varnothing$ e $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$;

(c) Quando $A = B$, o cartesiano $A \times B$ é o cartesiano $A \times A = A^2$. Assim, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$;

(d) Se $A \neq B$, então $A \times B \neq B \times A$, ou seja, o produto cartesiano de dois conjuntos não goza da propriedade comutativa;

(e) Se A e B são conjuntos finitos com k e m elementos, respectivamente, então $A \times B$ tem $k \cdot m$ elementos. Em outras palavras, se $\text{n}(A) = k$ e $\text{n}(B) = m$, então

$$\text{n}(A \times B) = \text{n}(A) \cdot \text{n}(B) = k \cdot m.$$

Tabmém usamos a notação $\#A$ para indicar a cardinalidade de A. Neste caso $\#A = k$;

(f) Se A ou B são conjuntos infinitos e nenhum deles for vazio, então $A \times B$ é um conjunto infinito.

Exemplo 1
Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$. Então:

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}; \\ B \times A &= \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}; \\ A^2 = A \times A &= \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}. \end{aligned}$$

Note que:

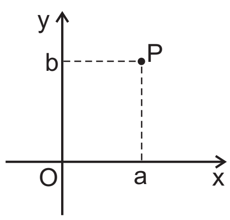
- ◇ $A \times B \neq B \times A$;
- ◇ $\#(A \times B) = \#A \cdot \#B = 3 \cdot 2 = 6$ e $\#(B \times A) = \#B \cdot \#A = 2 \cdot 3 = 6$;
- ◇ $\#A^2 = \#(A \times A) = 3 \cdot 3 = 9$.

Exemplo 2
Se $A = \mathbb{R}$ e $B = \{1\}$, então $A \times B = \mathbb{R} \times \{1\} = \{(x, 1); x \in \mathbb{R}\}$, ou seja, a reta horizontal $y = 1$.

2.1.1 Representação Gráfica

Seja π um plano e, nele consideremos dois eixos OX e OY perpendiculares em O. Um horizontal, que será chamada o *eixo das abscissas* (ou eixo$-x$), e um vertical, o *eixo das ordenadas* (ou eixo$-y$). Interpretamos cada uma dessas retas como cópias de uma reta real, de tal forma que as origens de cada uma dessas cópias correspondam ao ponto de interseção dos eixos. Os números reais positivos correspondem, na reta vertical, aos pontos da semi-reta superior, e na reta horizontal aos pontos da semi-reta à direita da origem. O *Plano Cartesiano* é o plano gerado por essas duas retas perpendiculares, ou seja, o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

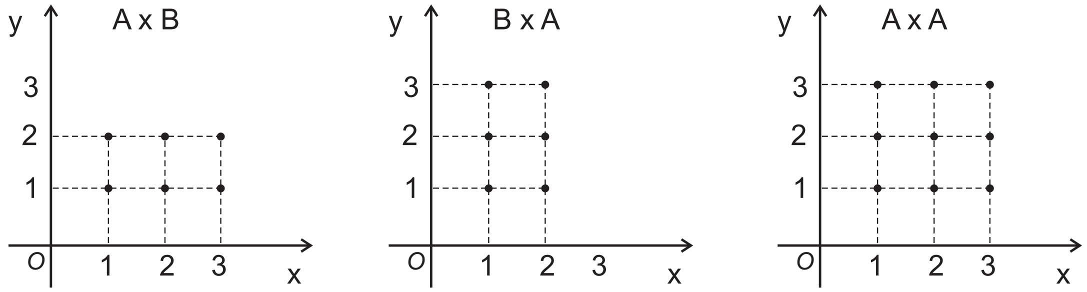
Dado um par ordenado (a, b), localizamos no eixo horizontal o ponto que corresponde ao número real a, e no eixo vertical o ponto que corresponde ao número real b. Conforme a figura ao lado, localizamos o ponto P de coordenadas a e b.



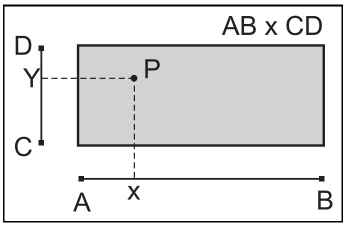
Exemplo 3
Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$. Então:

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2)\} \\ B \times A &= \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\} \\ A^2 = A \times A &= \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}. \end{aligned}$$

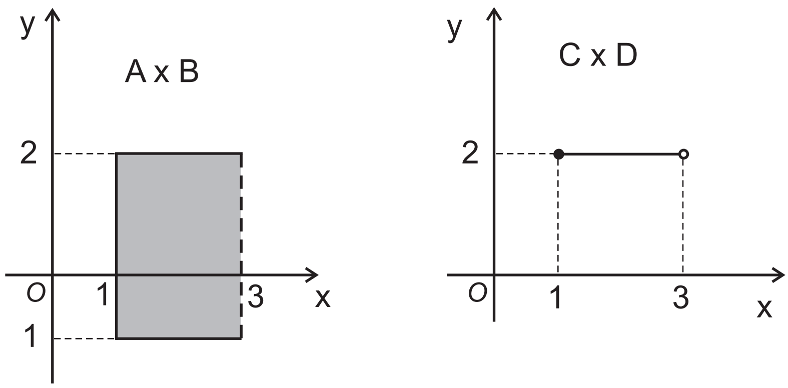
Suas representações gráficas são:



Exemplo 4
Sejam AB e CD segmentos de retas. O produto cartesiano $AB \times CD$ pode ser interpretado como um retângulo, na forma indicada pela figura abaixo. Tomando AB e CD perpendiculares e cada elemento $(x, y) \in AB \times CD$ é representado pelo ponto P, interseção das perpendiculares a AB e CD tiradas pelos pontos x e y, respectivamente.



Exemplo 5
Seguindo o mesmo raciocínio exemplo anterior, podemos interpretar o produto cartesiano entre dois intervalos e o produto cartesiano de um ponto por um intervalo. Para o primeiro caso, seja $A = [1, 3)$ e $B = [-1, 2]$, e para o segundo caso, seja $C = [1, 3)$ e $D = \{2\}$. Veja abaixo as representações gráficas, respectivamente, de $A \times B$ e $C \times D$.



2.2 Relação Binária

Definição 2
Uma relação (*binária*) de A em B é, por definição, um subconjunto qualquer do produto cartesiano $A \times B$. O conjunto A é chamado *conjunto de partida* e o conjunto B *conjunto de chegada* (ou contra-domínio) da relação. Se $A = B$, então uma relação de A em B se denominará, simplesmente, relação sobre A ou relação em A.

Se $\mathcal{R}$ é uma relação de A em B, isto é, $\mathcal{R} \subset A \times B$, indicamos que $(a, b) \in \mathcal{R}$, e escrevemos $a\mathcal{R}b$, isto quer dizer, que a está relacionado com b.

Definição 3

⋄ O *domínio* de $\mathcal{R}$, indicamos por $D(\mathcal{R})$, é o subconjunto

$$D(\mathcal{R}) = \{x \in A;\ \exists\, y \in B \ \text{ e } \ x\mathcal{R}y\},$$

em outras palavras, é o conjunto composto pelos elementos de A que se relacionam com elemento de contra-domínio B.

◇ A *imagem* de $\mathcal{R}$, indicamos por $\mathrm{Im}(\mathcal{R})$ é o subconjunto

$$\mathrm{Im}(\mathcal{R}) = \{y \in B;\ \exists\, x \in A \ \text{ e } \ x\mathcal{R}y\},$$

em outras palavras, é o conjunto composto pelos elementos de B que estão sendo relacionados com elementos do conjunto partida A.

Exemplo 6
Seja $A = \{2,3,4\}$ e $B = \{2,3,4,5,6\}$. Como $\mathrm{n}(A) = 3$ e $\mathrm{n}(B) = 5$, temos que o produto cartesiano $A \times B$ é um conjunto de 15 elementos, a saber:

$$A \times B = \{(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\}.$$

Assim, podemos exibir as seguintes relações:

(i) $\mathcal{R}_1 = \{(2,2);(3,3);(4,4)\} = \{(x,y) \in A \times B; y = x\}$;

(ii) $\mathcal{R}_2 = \{(2,4);(3,6)\} = \{(x,y) \in A \times B; y = 2x\}$;

(iii) $\mathcal{R}_3 = \{(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)\} = \{(x,y) \in A \times B; y > x\}$.

Observação 2
As relação $=, <, >, \leq$ e $\geq$ são exemplos importantes de relações.
Em $\mathbb{R}$ dizemos que $a < b$ se existe um $c > 0$ tal que $b = a + c$ e dizemos que $a \leq b$ se existe $c \geq 0$ tal que $b = a + c$. Assim, $3 < 8$, pois $5 > 0$ e $8 = 3 + 5$. Também, $-3 < -1$, pois $2 > 0$ e $-1 = -3 + 2$.

Observação 3
Sejam A e B conjuntos não vazio. Temos as seguintes relações são especiais:

(a) $\varnothing$ é uma relação de A em B, pois $\varnothing \subset A \times B$;

(b) $A \times B$ é uma realção de A em B, pois $A \times B \subset A \times B$;

(c) $Id_A = \{(a,a); a \in A\}$ é uma relação de A em A, chamada *identidade* em A;

(d) $Div_A = \{(a,b) \in A \times A; a \neq b\}$ é uma relação de A em A, chamada *diversidade* em A;

(e) Se $\mathcal{R}$ é uma relação de A em A, então $\mathcal{R}$ é uma *endorrelação*.

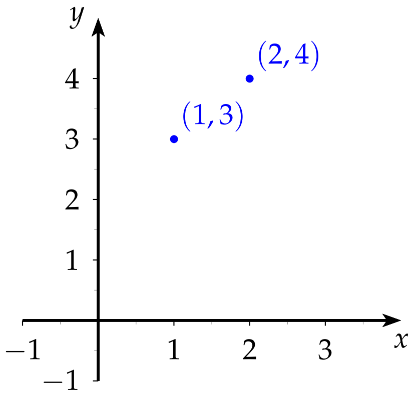
2.2.1 Representação Gráfica

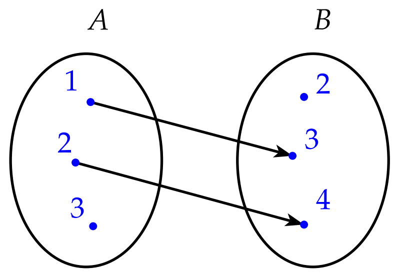
Podemos representar, graficamente, uma relação binária num Plano Cartesiano ou por um Diagrama de Flechas.

Por exemplo, se $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{2,3,4\}$, então

$$A \times B = \{(1,2);(1,3);(1,4);(2,2);(2,3);(2,4);(3,2);(3,3);(3,4)\}.$$

Sendo $\mathcal{R} = \{(1,3);(2,4)\}$, temos as seguintes representações gráficas:





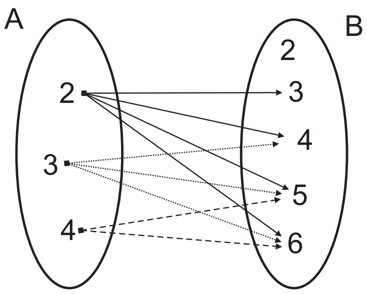
3 Função

Consideremos as seguintes ilustrações:

Ilustração 1. Seja $\mathcal{R}_1$ o conjunto de pares ordenados (x, y) de $A \times B$ tais que $y > x$, ou seja,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &= \{(x,y) \in A \times B;\ y > x\}\\ &= \{(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)\}.\end{aligned}$$

Desta forma, estabelecemos uma relação $\mathcal{R}_1$ de A em B. A figura mostra os pontos de A



sendo relacionados com os pontos de B sob a condição que somente há relação quando $y > x$.

$\diamond\ D(\mathcal{R}_1) = \{2,3,4\} = A$

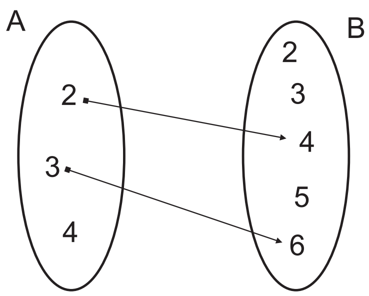
$\diamond\ \mathrm{Im}(\mathcal{R}_1) = \{3,4,5,6\} \subset B$

$\diamond\ x\mathcal{R}_1 y \Leftrightarrow y > x$

Ilustração 2. Seja $\mathcal{R}_2$ o conjunto de pares ordenados (x, y) de $A \times B$ tais que $y = 2x$, ou seja,

$$\mathcal{R}_2 = \{(x,y) \in A \times B;\ y = 2x\} = \{(2,4),(3,6)\}.$$

Desta forma, estabelecemos uma relação $\mathcal{R}_2$ de A em B. A figura mostra os pontos de A



sendo relacionados com os pontos de B sob a condição que somente há relação quando $y = 2x$.

$\diamond\ D(\mathcal{R}_2) = \{2,3\} \subset A$

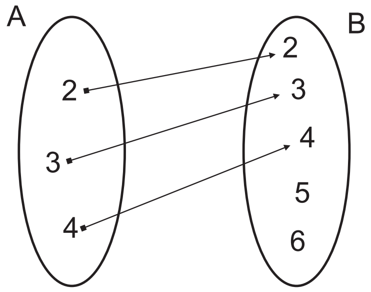
$\diamond\ \mathrm{Im}(\mathcal{R}_2) = \{4,6\} \subset B$

$\diamond\ x\mathcal{R}_2 y \Leftrightarrow y = 2x$

Ilustração 3. Seja $\mathcal{R}_3$ o conjunto de pares ordenados (x, y) de $A \times B$ tais que $y = x$, ou seja,

$$\mathcal{R}_2 = \{(x,y) \in A \times B;\ y = x\} = \{(2,2),(3,3),(4,4)\}.$$

Desta forma, estabelecemos uma relação $\mathcal{R}_3$ de A em B. A figura mostra os pontos de A



sendo relacionados com os pontos de B sob a condição que somente há relação quando $y = 2x$.

$\diamond$ $D(\mathcal{R}_3) = \{2, 3, 4\} = A$

$\diamond$ $\mathrm{Im}(\mathcal{R}_2) = \{2, 3, 4\} \subset B$

$\diamond$ $x\mathcal{R}_3 y \Leftrightarrow y = x$

Observação 4
Sobre as ilustrações acima, temos:

(a) Na primeira ilustração, todos os elementos de A são relacionados com elementos de B, no entanto, pelo menos um tem mais do que um correspondente em B, por exemplo o 2 está relacionado com 3 e com 4;

(b) Na segunda ilustração, o elemento $4 \in A$ não está se relacionando com algum elemento de B;

(c) Na terceira ilustração, todos os elementos de A estão se relacionando com um, e somente um, elemento de B.

Com base nesta última observação, veremos que somente a terceira ilustração satisfaz o conceito de função que estabeleceremos a seguir.

Definição 4
Uma *função* de A em B é uma relação que, a cada elemento $x \in A$, associa um único elemento $y \in B$. Em outras palavras:

$$f : A \to B \quad \text{é função} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in A,\ \exists!\, y \in B;\ y = f(x).$$

O conjunto A é chamado de *domínio* de f e que indicaremos por $D(f)$. O conjunto dos elementos, contido em B, que estão associados por f, é chamado de *conjunto imagem*, ou simplesmente, a *imagem* de f e que indicaremos por $\mathrm{Im}(f)$. O conjunto B é chamado de *contra-domínio* de f e que indicaremos por $CD(f)$.

Usaremos as seguintes notações:

(1) $f : A \to B$ para dizer que se trata da função real cujo domínio é o conjunto A;

(2) $x \mapsto f(x)$ para dizermos que a função f associa o número $x \in D(f)$ ao número $f(x)$;

(3) Se $C \subset A$, indicaremos por $f(C)$ o conjunto dos números $f(x)$ em que $x \in C$, que é chamado de imagem de C.

Para o estudo da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I estamos interessados no estudo de funções reais a uma variável, ou seja, A e B, acima especificados serão subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Exemplo 7
Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^2$. Ou seja, f é a função que a cada número real do intervalo $[-1, 1]$ associa ao quadrado desse número. $D(f) = [-1, 1]$, $\mathrm{Im}(f) = [0, 1]$ e $CD(f) = \mathbb{R}$.

Exemplo 8
Seja $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $d(x) = |x|$. Ou seja, para cada número real x, $d(x)$ é a distancia do ponto que representa o número x na reta real ao ponto que representa o 0 (zero).

Exemplo 9
Sejam x e y os lados de um terreno retangular de área 100 m^2. Como a área de um retângulo é o produto dos lado, temos que $xy = 100$. Assim podemos escrever um lado em função do outro, ou seja, $y = f(x) = \dfrac{100}{x}$.

Observação 5
Deve-se observar que uma função consta de três ingredientes: *domínio*, *contra-domínio* e a *lei de correspondência* $x \mapsto f(x)$. Mesmo quando dizemos, simplesmente, "*a função real* f", ficam subentendidos seu domínio A e seu contra-domínio B. Sem essas especificações, não existe a função.

Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Sendo assim, devemos ser capazes de, primeiramente, responder a seguinte pergunta

Qual é o seu domínio?

Para responder a esta pergunta, formulemos a seguinte:

qual é o maior subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *é um número real*?

Como o $0 \in \mathbb{R}$ não possui inverso multiplicativo, o domínio da função f é $\mathbb{R}^*$.

Usualmente, não sendo dado de forma explicita o domínio de uma função real de uma variável, definida por uma expressão algébrica (ou lei de correspondência), assumimos que o domínio é o maior subconjunto dos números reais para os quais a sua expressão faz sentido, isto é, os números com os quais podemos efetuar as operações indicadas na referida expressão.

Exemplo 10
Seja $f(x) = \sqrt{x-1}$ uma função. Assim, o domínio de f, são todos os números reais que satisfazem a desigualdade $x - 1 \geq 0$, logo $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 1\}$.

Exemplo 11
Seja $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+3x-4}$. Desta forma, $g(x)$ será um número real se $x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1) \neq 0$, ou seja, $x \neq -4$ e $x \neq 1$. Logo $D(g) = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq -4 \text{ e } x \neq 1\}$.

Exemplo 12
O domínio da função $h(x) = \dfrac{6}{\sqrt{x-3}}$ é o conjunto $\{x \in \mathbb{R};\ x - 3 > 0\} = \{x \in \mathbb{R};\ x > 3\}$.

Em muitos exemplos de funções $f : A \to B$, principalmente na Matemática Elementar, A e B são conjuntos numéricos e a regra $y = f(x)$ exprime o valor $f(x)$ por meio de uma fórmula que envolve x. Mas, em geral, não precisa ser assim. A natureza da regra que ensina como obter $f(x)$ quando é dado x inteiramente arbitrária, sendo sujeita apenas a duas condições:

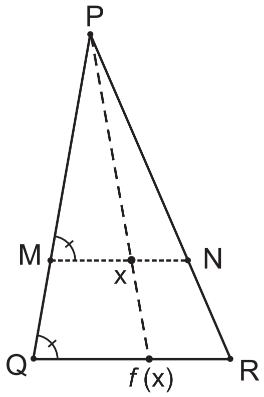
(i) Não deve haver exceções: A fim de que a função f tenha o conjunto A como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$, seja qual for $x \in A$ dado;

(ii) Não deve haver ambigüidades: A cada $x \in A$, a regra deve fazer corresponder um único $f(x)$ em B.

Vejamos dois exemplos para ilustrar essas exigências:

Exemplo 13
Indiquemos com A o conjunto dos números inteiros positivos e com B o conjunto de triângulos do plano. Para cada $x \in A$, ponhamos $f(x) = t$, caso t seja um triângulo cuja área seja representada pelo número x. Esta regra não define uma função $f : A \to B$ porque é ambígua: dada um número $x > 0$, existe uma infinidade de triângulos diferentes com área x.

Exemplo 14
Sejam $B = QR$ a base de um triângulo PQR e $A = MN$ um segmento paralelo a B, unindo os outros dois lados desse triângulo. Seja ainda P o vértice oposto à base B. Obtém-se uma correspondência $f : A \to B$ associando a cada $x \in A$ o ponto $f(x)$ onde a semi-reta Px intersecta a base B. Neste caso, f é uma função, veja figura ao lado.



3.1 Igualdade de Funções

Definição 5
Dizemos que duas funções f e g são iguais, e escrevemos $f = g$, se são definidas num mesmo domínio A e se, $f(x) = g(x)$, para cada $x \in A$.

Exemplo 15
As funções $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g(x) = |x|$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ são iguais, pois, $\sqrt{x^2} = |x|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Já as funções $f(x) = x$ e $g(x) = |x|$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ não são iguais, pois $x \neq |x|$, para $x < 0$.

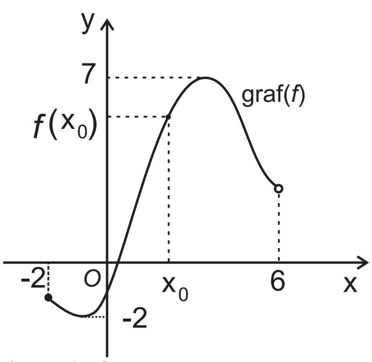
3.2 O Gráfico de uma Função Real

Definição 6
O gráfico de uma função real de uma variável é o conjunto de todos os pares ordenados da forma $(x, f(x))$, em que x pertence ao domínio da função e $f(x)$ é o número que está associado ao número x pela lei de correspondência de f. Em símbolos:

$$\text{graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in D(f) \quad \text{e} \quad y = f(x)\}.$$

Exemplo 16
Na figura ao lado, temos o gráfico de uma função real f cujo domínio é o intervalo $[-2, 6)$ e a imagem é o intervalo $[-2, 7]$.

Podemos, portanto, concluir que o gráfico de uma função real é um subconjunto do plano cartesiano. Esse fato nos sugere a seguinte pergunta:

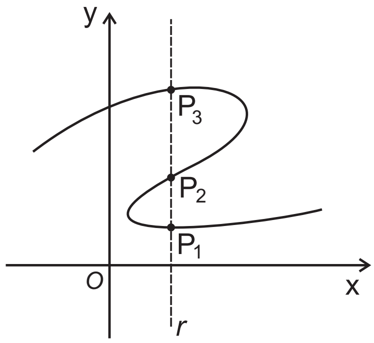


Quais subconjuntos do plano cartesiano podem ser gráficos de funções?

A resposta é simples, pois sabemos que a cada número real do domínio da função, corresponde um único número real da imagem. Logo, para cada número real do domínio, existe um único par ordenado no gráfico de f cuja abscissa é x. Resumidamente temos:

Uma reta vertical pode no máximo conter um único ponto do gráfico de uma função.

Na figura do Exemplo 16, vemos claramente que qualquer reta perpendicular ao eixo das abscissas, mais precisamente, ao domínio da função, a mesma intercepta o gráfico em um único ponto. O mesmo não acontece para o gráfico na figura ao lado.



Dada a reta r perpendicular ao eixo das abscissas, temos os pontos P_1, P_2 e P_3 no gráfico. Logo, um único ponto do domínio possui três correspondentes na imagem, contradizendo a definição de função e, portanto, não pode ser gráfico de uma função.

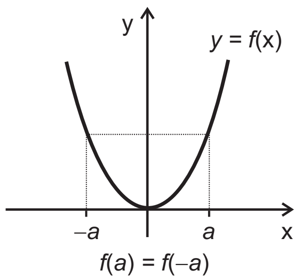
4 Tipologia de Funções

4.1 Função Par

Dizemos que $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ é uma função *par*, quando

$$f(-x) = f(x), \ \ \forall\, x \in (-a, a).$$

Exemplo 17
A função $f(x) = x^2$ é par, pois $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.



Geometricamente, uma função par é aquela que possui seu gráfico simétrico ao eixo OY.

4.2 Função Ímpar

Dizemos que $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ é uma função *ímpar*, quando $f(-x) = -f(x), \forall\, x \in (-a, a)$.

Exemplo 18
A função $g(x) = x^3$ é um exemplo de função ímpar, pois, $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$.

Observação 6
Uma função pode não satisfazer uma destas duas definições. De fato, seja a função definida por $h(x) = x^2 + x$. Como,

$$h(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq \left\{ \begin{array}{rl} h(x) & \\ -h(x) & = -(x^2 + x) = -x^2 - x \end{array} \right.$$

Temos que $h(x)$ não é nem par e nem ímpar.

Observação 7
Qualquer função com domínio simétrico em relação à origem pode ser escrita como soma de uma função par com uma função ímpar. Ou seja, se $f(x)$ é uma função cujo domìnio seja $(-a, a)$, então

$$f(x) = f_P(x) + f_I(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{f_P(x)} + \overbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}^{f_I(x)},$$

em que a função $f_P(x)$ é uma função par e $f_I(x)$ é uma função ímpar. De fato,

$$\begin{array}{llllll} f_P(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} & = & \frac{f(x) + f(-x)}{2} & = & f_P(x) & \Rightarrow \; f_P(x) \text{ é par} \\ f_I(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} & = & \frac{-(f(x) - f(-x))}{2} & = & -f_I(x) & \Rightarrow \; f_I(x) \text{ é ímpar} \end{array}$$

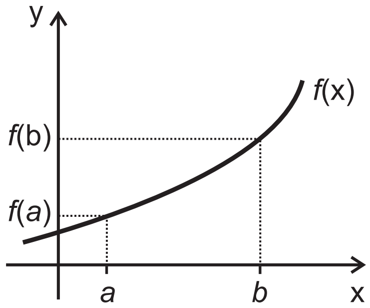
Se considerarmos a função $h(x) = x^2 + x$, exibida acima, então,

$$\begin{cases} f_P(x) & = & \frac{x^2 + x + (x^2 - x)}{2} = x^2 \text{ (par)} \\ f_I(x) & = & \frac{x^2 + x - (x^2 - x)}{2} = \frac{x - x^2 + x + x^2}{2} = x \text{ (ímpar),} \end{cases}$$

ou seja, $h(x) = f_P(x) + f_I(x)$.

4.3 Função Crescente

Dizemos que uma função f é *crescente* se para todo $a, b \in \text{Dom}(f)$, com $a < b$, tivermos $f(a) < f(b)$.

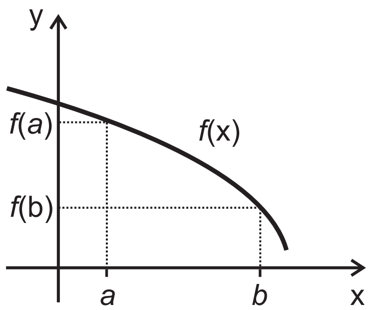


$$f \text{ é crescente } \Leftrightarrow \begin{cases} a < b \\ \Downarrow \\ f(a) < f(b) \end{cases}$$

Ou seja, valores maiores possuem imagens maiores.

4.4 Função Decrescente

Dizemos que uma função f é *decrescente* se para todo $a, b \in \text{Dom}(f)$, com $a < b$, tivermos $f(a) > f(b)$.



$$f \text{ é decrescente } \Leftrightarrow \begin{cases} a < b \\ \Downarrow \\ f(a) > f(b) \end{cases}$$

Ou seja, valores maiores possuem imagens menores.

4.5 Função Sobrejetora

Uma função é *sobrejetora* quando todo o contradomínio possui um elemento correspondente em seu domínio, isto é, o conjunto imagem e o contradomínio são coincidentes. Em símbolos, se $f : A \to B$, então:

$$\forall\, y \in B, \exists\, x \in A;\ y = f(x).$$

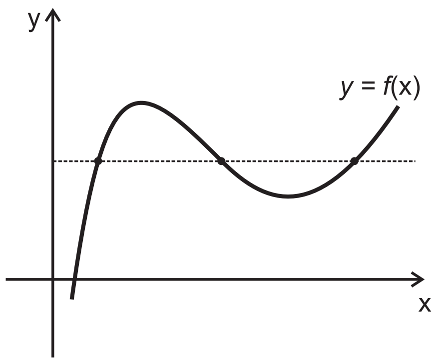
4.6 Função Injetora

Uma função $f : A \to B$ é *injetora* se, e somente se, elementos distintos no domínio possuem, como imagem, elementos distintos no contradomínio. Em símbolos:

$$x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2, \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Observação 8
Uma outra maneira de exibir esta mesma condição é a através da sua contra-positiva, ou seja,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$



Esta expressão afirma que cada elemento y da imagem da função f provém de um único elemento x do seu domínio. Uma maneira visual de interpretar este fato é pelo chamado teste da linha horizontal. Se a linha interceptar o gráfico da função em mais de um ponto, então existem pontos distintos no domínio tal que suas imagens são iguais.

4.7 Função Bijetora

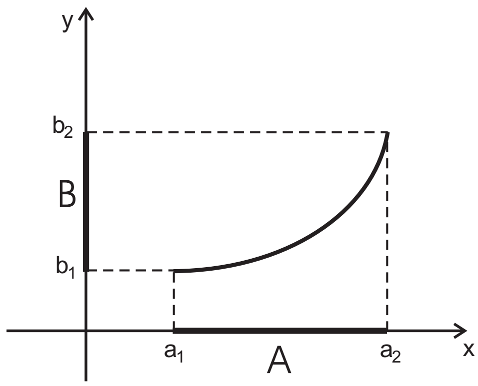
Uma função é *bijetora* se é, simultaneamente, injetora e sobrejetora. Quando f é bijetora, dizemos também que ela é uma bijeção.

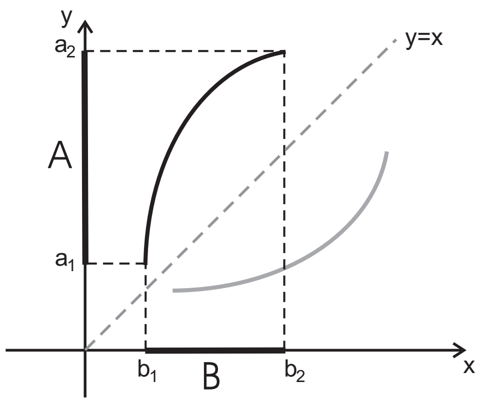
4.8 Função Inversa

Este é um conceito aplicável somente às funções bijetotas. Assim, se $f : A \to B$ for uma função bijetora, podemos definir uma função $g : B \to A$ tal que $x = g(y)$. A função g definida desta maneira é a função inversa de f, a qual denotamos por f^{-1}. Equivalentemente, a função f^{-1} é a função inversa de f se, e somente se,

$$f(x) = y \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(y) = x, \forall\, x \in A, \forall\, y \in B.$$

Geometricamente, se f tiver uma inversa, então os gráficos de $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$ são reflexões um do outro em relação a reta $y = x$.

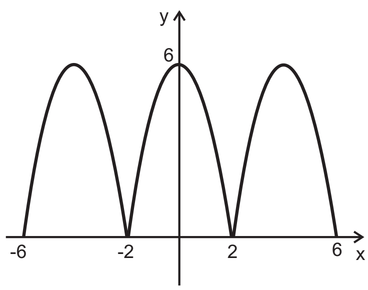




4.9 Função Periódica

Dizemos que uma função f é *periódica* se existe um número real $p \neq 0$ tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo $x \in \text{Dom}(f)$. O menor número p que satisfaz $f(x+p) = f(x)$ é chmado de *período* da função f. O gráfico de uma função periódica se repete a cada intervalo de comprimento $|p|$.

As funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ são exemplos de funções periódicas, ambas possuem período 2π.
A figura ao lado ilustra o gráfico de uma função periódica de período 4.



5 Funções elementares

5.1 A Função Afim

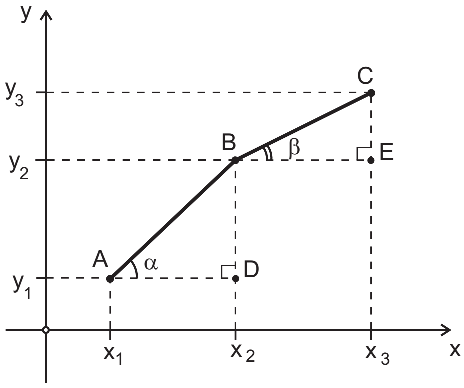
Definição 7
Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é denominada *afim* quando é definida por $f(x) = ax + b$, em que $a \neq 0$. a é chamado de *coeficiente angular* e b é chamado de *coeficiente linear*.

5.1.1 O Gráfico de uma Função Afim

Vamos mostrar que o gráfico da função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta. Suponha, inicialmente, que o gráfico não seja uma reta, ou seja, existem três pontos A, B e C distintos dois a dois, do gráfico de f, que não estão alinhados, conforme figura.

Sejam (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3), respectivamente, as coordenadas cartesianas destes pontos. Nestas condições, temos

$$\begin{cases} y_1 &= a \cdot x_1 + b \\ y_2 &= a \cdot x_2 + b \\ y_3 &= a \cdot x_3 + b \end{cases}$$



Subtraindo-se, membro a membro, obtemos:

$$\begin{cases} y_3 - y_2 &= a(x_3 - x_2) \\ y_2 - y_1 &= a(x_3 - x_2) \end{cases} \Rightarrow \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a.$$

Observe que

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} = \operatorname{tg}\beta \text{ e } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \operatorname{tg}\alpha.$$

e, então $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$, ou seja, devemos ter $\alpha = \beta$ e, portanto, os pontos A, B e C estão necessariamente alinhados.

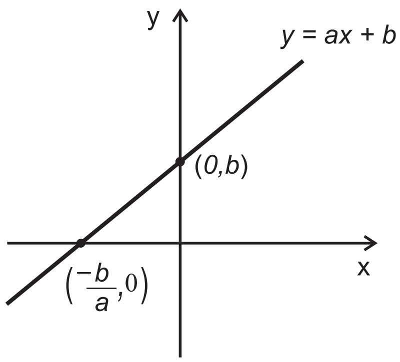
Como o gráfico da função afim é uma reta seu esboço é feito, facilmente, quando são conhecidos as coordenadas $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ de dois pontos. Naturalmente, podemos enumerar diversos valores x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_n e suas respectivas imagens. No entanto, os dois que se fazem notáveis são os pontos de interseção com os eixos coordenados, conforme figura a seguir:

◇ Interseção com o eixo das abscissas ($y = 0$):

$$y = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

◇ Interseção com o eixo das ordenadas ($x = 0$):

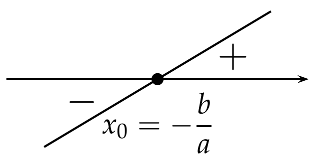
$$x = 0 \Leftrightarrow y = a \cdot 0 + b \Leftrightarrow y = b.$$



5.1.2 O Estudo do Sinal de uma Função Afim

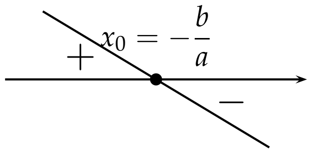
Para fazermos o estudo do sinal de uma função afim é suficiente determinarmos a sua raiz $\left(x_0 = -\dfrac{b}{a}\right)$, e observarmos se o sinal do coeficiente angular é positivo ou negativo.

$a > 0$



$$\begin{array}{lcl} f(x) > 0 & \Leftrightarrow & x > x_0 \\ f(x) = 0 & \Leftrightarrow & x = x_0 \\ f(x) < 0 & \Leftrightarrow & x < x_0 \end{array}$$

$a < 0$



$$\begin{array}{lcl} f(x) > 0 & \Leftrightarrow & x < x_0 \\ f(x) = 0 & \Leftrightarrow & x = x_0 \\ f(x) < 0 & \Leftrightarrow & x > x_0 \end{array}$$

5.2 A Função Quadrática

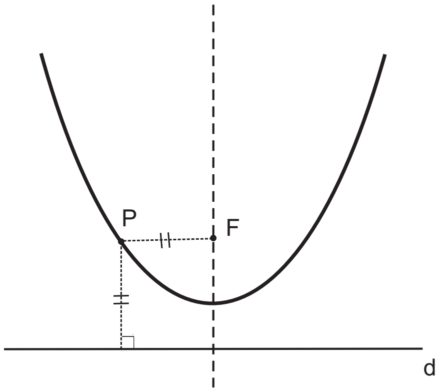
Definição 8
Chamamos função *quadrática* à relação definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

em que $a \neq 0$.

5.2.1 Representação Gráfica

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Este fato é provado em seu curso de Geometria Analítica, onde a Parábola é definida da seguinte forma:



Considere, no plano, uma reta d e um ponto F fora dela. Uma parábola é precisamente o conjunto dos pontos no plano que são eqüidistantes do ponto F e da reta d. O ponto F e a reta d são, respectivamente, o *foco* e a *diretriz* da parábola. A reta perpendicular a diretriz, que passa pelo foco, chamamos de *Eixo da parábola*.

$$P \in \text{ Parábola } \Leftrightarrow \mathrm{d}ist(P,d) = \mathrm{d}ist(P,F)$$

5.3 As Raízes de uma Função Quadrática

Considere o trinômio $ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$. Podemos escrevê-lo da seguinte forma:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Note que as duas primeiras parcelas dentro dos parênteses são as mesmas que obtemos quando desenvolvemos o quadrado do seguinte binômio

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Completando o quadrado, podemos escrever:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right),$$

ou ainda,

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}\right).$$

Esta maneira de escrever o trinômio do segundo grau, chamada *forma canônica*, tem algumas conseqüências. Primeiro, ela conduz imediatamente à fórmula que nos dá as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Vamos justificar isso.

Supondo $a \neq 0$, temos as seguintes equivalências:

$$
\begin{align}
ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}\right) &= 0 \tag{1}\\
\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} &= 0 \tag{2}\\
\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} \tag{3}\\
\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{4}\\
\Leftrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{5}\\
\Leftrightarrow \quad x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{6}
\end{align}
$$

Observe que a passagem da linha (4) para a linha (5) só pode ser feita quando o discriminante

$$\Delta := b^2 - 4ac$$

é maior do que ou igual a zero ($\Delta \geq 0$). No caso em que o discriminante é negativo ($\Delta < 0$), a equivalência entre as linhas (4) e (5) não existe, uma vez que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é não negativo e, portanto, a equação dada não possui solução real.

Da fórmula (6) resulta imediatamente que, se o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ é positivo, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais e distintas. São elas:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

com $x_1 > x_2$, cuja soma é $s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e cujo produto é $p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Justificamos a soma e o produto da seguinte forma:

Soma:

$$
\begin{aligned}
s &= x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\\
&= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}
\end{aligned}
$$

Produto:

$$
\begin{aligned}
p &= x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
&= \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\cdot\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2} = \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} \\
&= \frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}
\end{aligned}
$$

Quando $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, a equação dada possui uma única raiz, chamada de raiz dupla, igual a $-\frac{b}{2a}$, pois,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

Exemplo 19

Em cada item, vamos obter, caso tenha, as raízes das equações dadas.

(a) $x^2 + 2x - 3 = 0$

Solução: Calculando primeiramente o discriminante Δ. Para $a = 1$, $b = 2$ e $c = -3$, temos

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16.$$

Como $\Delta = 16 > 0$, da fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, obtemos:

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\cdot 1} = \frac{-2+4}{2} = 1 \text{ e } x_2 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\cdot 1} = \frac{-2-4}{2} = -3.$$

Outro procedimento para achar essas raízes, é descobrir dois número, x_1 e x_2, tais que a soma $s = x_1 + x_2$ seja igual a $-\frac{b}{a} = -2$ e o produto $p = x_1 \cdot x_2$ seja $\frac{c}{a} = -3$, ou seja, queremos dois números que sua soma seja -2 e o produto entre eles seja -3. Claramente só podemos ter $x_1 = 1$ e $x_2 = -3$.

(b) $x^2 - 6x + 9 = 0$

Solução: Analogamente, obteremos primeiro o discriminante Δ. Para $a = 1$, $b = -6$ e $c = 9$, temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0.$$

Como $\Delta = 0$, teremos uma única raiz, a raiz dupla, que é:

$$x_1 = x_2 = \frac{-(-6)+\sqrt{0}}{2\cdot 1} = \frac{6+0}{2} = 3.$$

(c) $x^2 + x + 1 = 0$

Solução: Como $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$, concluímos que a equação não possui raiz real.

5.3.1 Concavidade da Parábola

Considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e suponha $a > 0$. Escrevendo o trinômio na forma canônica, temos:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}\right].$$

Note que no interior dos colchetes, há uma adição em que a primeira parcela depende de x e é sempre maior do que ou igual a zero e a segunda é constante. Nessas condições, observamos que o menor valor que a soma atinge é quando

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Segue que, $x = -\frac{b}{2a}$. Neste ponto, $f(x)$ assume seu valor mínimo. Portanto, quando $a > 0$, o menor valor assumido por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Neste caso, dizemos que a parábola têm concavidade voltada para cima.

Analogamente, se $a < 0$, o valor $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ é o maior dos números $f(x)$, para qualquer x real, e, neste caso, dizemos que a parábola têm concavidade voltada para baixo.

Resumimos essas observações como segue:

1. $a > 0 \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$ assume mínimo em $x = -\frac{b}{2a}$ e seu valor é $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ e concavidade voltada para cima;

2. $a < 0 \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$ assume máximo em $x = -\frac{b}{2a}$ e seu valor é $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ e concavidade voltada para baixo.

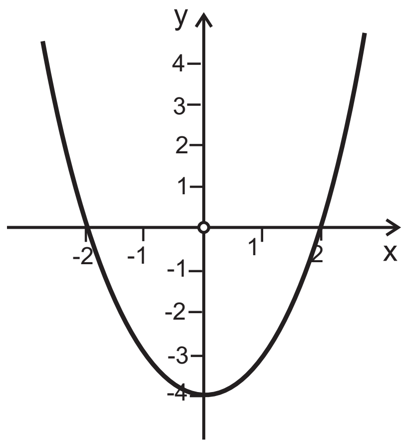
5.3.2 Sinal de uma Função Quadrática

Estudar o sinal de uma função quadrática, basicamente, significa determinar o conjunto de valores de seu domínio para os quais a função assume valor positivo, negativo ou nulo. No parágrafo acerca de zeros ou raízes de uma função, examinamos parte desta questão. Restam, portanto, os dois outros casos. Isto, conforme veremos, resume-se a observar a concavidade da parábola que a representa.

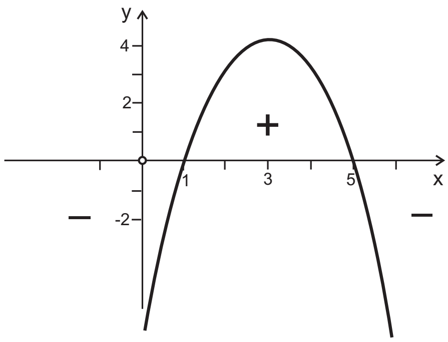
Considere a função $f(x) = x^2 - 4$ cujo gráfico está exibido ao lado.

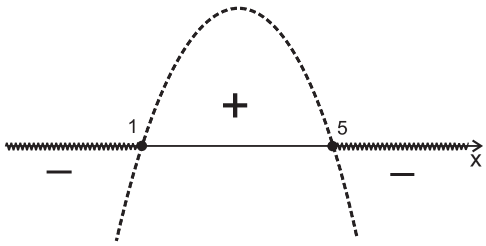
Note, em primeiro lugar, que sua concavidade é voltada para cima e, portanto, para valores de x situados entre as duas raízes, o valor da função é negativo, sendo positivo nos demais intervalos.

Esta breve observação é a base da resolução de inequações do 2° grau, conforme veremos abaixo:



Seja a inequação $-x^2 + 6x - 5 \leq 0$. O gráfico da função $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ pode ser visto a seguir.





Note as raízes desta função, bem como os intervalos onde ela assume valor negativo. Isto nos fornece o seguinte conjunto solução para a inequação:

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 1 \vee x \geq 5\}$$

5.4 A Função Exponencial

5.4.1 Potências

Definição 9
Dados dois números, $a \in \mathbb{R}$ e $n \neq 0$ um número natural. Definimos a^n como o produto

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}.$$

Propriedades das Potências Considere $a \in \mathbb{R}$ e $n, m \in \mathbb{N}$. Então:

1. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n, m + n \neq 0.$
2. $a^{m \cdot n} = (a^m)^n = (a^n)^m, m \cdot n \neq 0.$
3. Se $m < n$, então $a^m < a^n$, desde que $a > 1$.
4. $a^0 = 1, a \neq 0.$

5. $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$, $a \neq 0$.

6. $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

5.4.2 A Função Exponencial

Ela aparece naturalmente na modelagem de problemas de crescimento e decrescimento de populações, em Matemática Financeira e outros temas que encontram larga aplicação em Medicina, Engenharia, etc.

Definição 10
Chamamos *função exponencial* à função definida por

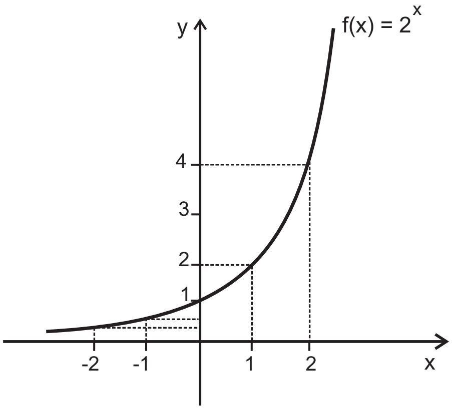
$$f(x) = a^x$$

onde $a > 0$, e $a \neq 1$.

Representação Gráfica

Exemplo 20
Considere a função $f(x) = 2^x$. Para esboçar o seu gráfico, observe os dados da tabela abaixo.

x	$f(x) = 2^x$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$



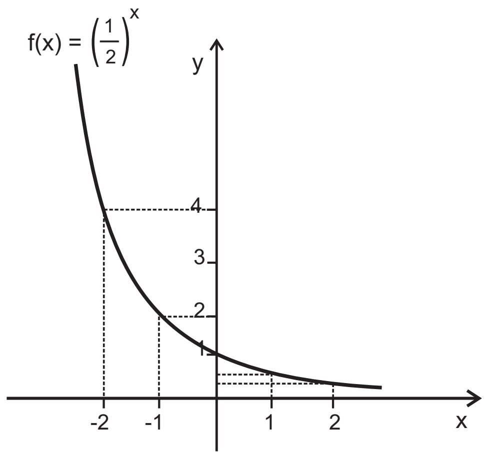
Podemos fazer as seguintes observações:

(I) Para valores negativos de x, o gráfico da função se aproxima indefinidamente do eixo $0x$, e nunca o toca.

(II) Para valores positivos de x, a função assume valores progressivamente maiores, isto é, trata-se duma função crescente.

Exemplo 21
Vejamos um outro exemplo, $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

x	$f(x) = 2^x$
-2	$\frac{1}{2}^{-2} = 4$
-1	$\frac{1}{2}^{-1} = 2$
0	$\frac{1}{2}^{0} = 1$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$



Note que agora temos uma função decrescente.

Observação 9
Dada a função exponencial $f(x) = a^x$, temos:

- ⋄ f é crescente se $a > 1$;
- ⋄ f é decrescente se $0 < a < 1$.

5.5 A Função Logarítmica

Definição 11
Dados dois números reais a e b, com $a, b > 0, a \neq 1$, definimos o *logaritmo* de b *na base* a como o número x tal que $a^x = b$, e o representamos por

$$x = \log_b a.$$

O número b é chamado a base do logaritmo, enquanto o número a é o logaritmando. Assim, segundo esta definição, temos que: $\log_2 8 = 3$, pois, $2^3 = 8$ e $\log_3 1 = 0$, pois, $3^0 = 1$.

Desta definição, e do que sabemos sobre potências, decorrem as seguintes propriedades:

Propriedades

P1. Se $x = \log_a a^y$, então $a^x = a^y$, donde $x = y$.
P2. Se $a \in \mathbb{R}$, então $\log_a 1 = 0$.
P3. Se $x = a^{\log_a b}$, então $x = b$.
P4. Logaritmo do produto: $\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$.
P5. Logaritmo do quociente: $\log_a \left(\dfrac{m}{n}\right) = \log_a n$.
P6. Logaritmo de potência: $\log_a m^p = p \cdot \log_a m$.
P7. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$
P8. $\log_{a^m} n = \dfrac{1}{m} \log_a n$
P9. Mudança de base: $\log_m n = \dfrac{\log_a n}{\log_a m}$

5.5.1 A Função Logarítmica

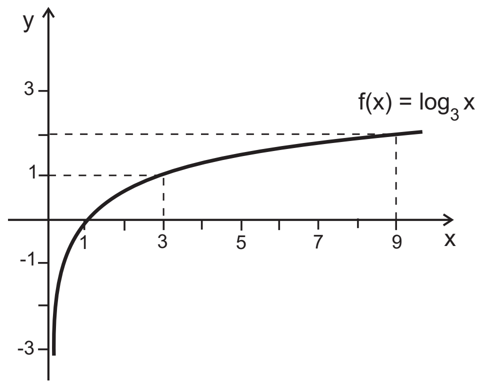
Definição 12
Definimos função logarítmica como a função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \log_a x,\ 1 \neq a > 0.$$

5.5.2 Gráfico da Função Logarítmica

Exemplo 22
Seja a função $f(x) = \log_3 x$. Como no capítulo precedente, observe que colocando-se os dados obtidos da tabela, com valores de x e $\log_3 x$, num sistema de coordenadas cartesianas, podemos esboçar o gráfico de $f(x)$.

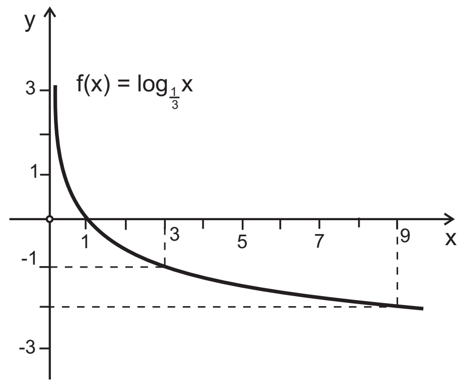
x	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$f(x) = \log_3 x$	-1	0	1	2



Observe que o gráfico desta função não intersecta o eixo das ordenadas; isto se traduz dizendo-se que a função não está definida para $x = 0$, e é compatível com a nossa definição.

Exemplo 23
Considere a função $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$. Tabelando-se os valores, podemos obter o gráfico ao lado:

x	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$	1	0	-1	-2



Observação 10
Numa função logarítmica $f(x) = \log_a x$, temos:

$\diamond$ f é crescente se $a > 1$; $\diamond$ f é decrescente se $0 < a < 1$.

5.6 As Funções Trigonométricas

A presença das funções periódicas nas nossas vidas é percebida quando, por exemplo, observamos um eletrocardiograma, o lançamento de uma pedra no lago e sinais de ondas de rádio, etc. Estas funções geralmente possuem em suas expressões as funções:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x), \ \ f(x) = \cos(x), \ \ f(x) = \operatorname{tg}(x),$$

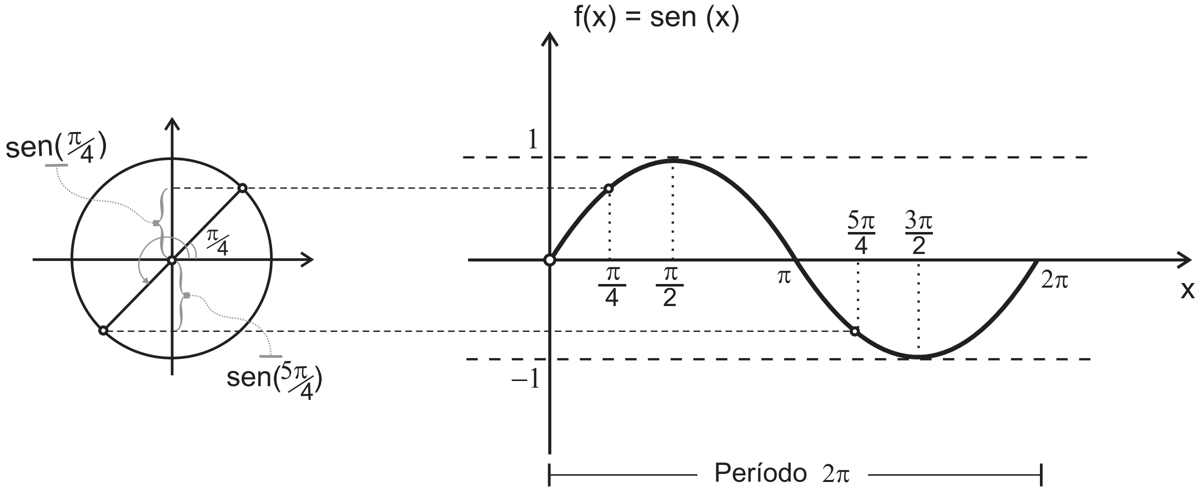
que definem, respectivamente, as funções seno, cosseno e tangente.

5.6.1 A Função Seno

Consideremos, inicialmente, a função seno, $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Atribuindo-se valores 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{4}$ e 2π para x, temos a tabela de pontos:

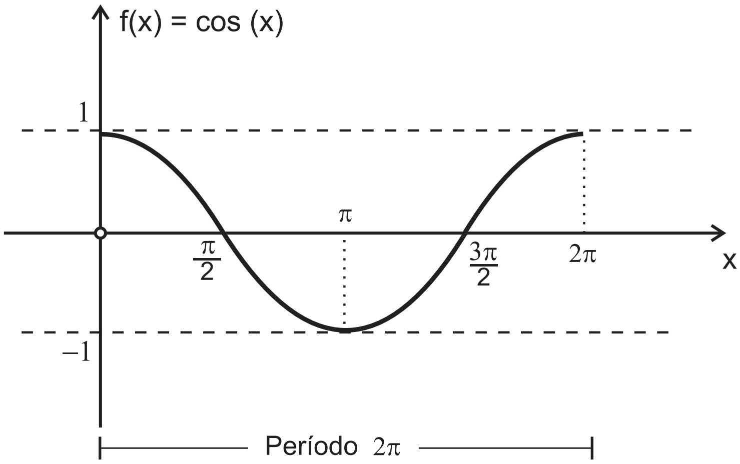
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$	2π
$f(x) = \operatorname{sen}(x)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	0	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

O seu gráfico, para valores restritos a esse intervalo é:

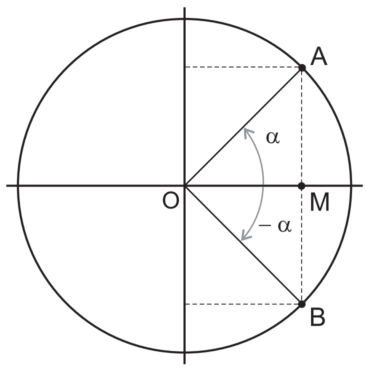


5.6.2 A Função Cosseno

Fazendo o mesmo para a função cosseno, obtemos seu gráfico:



Observação 11 (Paridade das funções seno e cosseno)
Considere um ângulo α com extremidade no primeiro quadrante. Naturalmente, temos que o ângulo $-\alpha$ está localizado no quarto quadrante, conforme ilustração abaixo.



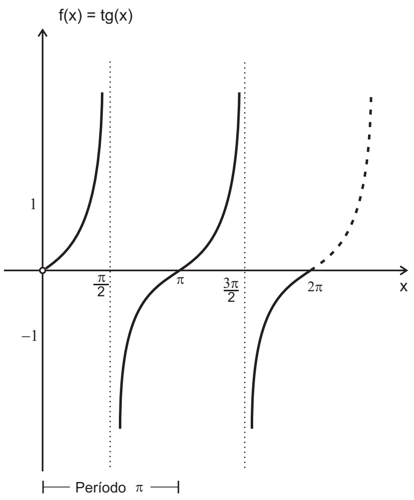
Como os triângulos ΔAOM e ΔBOM são congruentes, temos que:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha) = y_A = -y_B = -\operatorname{sen}(-\alpha) \\ \cos(\alpha) = x_A = x_B = \cos(-\alpha) \end{cases}$$

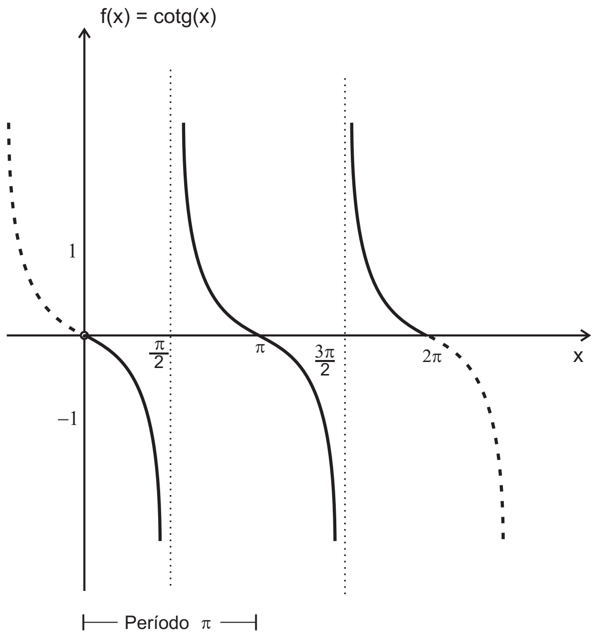
Portanto, a função seno é uma função ímpar, enquanto que a função cosseno é uma função par.

5.6.3 Outras Funções Trigonométricas

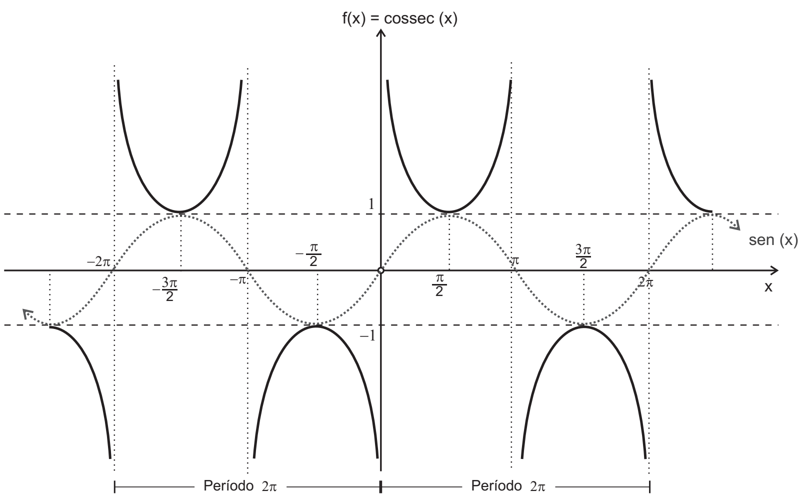
As funções seno e cosseno são, dentre as funções trigonométricas, as mais elementares no seguinte sentido: todas as demais derivam delas a sua definição. Assim, definimos abaixo as funções: tangente, cotangente, secante e cossecante, representando, em seguida, o gráfico correspondente.



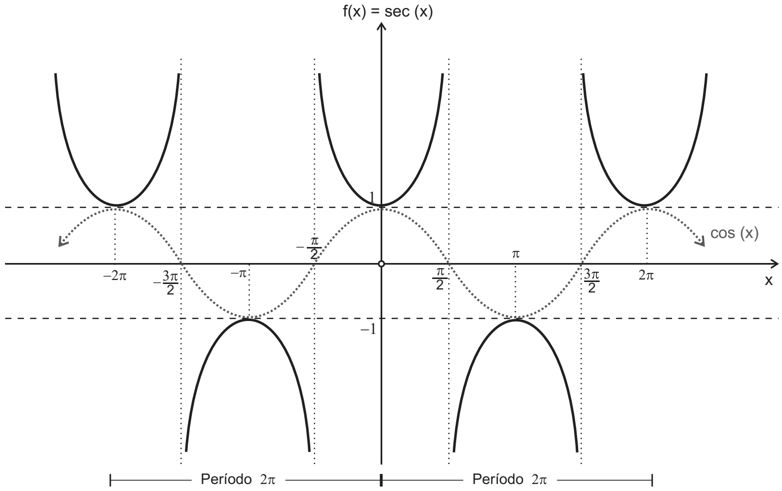
$$f(x) = \text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$$



$$f(x) = \text{cotg}(x) = \frac{1}{\text{tg}(x)} = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$$



$$f(x) = \text{cossec}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$$



$$f(x) = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Observação 12 (Paridade das outras funções trigonométricas)
Da paridade das funções seno e cosseno, deduziremos a paridade das outras funções trigonométricas.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(-x) &= \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = -\operatorname{tg}(x) && \Rightarrow \ f(x) = \operatorname{tg}(x) \text{ é ímpar}\\
\operatorname{cotg}(-x) &= \frac{\cos(-x)}{\operatorname{sen}(-x)} = \frac{\cos(x)}{-\operatorname{sen}(x)} = -\operatorname{cotg}(x) && \Rightarrow \ f(x) = \operatorname{cotg}(x) \text{ é ímpar}\\
\operatorname{cossec}(-x) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(-x)} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(x)} = -\operatorname{cossec}(x) && \Rightarrow \ f(x) = \operatorname{cossec}(x) \text{ é ímpar}\\
\sec(-x) &= \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \sec(x) && \Rightarrow \ f(x) = \sec(x) \text{é par}
\end{aligned}$$

5.7 Outras Funções Elementares

5.7.1 Função Potência

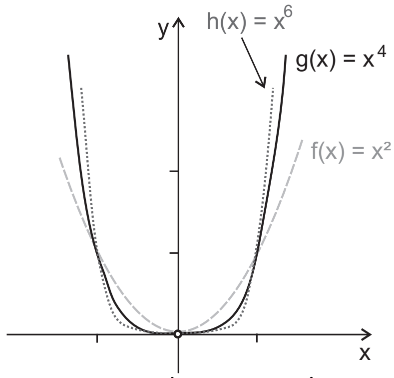
Para cada natural n, consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que, para cada $x \in \mathbb{R}$ associa ao número real x^n. Dividiremos em dois casos, conforme n seja par ou ímpar. Vejamos cada um deles.

(1) $f(x) = x^n$, n é um natural par. Para construção de gráficos de funções desta natureza, basta notar que:

$$\begin{cases} x^6 < x^4 < x^2 & \Leftrightarrow & -1 < x < 1 \\ x^6 = x^4 = x^2 & \Leftrightarrow & x = \pm 1 \\ x^6 > x^4 > x^2 & \Leftrightarrow & x < -1 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

A figura ao lado apresenta, num mesmo sistema de coordenadas, os gráficos das funções:

$$f(x) = x^2, \;\; g(x) = x^4, \;\; h(x) = x^6.$$



Observe que, neste caso, as funções não apresentam imagens negativas, ou seja, seu gráfico encontra-se todo acima do eixo-x.

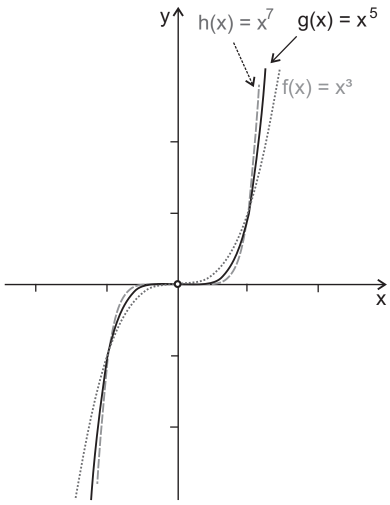
(2) $f(x) = x^n$, n é um natural ímpar. A análise é análoga à construção anterior. Ou seja:

$$\begin{cases} x^7 < x^5 < x^3 & \Leftrightarrow & 0 < x < 1 \text{ ou } x < -1 \\ x^7 = x^5 = x^3 & \Leftrightarrow & x = \pm 1 \\ x^7 > x^5 > x^3 & \Leftrightarrow & -1 < x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

A figura ao lado apresenta, num mesmo sistema de coordenadas, os gráficos das funções:

$$f(x) = x^3, g(x) = x^5 \text{ e } h(x) = x^7.$$

Observe que, neste caso, as imagens das funções podem assumir valores negativos, fato que não é possível quando a potência tem expoente par.



5.7.2 Funções Definidas por mais de uma Sentença

Dizemos que as funções definidas por mais de uma sentença, são as funções da forma:

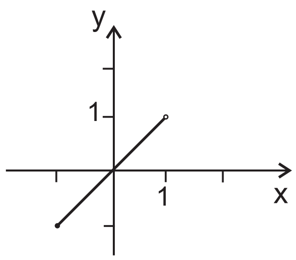
$$f(x) = \begin{cases} S_1(x), & C_1 \\ S_2(x), & C_2 \\ \quad\vdots & \\ S_n(x), & C_n \end{cases}$$

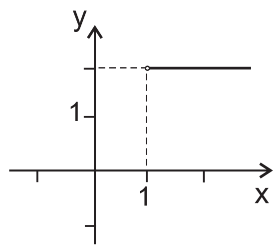
em que cada $S_i(x)$ é uma sentença sujeita à condição C_i, ou seja, cada condição será o domínio para a respectiva sentença. Assim,

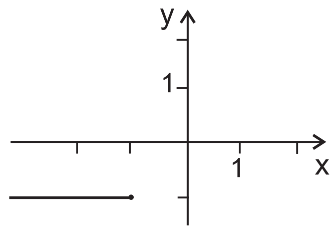
$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \\ x, & -1 \leq x < 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

é um exemplo de uma função definida por três sentenças em que $S_1(x) = -1$, $S_2(x) = x$ e $S_3(x) = 2$, e suas respectivas condições: $C_1 : x < -1$, $C_2 : -1 \leq x < 1$ e $C_3 : x \geq 1$.

Seu gráfico é facilmente construída, se olharmos para ela como sendo três funções distintas, que serão as sentenças, com seus respectivos domínios, as condições. Veja ilustração abaixo:



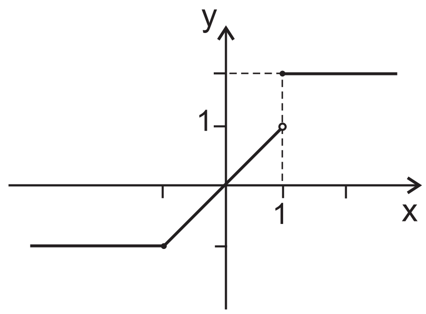




Unindo os gráficos acima, num mesmo sistema de coordenadas, temos o gráfico da função:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \\ x, & -1 \leq x < 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

conforme ilustra a figura ao lado



5.7.3 Função Modular

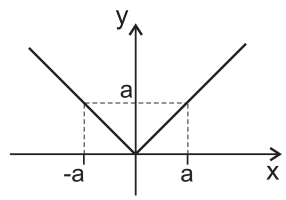
A função módulo, $f(x) = |x|$, é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa um único número real $|x|$. Da definição de módulo (ou valor absoluto) de um número real, escrevemos:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Gráfico: Note que a função modular é uma função definida por sentenças. Assim, seu gráfico é obtido a partir da construção das funções

$$S_1(x) = x, \text{ se } x \geq 0 \;\text{ e }\; S_2(x) = -x, \text{ se } x < 0$$

como a figura ao lado.



Exemplo 24

Consideremos a seguinte função $f(x) = |x^2 - 4|$. Pela definição de módulo, dada acima, escrevemos:

$$f(x) = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se} \quad x^2 - 4 \geq 0 \\ -(x^2 - 4), & \text{se} \quad x^2 - 4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se} \quad x^2 \geq 4 \\ -x^2 + 4, & \text{se} \quad x^2 < 4 \end{cases}$$

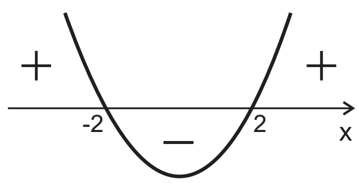
Para construirmos o gráfico desta função, é suficiente que construamos o gráfico das funções $S_1(x) = x^2 - 4$ e $S_2(x) = -x^2 + 4$, sujeitas às condições $C_1 : x^2 \geq 4$ e $C_2 : x^2 < 4$, respectivamente. Assim, será preciso obter os intervalos em x para essas duas condições, ou seja, a solução destas inequações serão os domínios de cada sentença.

Como solução para as inequações

$$C_1 : x^2 - 4 \geq 0 \text{ e } C_2 : x^2 - 4 < 0$$

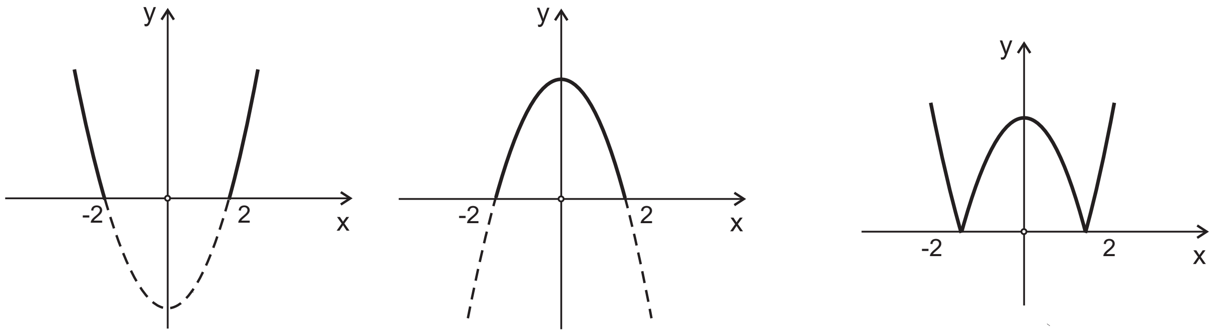
temos, respectivamente,

$$x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2 \quad \text{e} \quad -2 < x < 2.$$



Desta forma, reescrevemos $f(x) = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se} \quad x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2 \\ -x^2 + 4, & \text{se} \quad -2 < x < 2 \end{cases}$

Segue o gráfico abaixo



$S_1(x) = x^2 - 4$, se $x \leq -2$ ou $x \geq 2$ $\qquad$ $S_2(x) = -x^2 + 4$, se $-2 < x < 2$ $\qquad$ $f(x) = |x^2 - 4|$

5.7.4 Função Polinomial

São exemplos de funções polinomiais, as funções afins e quadráticas. Uma *função polinomial*, ou simplesmente um polinômio, tem a forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

em que n é um número natural, e os números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são constantes denominadas *coeficientes* do polinômio.

O domínio desta função é $\mathbb{R}$. Se o coeficiente do termo de maior potência é não nulo, isto é, $a_n \neq 0$, então o polinômio é dito de grau n. Assim, por exemplo, os polinômios $p(x) = 7x - 3$, $f(x) = -x^2 + x + 1$ e $g(x) = 3x^5 + \sqrt{2}x^3 - x + 2$ são polinômios de graus 1, 2 e 5, respectivamente.

Vimos que não há dificuldades em esboçar gráficos de funções polinomiais de graus um e dois. O mesmo não se pode dizer para um polinômio de grau $n \geq 3$. Na disciplina Cálculo I, veremos algumas técnicas (limites e derivadas) que nos são úteis para esboçar o gráfico de uma função polinomial de grau qualquer. No entanto, além da função potência $f(x) = x^3$, podemos construir facilmente gráficos de **algumas** funções definidas por polinômios de grau três, fatorando-os num produto de fatores lineares. Primeiramente, um polinômio de grau 3 tem a forma

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0,$$

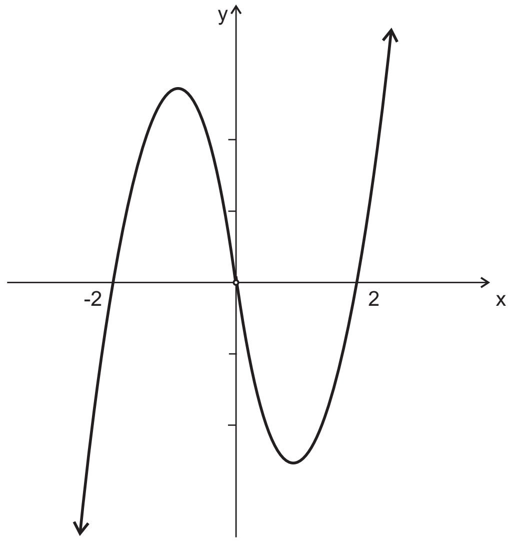
e é também chamada função cúbica. Vamos ao exemplo.

Exemplo 25
Seja $f(x) = x^3 - 4x$. Observe que $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x+2)(x-2)$. Então as raízes de f são os números 0, 2 e-2. Para esboçar o gráfico, analisemos a tabela abaixo, contendo o estudo de sinal dos fatores lineares e, portanto, de $f(x)$:

	$x-2$	x	$x+2$	$f(x)$
$x < -2$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-2 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$
$0 < x < 2$	$-$	$+$	$+$	$-$
$x > 2$	$+$	$+$	$+$	$+$

Assim, o gráfico tem um ponto de máximo no intervalo $(-2, 0)$ e um ponto de mínimo no intervalo $(0, 2)$, nos ajudando a esboçar seu gráfico, conforme a figura ao lado.

Atenção: Veremos, na disciplina "Cálculo Diferencial e Integral I", que estes pontos são de mínimo e de máximo local da função $f(x)$.

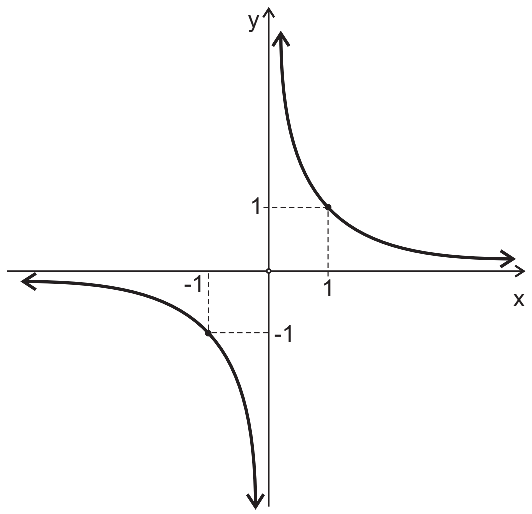


5.7.5 Função Recíproca

Uma função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ recebe o nome de função recíproca quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}^*$ associa o elemento $\dfrac{1}{x}$, ou seja,

$$f(x) = \frac{1}{x}, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^*.$$

Para esboçar o gráfico desta função, (figura ao lado) basta notar que os pontos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ pertencem ao seu gráfico, e as seguintes importantes informações:



(i) À medida que x cresce indefinidamente, temos que $f(x)$ tende para 0;

(ii) À medida que x decresce indefinidamente, temos que $f(x)$ tende para 0;

(iii) À medida que x se aproxima de 0 pela direita, $f(x)$ cresce indefinidamente;

(iv) À medida que x se aproxima de zero pela esquerda, $f(x)$ decresce indefinidamente.

Observação 13

(1) No gráfico de $f(x)$, dizemos que os eixos coordenados são, neste caso, as assíntotas vertical e horizontal. (Maiores detalhes, será visto em Cálculo I)

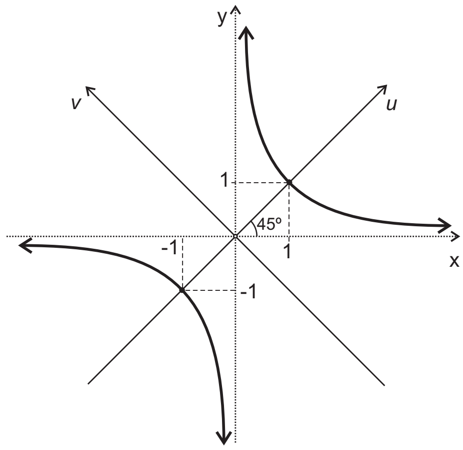
(2) No curso de Geometria Analítica, a expressão

$$y = \frac{1}{x},$$

equivalentemente a $xy = 1$, é vista como a hipérbole no plano rotacionada sob um ângulo 45º, veja a figura ao lado.
Mais geralmente, para quaisquer números A, B, C, D, E e F, veremos que equações do tipo

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representam uma parábola, uma elipse, uma hipérbole ou um par de retas.



Para as funções $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ e $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$, procedemos de modo análogo, desde que tenhamos em mente os domínios destas funções, que são:

$$D(g) = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq -1\} \quad \text{e} \quad D(h) = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq 1\}.$$

Com esses domínios, em relação aos ítens (iii) e (iv), exibidos acima, escreveremos para g e h, respectivamente,

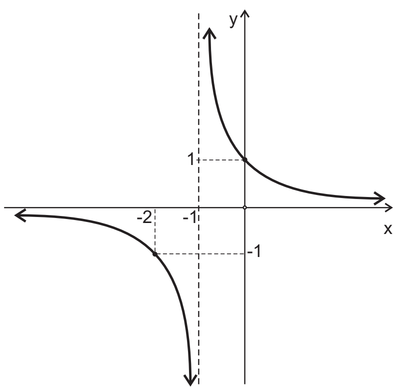
(iii′) À medida que x se aproxima de -1 pela direita, temos que $x + 1$ se aproxima de 0, por valores positivos e, logo, $g(x)$ cresce indefinidamente;

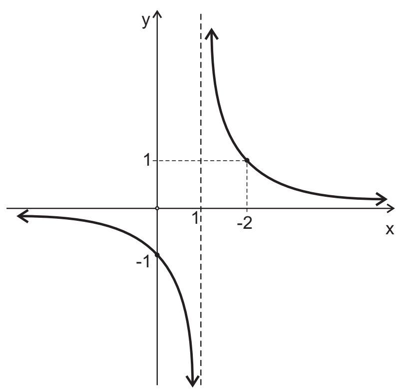
(iv′) À medida que x se aproxima de -1 pela esquerda, temos que $x + 1$ se aproxima de 0, por valores negativos e, logo, $g(x)$ decresce indefinidamente.

(iii″) À medida que x se aproxima de 1 pela direita, temos que $x + 1$ se aproxima de 0 por valores positivos e, logo, $h(x)$ cresce indefinidamente;

(iv″) À medida que x se aproxima de 1 pela esquerda, temos que $x + 1$ se aproxima de 0 por valores negativos e, logo, $h(x)$ decresce indefinidamente.

Abaixo estão exibidos os gráficos das funções $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ e $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$, respectivamente.





A próxima seção tratará dessas transformações.

6 Transformações do Gráfico de uma Função

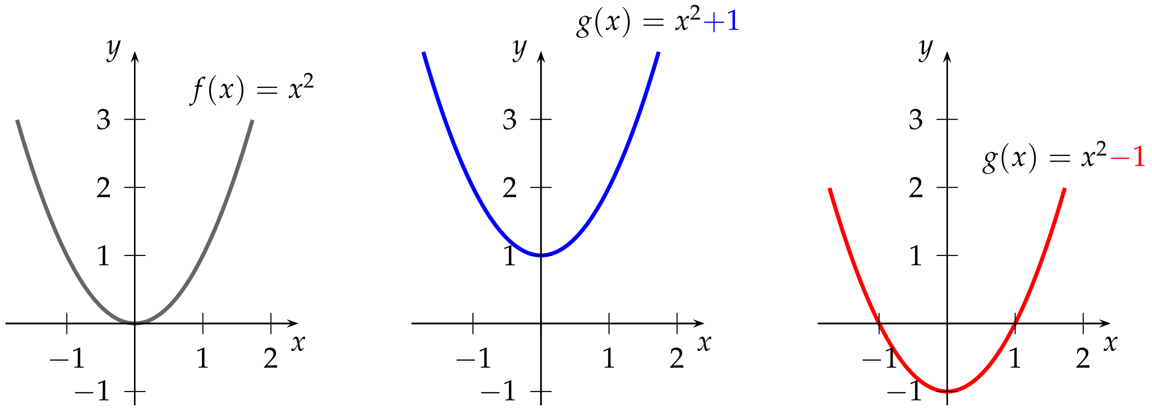
A partir do gráfico de uma função $y = f(x)$, podemos contruir o gráfico de outras funções mediante algumas transformações, conforme ilustraremos a seguir.

6.1 Translação

▷ Translação vertical do gráfico de uma função

◇ $g(x) = f(x) + a$ é uma translação vertical, de f, para cima se $a > 0$;

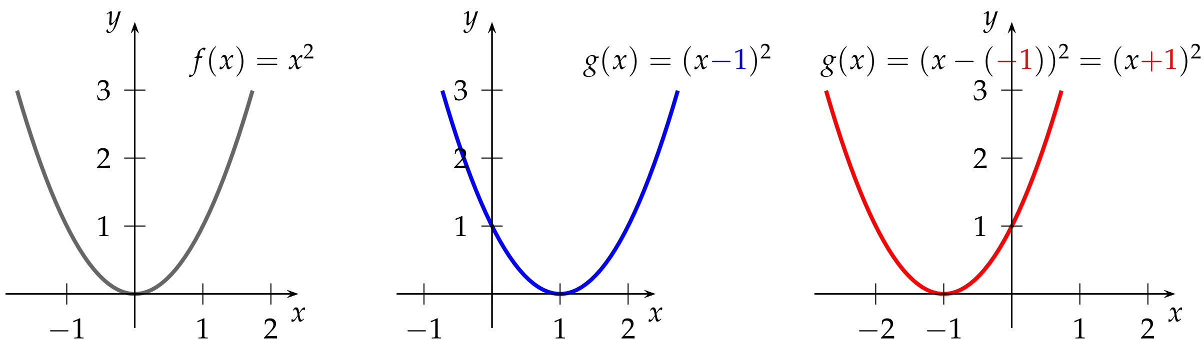
◇ $g(x) = f(x) + a$ é uma translação vertical, de f, para baixo se $a < 0$.



▷ Translação horizontal do gráfico de uma função

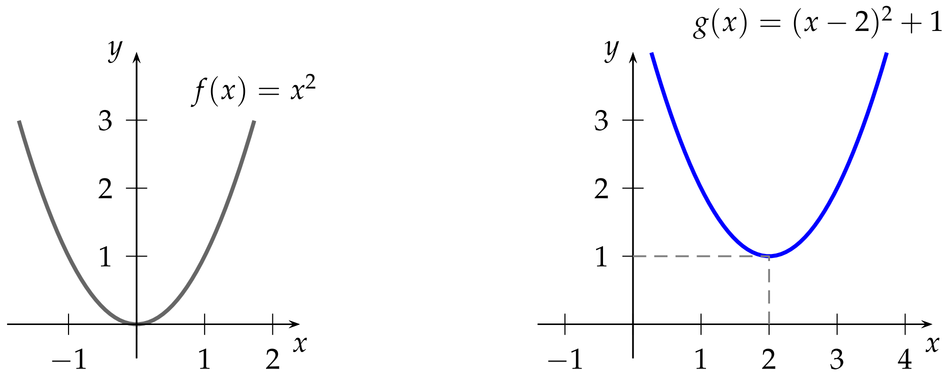
◇ $g(x) = f(x - a)$ é uma translação horizontal, de f, para a direita se $a > 0$;

◇ $g(x) = f(x - a)$ é uma translação horizontal, de f, para a esquerda se $a < 0$.



▷ Translação horizontal e vertical do gráfico de uma função

◇ $g(x) = f(x - a) + b$

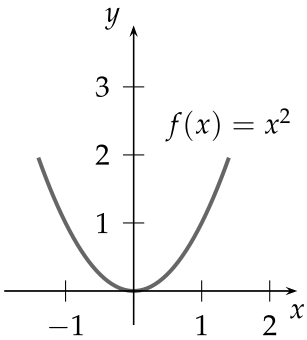


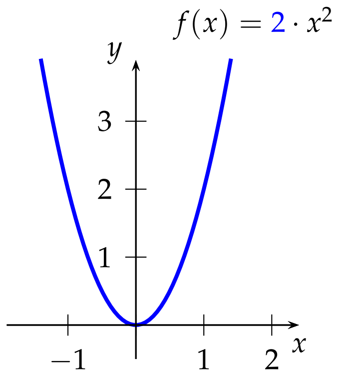
6.2 Dilatação ou Contração

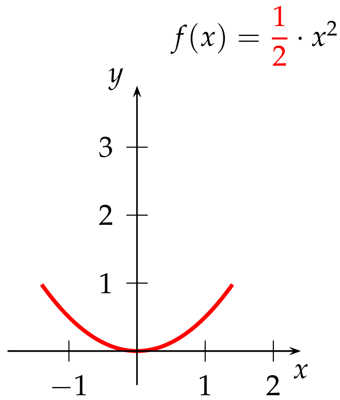
▷ Expansão e contração na vertical do gráfico de uma função

◇ $g(x) = a \cdot f(x)$ é uma dilatação na vertical, de f, se $a > 1$;

◇ $g(x) = a \cdot f(x)$ é uma contração na vertical, de f, se $0 < a < 1$.



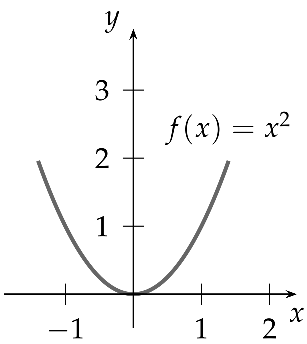


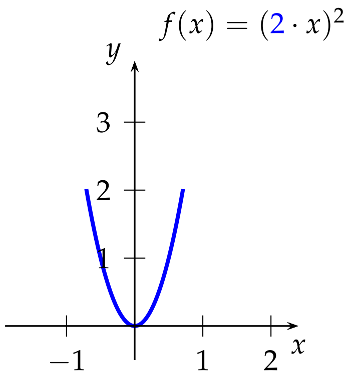


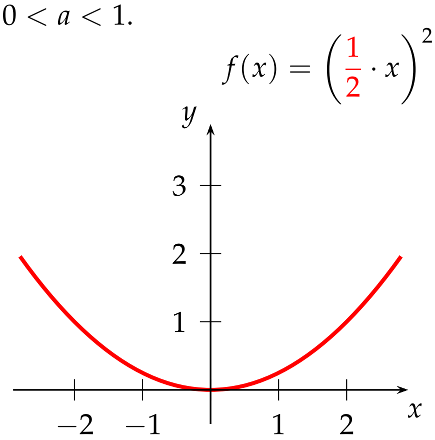
▷ Expansão e contração na horizontal do gráfico de uma função

◇ $g(x) = f(a \cdot x)$ é uma contração na horizontal, de f, se $a > 1$;

◇ $g(x) = f(a \cdot x)$ é uma dilatação na horizontal, de f, se $0 < a < 1$.





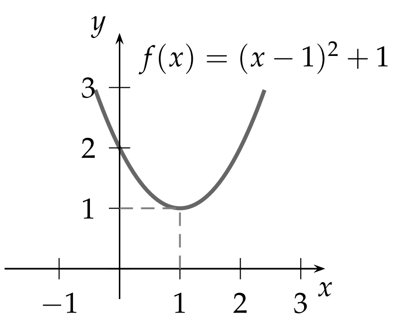


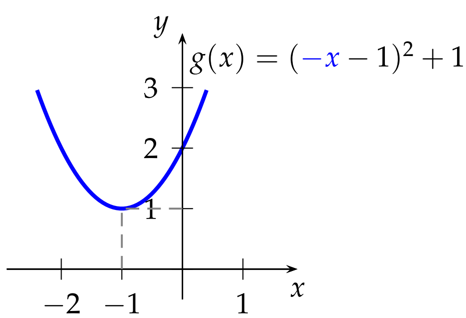
6.3 Simetrias

▷ Simetria do gráfico de uma função relativamente aos eixos:

◇ $g(x) = f(-x)$ é uma simetria em relação ao eixo Oy.

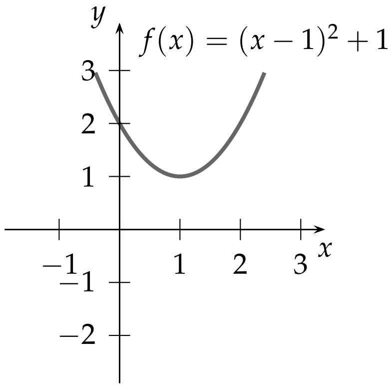
O que estava à direita "passa" para a esquerda e vice-versa.

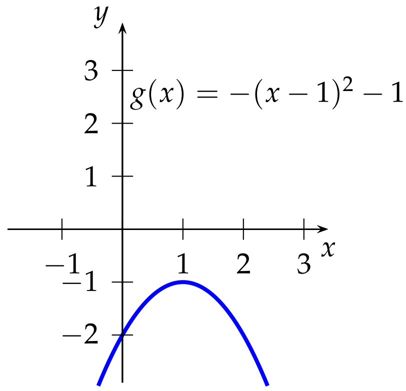




◇ $g(x) = -f(x)$ é uma simetria em relação ao eixo Ox.

A porção do gráfico que estava em cima "passa" para baixo e vice-versa.

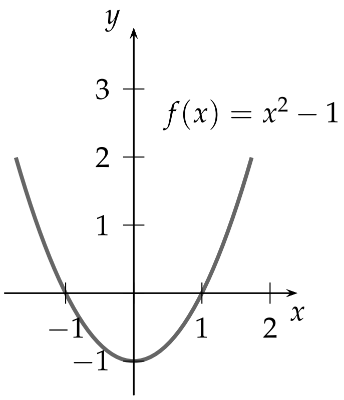


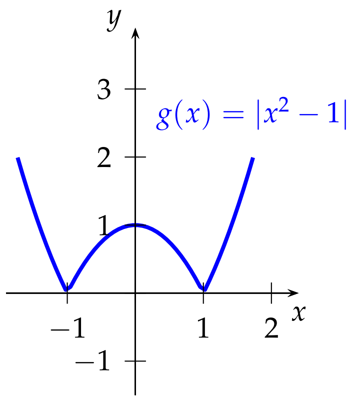


◇ $g(x) = -f(-x)$ é uma simetria em relação à origem do sistema, ou seja, simetria em relação aos dois exiso coordenados.

▷ Valor absoluto (módulo) de uma função: $g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se} \quad f(x) < 0 \end{cases}$.

◇ A função $g(x)$ é a mesma função $f(x)$ para os pontos em que $f(x) \geq 0$ e, para os pontos em que $f(x) < 0$, $g(x)$ coincide com a simetria em relação ao eixo Ox. Assim, o gráfico g fica todo acima do eixo Ox.





◇ A parte acima do eixo Ox permanece o mesmo;

◇ A parte abaixo do eixo Ox é refletido em torno do eixo Ox.

Texto composto em $\LaTeX\,2_\varepsilon$, Cattai, 24 de julho de 2016