UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA	
DISCIPLINA: Cálculo I (MAT 065)	SEMESTRE: 2012.2
PROFESSOR: *Adriano Cattai*	DATA: 11/10/2012
NOME: ______________________________	

1ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *A interpretação faz parte da avaliação;*
2. *Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;*
3. *Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
4. *Utilize caneta **preta** ou **azul**;*
5. *Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;*
6. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
7. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
8. *Nesta folha, escreva apenas seu nome.*

"Nunca ande somente pelo caminho traçado, pois ele conduz somente até onde os outros já foram." (Graham Bell)

QUESTÕES

Q. 1 (2,0). Suponha que existam dois mundos, um bidimensional e outro tridimensional, *Planolândia* e *Espaçolândia*. No primeiro, os habitantes tenham a forma de polígonos regulares convexos e, no segundo, os habitantes tenham a forma de poliedros convexos. Nestes mundos a nobreza é diretamente proporcional ao número de lados e ao números de faces, respectivamente. Com a noção e a notação adequada de limites, descreva a forma do indivíduo da mais alta nobreza e indique o indivíduo mais pobre, em cada mundo.

Vamos denotar por $PP(n)$ o indíviduo planolandês, em que $n \in \{3, 4, 5, \dots\}$ indica a quantidade de lados e $PE(m)$ o indivíduo espaçolandês, em que $m \in \{4, 5, 6, \dots\}$ indica a quantidade de faces. Note que $PP(3)$ (triângulo equilátero) e $PE(4)$ (Tetraedro) são os indivíduos mais pobre em seus respectivos planetas. Podemos, enquanto à nobreza, escrever

$$PP(3) < PP(4) < PP(5) < PP(6) < PP(7) < \dots < PP(n) < \dots$$

$$PE(4) < PE(5) < PE(6) < PE(7) < PE(8) < \dots < PE(m) < \dots$$

Note que $\lim\limits_{n\to+\infty} PP(n) = +\infty$ e $\lim\limits_{m\to+\infty} PE(m) = +\infty$, indicando que não existe um indivíduo da mais alta nobreza em cada planeta. No entanto, em termos geométricos, supondo que possa existir tal indivíduo, eum em cada planeta, estes deverâo ter forma "muito" próxima ao círculo e à esfera, respectivamente. O círculo é o limite da mais alta nobreza na Planolândia e a esfera é o limite da mais alta nobreza na Espaçolândia, simbolicamente

$$\lim_{n\to+\infty} \text{“ forma de” } PP(n) = \text{círculo} \quad \text{e} \quad \lim_{m\to+\infty} \text{“ forma de” } PE(m) = \text{esfera}.$$

Q. 2 (1,5). Escreva a definição de derivada para uma função f num ponto $x = p$. Com esta definição determine a derivada da função $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{3}$, no ponto $p = 0$.

Primeiro, cadê o livro? Segundo,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{0+\Delta x+2} - \sqrt{3} - (\sqrt{0+2} - \sqrt{3})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{\Delta x+2} - \sqrt{2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\sqrt{\Delta x+2} - \sqrt{2})(\sqrt{\Delta x+2} + \sqrt{2})}{\Delta x(\sqrt{\Delta x+2} + \sqrt{2})} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x+2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Q. 3 (1,5). Use o TVI para mostrar que a equação $\cos(x) = x^2$, possui duas raízes reais.

Veja que $\cos(x) = x^2$ é equivalente a $x^2 - \cos(x) = 0$. Assim, escrevendo $f(x) = x^2 - \cos(x)$, vemos que f é contínua em todo $\mathbb{R}$, por se tratar de uma direferança entre duas contínuas em $\mathbb{R}$, em especial nos intervalos $[-\pi/2, 0]$ e $[0, \pi/2]$.

Calculando as imagens nos estremos destes intervalos, temos:

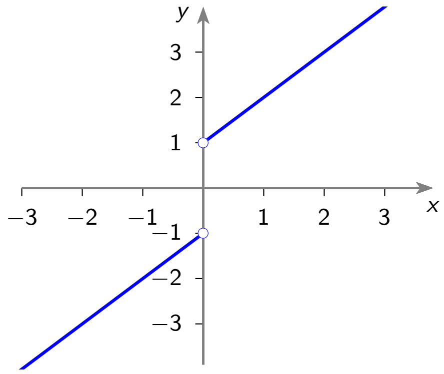
$$\begin{array}{lclclcll}
f(-\pi/2) & = & (-\pi/2)^2 - \cos(-\pi/2) & = & \pi^2/4 - 0 & = & \pi^2/4 & > & 0 \\
f(0) & = & (0)^2 - \cos(0) & = & 0 - 1 & = & -1 & < & 0 \\
f(\pi/2) & = & (\pi/2)^2 - \cos(\pi/2) & = & \pi^2/4 - 0 & = & \pi^2/4 & > & 0
\end{array}$$

Pela continuidade de f e, visto que $f(-\pi/2) \cdot f(0) < 0$ e $f(0) \cdot f(\pi/2) < 0$, o TVI garante a existência de uma raiz em cada intervalo e, portanto, mostramos que a equação $\cos(x) = x^2$ possui duas raízes.

***Q.* 4** (1,8)**.** Escreva a definição de função contínua; exiba o esboço gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{x}$ e estude a continuidade de f.

Primeiro, cadê o livro?

Segundo, note que $f(x) = x + 1$ se $x > 0$ e $f(x) = x - 1$ se $x < 0$. Deste modo, temos duas semiretas, como mostra o gráfico ao lado.



Terceiro, de posse do gráfico, vemos que o limite em zero não existe (laterais diferentes). E, como o zero não pertence ao domínio de f, não podemos dizer que f é descontínua neste ponto. Logo f é contínua.

***Q.* 5** (3,2)**.** Determine os limites abaixo:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x^2 - 2x}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}^2(x) + \text{sen}^2(x)}{x + \text{sen}(x)}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt[3]{x+3} - 2}{x^2 - 10x + 25}$; (d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1 + 2\text{sen}(4 + x^2)}{\sqrt{4 + x^2}}$.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x^2 - 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2^x - 1}{x}}{x - 2} = \frac{\ln(2)}{-2} = -\ln(\sqrt{2})$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}^2(x) + \text{sen}^2(x)}{x + \text{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2(x)\left[\frac{1}{\cos^2(x)} + 1\right]}{x\left[1 + \frac{\text{sen}(x)}{x}\right]} = \lim_{x\to 0} \text{sen}(x) \cdot \frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2(x)} + 1}{1 + \frac{\text{sen}(x)}{x}} = 0 \cdot 1 \cdot \frac{2}{2} = 0$;

(c) Veja, claramente, que $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt[3]{x+3} - 2}{x^2 - 10x + 25}$ é indeterminado $0/0$ e que $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$. Assim, mudando a variável $x + 3 = y^3$, com $y \to 2$, temos:

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt[3]{x+3} - 2}{x^2 - 10x + 25} = \lim_{y\to 2} \frac{y - 2}{(y^3 - 8)^2} = \lim_{y\to 2} \frac{y - 2}{(y-2)^2(y^2 + 2y + 4)^2} = \lim_{y\to 2} \frac{1}{(y-2)(y^2 + 2y + 4)^2} = \frac{1}{0 \cdot 144} = \frac{1}{0}.$$

Analisando os limites laterais, temos:

$$\lim_{y\to 2^-} \frac{1}{(y-2)(y^2 + 2y + 4)^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{y\to 2^+} \frac{1}{(y-2)(y^2 + 2y + 4)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1 + 2\text{sen}(4 + x^2)}{\sqrt{4 + x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}} + \lim_{x\to +\infty} \text{sen}(4 + x^2) \cdot \frac{2}{\sqrt{4 + x^2}} = 0 + 0$, em que o primeiro zero é $\dfrac{1}{+\infty}$ e o segundo pelo fato em que a função seno é limitada e está multiplicando outra que é infinitésima (teorema do anulamento, mas pode-se fazer com o do sanduíche).