Universidade do Estado da Bahia

Disciplina: Cálculo I (MAT 065) **Semestre:** 2013.1

Professor: *Adriano Cattai* **Data:** 17/07/2013

Nome: ____

2ª Avaliação da Aprendizagem

Instruções:

1. *A interpretação faz parte da avaliação;*
2. *Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;*
3. *Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
4. *Utilize caneta **preta** ou **azul**;*
5. *Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;*
6. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
7. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
8. *Nesta folha, escreva apenas seu nome.*

"A educação é a arma mais poderosa que você pode usar para mudar o mundo." (Nelson Mandela)

Questões

Q.* 1** (2,5).*** Com o roteiro discutido em sala, esboce o gráfico da função $f(x) = \dfrac{4}{x} - \dfrac{4}{x^2}$.

Como $f(x) = \dfrac{4}{x} - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{4(x-1)}{x^2}$, percebemos que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, donde concluimos que não há interseção com o eixo y. Fazendo $f(x) = 0$, temos $x - 1 = 0$ implicando que $x = 1$ é raiz da função e intercepto no eixo x. Claramente que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2} = 0$, implicando que o eixo x é assíntota horizontal. Por outro lado, como

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{4(x-1)}{x^2} = \frac{-4}{(0^-)^2} = \frac{-4}{0^+} = -\infty \text{ e } \lim_{x\to 0^+} \frac{4(x-1)}{x^2} = \frac{-4}{(0^+)^2} = \frac{-4}{0^+} = -\infty,$$

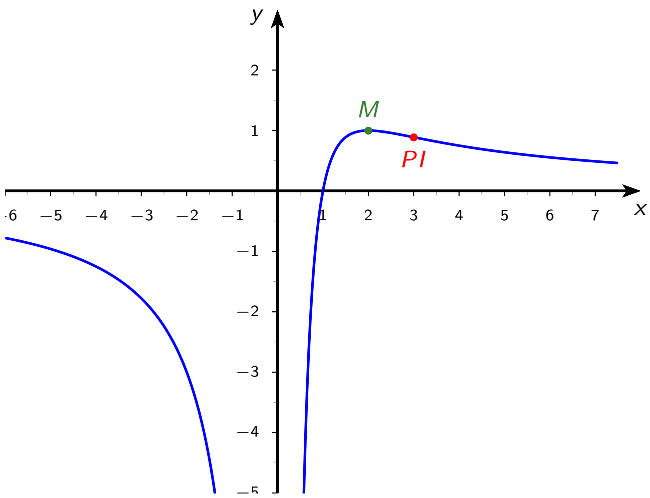
então o eixo y é assíntota vertical para o gráfico de f. Quanto a monotonicidade e a concavidade, temos a primeira e a segunda derivada, respectivamente:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\cdot\left[\frac{x-1}{x^2}\right]' = 4\cdot\frac{1\cdot x^2 - (x-1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{4(-x^2+2x)}{x^4} = \frac{4(-x+2)}{x^3} = \frac{4(2-x)}{x^3}; \\ f''(x) &= 4\cdot\left[\frac{2-x}{x^3}\right]' = 4\cdot\frac{-1\cdot x^3 - (2-x)\cdot 3x^2}{x^6} = 4\cdot\frac{2x^3 - 6x^2}{x^6} = \frac{8(x-3)}{x^4}. \end{aligned}$$

Estudando o sinal destas derivadas, respectivamente, temos:

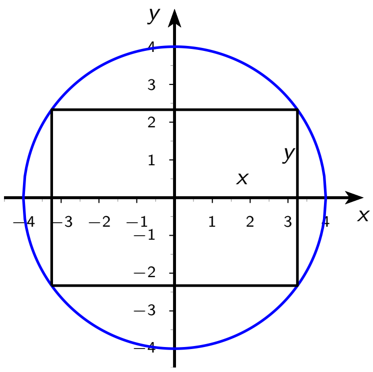
	$x<0$	$0<x<2$	$x>2$
$4(2-x)$	+	+	−
x^3	−	+	+
f'	−	+	−
f	↘	↗	↘
	0	2	

	$x<0$	$0<x<3$	$x>3$
$8(x-3)$	−	−	+
x^4	+	+	+
f''	−	−	+
f	∩	∩	∪
	0	3	



A partir deste quadros, temos que $x = 2$ é ponto de máximo local, cuja imagem é $f(2) = 1$ e, que, $x = 3$ é ponto de inflexão, cuja imagem é $f(3) = 8/9 = 0,888\ldots$, uma dízima periódica.

Q.* 2** (1,8).*** Determine o retângulo de área máxima que está inscrito num círculo de raio $4\ cm$.



A área do retângulo, conforme a figura ao lado, é $A(x,y) = 4 \cdot x \cdot y$. Como $y = \sqrt{16 - x^2}$, então

$$A(x) = 4 \cdot x \cdot \sqrt{16 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 4.$$

Derivando, obtemos

$$A'(x) = 4\left[1 \cdot \sqrt{16 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}}\right] = \frac{8(8 - x^2)}{\sqrt{16 - x^2}}.$$

Como $\sqrt{16 - x^2} \geq 0$ para $x \in [0, 4]$, então basta estudar o sinal da parábola $8 - x^2$. Esta tem concavidade voltada para baixo e raízes $\pm 2\sqrt{2}$. Portanto, $x = 2\sqrt{2}$ é o ponto de máximo de $A(x)$, visto que A' é positiva para todo $x < 2\sqrt{2}$ e A' é negativa para todo $x > 2\sqrt{2}$.

Subistituindo este valor em $\sqrt{16 - x^2}$, obtemos $y = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Assim, as dimensões do retângulo máximo são $4\sqrt{2}$ e $4\sqrt{2}$.

Q.* 3** (1,5).*** Implicitamente, determine a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$, no ponto de abscissa 1, sabendo que $x \cdot \mathrm{arctg}(x) + x \cdot e^y = \dfrac{\pi}{4} + e^2$.

Como $x = 1$, então $1 \cdot \mathrm{arctg}(1) + 1 \cdot e^y = \dfrac{\pi}{4} + e^2$ nos leva a $\dfrac{\pi}{4} + e^y = \dfrac{\pi}{4} + e^2$, ou seja, $y = 2$. Derivando implicitamente, temos:

$$1 \cdot \mathrm{arctg}(x) + \frac{x}{1 + x^2} + 1 \cdot e^y + x \cdot e^y \cdot y' = 0 \Longrightarrow y' = -\frac{\mathrm{arctg}(x) + \dfrac{x}{1+x^2} + e^y}{x \cdot e^y}.$$

Substituindo o ponto, temos $a_t = -\dfrac{\mathrm{arctg}(1) + \dfrac{1}{1+1^2} + e^2}{1 \cdot e^2} = -\dfrac{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2} + e^2}{1 \cdot e^2} = -\dfrac{\pi + 2 + 4e^2}{4e^2}$.

Q.* 4** (2,7).*** Simplificando, determine a derivada de cada função a seguir:

(a) $f(x) = 2\sqrt{x} \cdot \mathrm{arctg}(\sqrt{x}) - \ln(\sec(x))$; (b) $g(x) = \cos^7(e^{2x} - \pi) + \dfrac{(3-x)^3}{(1-x)^2}$;

(c) $h(x) = \sqrt[5]{3^{1-x^5}} - \mathrm{tg}(x^2 + x - 1)$.

$$\begin{aligned}
\text{(a) } f'(x) &= [2\sqrt{x}]' \cdot \mathrm{arctg}(\sqrt{x}) + 2\sqrt{x} \cdot [\mathrm{arctg}(\sqrt{x})]' - [\ln(\sec(x))]' \\
&= \frac{2}{2\sqrt{x}} \cdot \mathrm{arctg}(\sqrt{x}) + 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sec(x)} \cdot \sec(x)\mathrm{tg}(x) = \frac{\mathrm{arctg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{1}{1+x} - \mathrm{tg}(x);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(b) } g'(x) &= 7 \cdot \cos^6(e^{2x} - \pi) \cdot [\cos(e^{2x} - \pi)]' + \frac{3 \cdot (3-x)^2 \cdot [3-x]' \cdot (1-x)^2 - (3-x)^3 \cdot 2 \cdot (1-x) \cdot [1-x]'}{(1-x)^4} \\
&= -7 \cdot \cos^6(e^{2x} - \pi) \cdot \mathrm{sen}(e^{2x} - \pi) \cdot [e^{2x} - \pi]' + \frac{-3 \cdot (3-x)^2 \cdot (1-x)^2 + (3-x)^3 \cdot 2 \cdot (1-x)}{(1-x)^4} \\
&= -14 \cdot e^{2x} \cdot \cos^6(e^{2x} - \pi) \cdot \mathrm{sen}(e^{2x} - \pi) + \frac{(3-x)^2(1-x)\,[-3(1-x) + 2(3-x)]}{(1-x)^4} \\
&= -14 \cdot e^{2x} \cdot \cos^6(e^{2x} - \pi) \cdot \mathrm{sen}(e^{2x} - \pi) + \frac{(3-x)(9-x^2)}{(1-x)^3};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(c) } h'(x) &= \frac{1}{5}\left(3^{1-x^5}\right)^{-4/5} \cdot \left[3^{1-x^5}\right]' - \sec^2(x^2 + x - 1) \cdot [x^2 + x - 1]^2 = \frac{3^{1-x^5} \cdot \ln(3) \cdot (-5x^4)}{5\sqrt[5]{3^{4-4x^5}}} - (2x+1)\sec^2(x^2 + x - 1) \\
&= \frac{-x^4 \cdot 3^{1-x^5} \cdot \ln(3)}{\sqrt[5]{3^{4-4x^5}}} - (2x+1) \cdot \sec^2(x^2 + x - 1).
\end{aligned}$$

Q.* 5** (1,5).*** Determine $f^{(113)}(0)$, em que $f(x) = \mathrm{sen}(x) + 2^x$.

Veja o exercício 123, itens (c) e (f) da lista de derivadas.