UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA

DISCIPLINA: Cálculo I (MAT 065) SEMESTRE: 2013.1

PROFESSOR: *Adriano Cattai* DATA: 20/05/2013

NOME: ____

1ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *A interpretação faz parte da avaliação;*
2. *Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;*
3. *Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
4. *Utilize caneta **preta** ou **azul**;*
5. *Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;*
6. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
7. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
8. *Nesta folha, escreva apenas seu nome.*

"Deus nos concede, a cada dia, uma página de vida nova no livro do tempo. Aquilo que colocarmos nela, corre por nossa conta." (Chico Xavier)

QUESTÕES

Q. 1 (1,5)**.** Aquiles, o herói grego, e a tartaruga decidem apostar uma corrida. Como a velocidade de Aquiles é maior do que a da tartaruga, esta recebe uma vantagem, começando corrida $50\ m$ na frente da linha de largada de Aquiles. Nesta corrida Aquiles nunca sobrepassa à tartaruga, pois quando ele chegar à posição inicial A da tartaruga, esta encontra-se um pouco mais a frente, numa outra posição B. Quando Aquiles chegar à nova posição B, a tartaruga não está mais lá, pois avançou para uma nova posição C, e assim sucessivamente, *ad infinitum*. Considerando o comprimento da tartaruga desprezível e o contexto da corrida, indique com a notação adequada de limites a tendência da distância entre Aquiles e a tartaruga à medida em que o tempo passar.

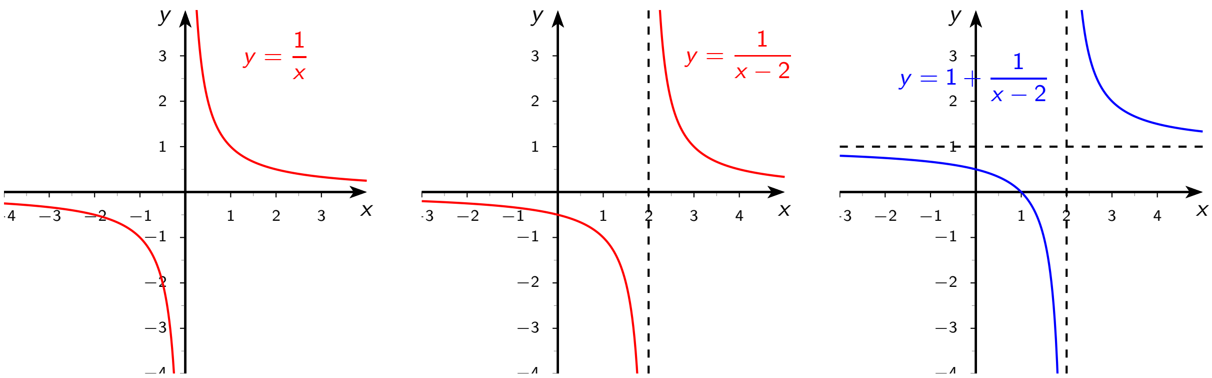
A distância entre a tartaruga e Aquiles, à medida em que o tempo decorre, tende a zero. Ou seja, não importa quanto tempo se passe, Aquiles nunca alcançará a tartaruga nem, portanto, poderá ultrapassá-la. Se $d(Aq, Tt)$ indicar a distância entre eles e Δt a variação do tempo, então

$$\lim_{\Delta t \to +\infty} d(Aq, Tt) = 0,$$

indicando que à medida em que o tempo passar, mais próximo da tartaruga estará Aquiles.

Q. 2 (3,0)**.**
(a) A partir do gráfico da hipérbole $f(x) = \dfrac{1}{x}$ exiba o gráfico de $g(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$;
(b) Determine as assíntotas (vertical e horizontal) de g a partir dos limites infinito e no infinito. Ilustre no gráfico;
(c) Com a definição de derivada determine a equação da reta tangente e da reta normal ao gráfico de g, no ponto em que $x = 3$. Exiba estas retas no gráfico do item (a).

(a) Como $g(x) = \dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{x-2+2-1}{x-2} = 1 + \dfrac{1}{x-2}$, temos:



(b) Para o cálculo da assíntota horizontal, temos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x-2}=1+\frac{1}{+\infty}=1+0^{+}=1^{+}$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}1+\frac{1}{x-2}=1+\frac{1}{-\infty}=1+0^{-}=1^{-}$$

Donde a reta $y=1$ é assíntota horizontal. E, para a vertical, notemos que $x=2$ anula o denominador e não o numerador. Portanto,

$$\lim_{x\to2^-}\frac{x-1}{x-2}=\frac{1}{0^-}=-\infty \qquad e \qquad \lim_{x\to2^+}\frac{x-1}{x-2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Mostrando que a reta $x=2$ é assíntota vertical, conforme o gráfico acima ilustra.

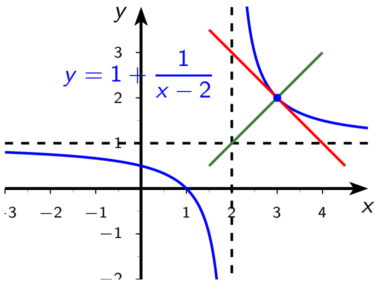
(c) Temos que $x_p=3$ e, portanto, $y_p=g(3)=\dfrac{3-1}{3-2}=2$. Vamos obter $a_t=g'(3)$:

$$g'(3)=\lim_{x\to3}\frac{\frac{x-1}{x-2}-2}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\frac{x-1-2(x-2)}{x-2}}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\frac{-(x-3)}{x-2}}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{-(x-3)}{x-2}\cdot\frac{1}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{-1}{x-2}=-1.$$

Como equação da reta tangente é $t: y-y_p=a_t(x-x_p)$ e da reta normal $n: y-y_p=a_n(x-x_p)$, em que $a_t=g'(3)$ e $a_n=\dfrac{-1}{a_t}$, escrevemos:

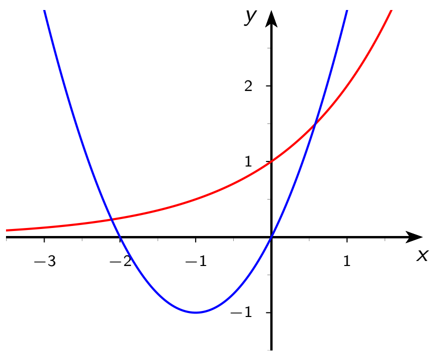
$$t: y-2=-1(x-3) \implies t: y=5-x$$
$$n: y-2=1(x-3) \implies t: y=x-1.$$

Na figura ao lado, a reta vermelha representa a tangente e a verde a reta normal.



Q. 3 (2,0). A equação $2^x=x^2+2x$ possui três raízes reais. Com o esboço gráfico das funções e com o TVI, mostre os intervalos onde se encontram as duas mais próximas à origem.

Na figura ao lado, a linha vermelha é o gráfico da função exponencial 2^x e a azul o da parábola x^2+2x. A partir dela, podemos intuir que as raízes estão nos intervalos $[-3,-2]$ e $[0,1]$.
Como $2^x=x^2+2x$ é equivalente a $2^x-x^2-2x=0$, basta garantir que existem raízes da função $f(x)=2^x-x^2-2x$. Antes, vemos que f é contínua em todo $\mathbb{R}$, por se tratar de uma direferança entre duas contínuas em $\mathbb{R}$, em especial nos intervalos $[-3,-2]$ e $[0,1]$. Calculando as imagens nos estremos destes intervalos, temos:



$$f(-3)\cdot f(-2)<0 \Leftarrow \begin{cases} f(-3) = 2^{-3}-(-3)^2-2\cdot(-3) = 1/8-9+6 = 1/8-3 < 0 \\ f(-2) = 2^{-2}-(-2)^2-2\cdot(-2) = 1/4-4+4 = 1/8 > 0 \end{cases}$$
$$f(0)\cdot f(1)<0 \Leftarrow \begin{cases} f(0) = 2^0-(0)^2-2\cdot(0) = 1-0-0 = 1 > 0 \\ f(1) = 2^1-(1)^2-2\cdot(1) = 2-1-2 = -1 < 0 \end{cases}$$

Pela continuidade de f e, visto que $f(-3)\cdot f(-2)<0$ e $f(0)\cdot f(1)<0$, o TVI garante a existência de uma raiz em cada intervalo e, portanto, mostramos que a equação $2^x=x^2+2x$ possui duas raízes, uma em cada intervalo.
A terceira raiz, estã no intervalo $[5,6]$, que não está exibida no gráfico acima.

Q. 4 (3,5). Determine os limites abaixo:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^x$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\sec(x)}{x^2}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-7x^2+16x-12}{x^3-12x+16}$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+2x+1}$.

(a) Escrevendo $\dfrac{x-1}{x-2} = 1 + \dfrac{1}{x-2}$, vemos claramente que o limite é indeterminado 1^{∞}. No entanto, podemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-2}\right)^{x} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+2} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2} = e\cdot 1 = e,$$

em que fizemos a mudança de variável $y = x-2$ e utilizamos o limite fundamental exponencial.

(b) Como $\sec(0) = 1$, vemos que o $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec(x)}{x^2}$ é indeterminado $0/0$. Vamos obter expressão equivalente:

$$\frac{1-\sec(x)}{x^2} = \frac{1-\dfrac{1}{\cos(x)}}{x^2} = \frac{\dfrac{\cos(x)-1}{\cos(x)}}{x^2} = \frac{\cos(x)-1}{\cos(x)}\cdot\frac{1}{x^2} = \frac{-1}{\cos(x)}\cdot\frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

Ou seja,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\cos(x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = -1\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2},$$

em que este último limite é calculado a partir do limite fundamental trigonométrico, quando o numerador e o denominador são multiplicados por $1+\cos(x)$ (veja suas anotações do caderno).

(c) Veja, claramente, que $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-7x^2+16x-12}{x^3-12x+16}$ é indeterminado $0/0$. A partir do dispositivo de Briot-Ruffini, temos que:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-7x^2+16x-12}{x^3-12x+16} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-2)(x+4)} = \lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x+4} = \frac{-1}{6}.$$

(d) Note que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+2x+1} = +\infty-\infty$, ou seja, indeterminando. No entanto, podemos racionalizar a função:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+2x+1} &= \frac{\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+2x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}\right)}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}}\\
&= \frac{x^2+3x+1-(x^2+2x+1)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}\\
&= \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}
\end{aligned}$$

Portanto, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+2x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$

Q. 5 (Extra: 1,0)***.*** Determine $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^{500}-1}{x^{2000}-1}$.