UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA

DISCIPLINA: Cálculo I (MAT 065) SEMESTRE: 2012.1

PROFESSOR: *Adriano Cattai* DATA: 23/07/2012

NOME: ____

2ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *A interpretação faz parte da avaliação;*
2. *Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;*
3. *Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
4. *Utilize caneta **preta** ou **azul**;*
5. *Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;*
6. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
7. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
8. *Nesta folha, escreva apenas seu nome.*

"Fico triste quando alguém me ofende, mas, com certeza, eu ficaria mais triste se fosse eu o ofensor...
Magoar alguém é terrível!." (Chico Xavier)

QUESTÕES

***Q.* 1** (2,4)**.** Julgue cada afirmativa em verdadeiro ou falso.

(a) Uma função f é contínua se, e somente se, é derivável;

(b) Se $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, então $[\cosh(x)]' = \operatorname{senh}(x)$;

(c) Se $y = u \cdot v$, então $y'' = u'' \cdot v + 2 \cdot u' \cdot v' + u \cdot v''$;

(d) A função $g(x) = \dfrac{1}{x}$ possui uma única primitiva.

(a) Falso. Veja que a função $f(x) = |x|$ é contínua e não é suave em $x = 0$. Neste ponto as derivadas laterais são diferentes ($f'_-(0) = -1$ e $f'_+(0) = 1$). Ainda, o gráfico apresenta uma "quina" neste ponto;
(b) Verdadeiro. Como $[e^x]' = e^x$ e $[e^{-x}]' = -e^{-x}$, temos

$$[\cosh(x)]' = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \frac{1}{2}\left[e^x + e^{-x}\right]' = \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right] = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh}(x);$$

(c) Verdadeiro. Como $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$, temos:

$$[u \cdot v]'' = [u' \cdot v + u \cdot v']' = [u' \cdot v]' + [u \cdot v']' = (u'' \cdot v + u' \cdot v') + (u' \cdot v' + u \cdot v'') = u'' \cdot v + 2 \cdot u' \cdot v' + u \cdot v''.$$

(d) Falso. A função g admite, além da primitiva $y = \ln(x)$, uma família de primitivas da forma $f(x) = \ln(x) + K$, em que $K \in \mathbb{R}$, pois $f'(x) = [\ln(x) + K]' = \dfrac{1}{x} + 0 = \dfrac{1}{x}$.

***Q.* 2** (2,6)**.** Escreva sobre o processo de derivação, dizendo o que é, como podemos obter a derivada de uma dada função primitiva e apresente as regras básicas de derivação. Exiba exemplos de funções, derivando-as tanto pela definição quanto pelas regras.

Cadê o livro?

***Q.* 3** (2,0)**.** Com o roteiro discutido em sala, exiba o esboço gráfico da função $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 - 4}$.

Pela derivada do quociente, temos a primeira e a segunda derivada, respectivamente:

$$f'(x) = \frac{[2x^3]' \cdot (x^2 - 4) - 2x^3 \cdot [x^2 - 4]'}{(x^2 - 4)^2} = \frac{6x^2 \cdot (x^2 - 4) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2};$$

$$f''(x) = \frac{(8x^3 - 48x)(x^2 - 4)^2 - (2x^4 - 24x^2)2(x^2 - 4)2x}{(x^2 - 4)^4} = \frac{4x(x^2 - 4)[(2x^2 - 12)(x^2 - 4) - 2x^4 + 24x^2]}{(x^2 - 4)^4} = \frac{16x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}.$$

	$x<-\sqrt{12}$	$-\sqrt{12}<x<0$	$0<x<\sqrt{12}$	$x>\sqrt{12}$
$2x^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-12	$+$	$-$	$-$	$+$
$(x^2-4)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
f'	$+$	$-$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

	$x<-2$	$-2<x<0$	$0<x<2$	$x>2$
$16x$	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2+16	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x^2-4)^3$	$+$	$-$	$-$	$+$
f''	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

◇ $f'(x)>0 \Leftrightarrow f$ é cresc. $\Leftrightarrow x\in(-\infty,-\sqrt{12})\cup(\sqrt{12},+\infty)$

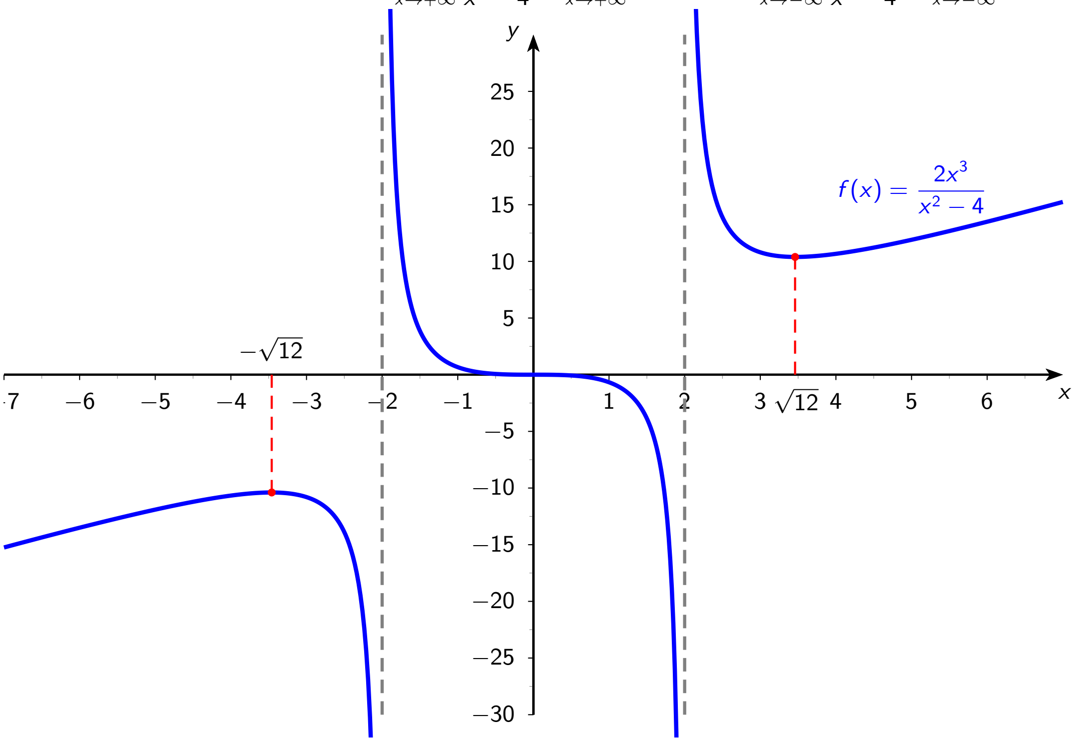
◇ $f'(x)<0 \Leftrightarrow f$ é decresc. $\Leftrightarrow x\in(-\sqrt{12},\sqrt{12})$

◇ $f''(x)>0 \Leftrightarrow f$ CVC $\Leftrightarrow x\in(-2,0)\cup(2,+\infty)$

◇ $f''(x)<0 \Leftrightarrow f$ CVB $\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(0,2)$

As assíntotas verticais são as retas $x=2$ e $x=-2$, pois $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^3}{x^2-4}=\frac{16}{0}$ e $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^3}{x^2-4}=\frac{-16}{0}$.

Não possui assíntota horizontal pois $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty$.



Q.* 4** (3,0).***

(a) Por que $f^{(100)}(x)=\text{sen}(x)+2^x\cdot[\ln(2)]^{100}-\frac{99!}{x^{100}}$, em que $f(x)=\text{sen}(x)+2^x+\ln(x)$?

(b) Se $g(x)$ é uma função derivável tal que $g(1)=2$ e $g'(1)=3$, calcule a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)=g(\cos(x)+\text{sen}(x))$ no ponto de abscissa nula;

(c) Use a derivada para obter uma aproximação para $\text{tg}(44°15')$.

(a) Pois, para sen(x), temos:

$$
\begin{array}{llll}
[\text{sen}(x)]'=\cos(x), & [\text{sen}(x)]''=-\text{sen}(x), & [\text{sen}(x)]'''=-\cos(x), & [\text{sen}(x)]^{(4)}=\text{sen}(x)\\
[\text{sen}(x)]^{(5)}=\cos(x), & [\text{sen}(x)]^{(6)}=-\text{sen}(x), & [\text{sen}(x)]^{(7)}=-\cos(x), & [\text{sen}(x)]^{(8)}=\text{sen}(x)\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
[\text{sen}(x)]^{(97)}=\cos(x), & [\text{sen}(x)]^{(98)}=-\text{sen}(x), & [\text{sen}(x)]^{(99)}=-\cos(x), & [\text{sen}(x)]^{(100)}=\text{sen}(x).
\end{array}
$$

Para 2^x, temos: $[2^x]'=2^x\cdot\ln(2)$, $[2^x]''=2^x\cdot[\ln(2)]^2$, , $[2^x]'''=2^x\cdot[\ln(2)]^3$, $\dots$, $[2^x]^{(100)}=2^x\cdot[\ln(2)]^{100}$, $\dots$, $[2^x]^{(n)}=2^x\cdot[\ln(2)]^n$.

E, para $\ln(x)$, temos: $[\ln(x)]'=\frac{1}{x}$, $[\ln(x)]''=\frac{-1}{x^2}$, $[\ln(x)]'''=\frac{2}{x^3}$, $[\ln(x)]^{(4)}=\frac{-3\cdot 2}{x^4}$, $[\ln(x)]^{(5)}=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{x^5}$, $\dots$, $[\ln(x)]^{(100)}=\frac{-99!}{x^{100}}$.

(b) Note que $f(0) = g(\cos(0) + \text{sen}(0)) = g(1) = 2$. Agora, derivando f, temos:

$$f'(x) = g'(\cos(x) + \text{sen}(x)) \cdot (-\text{sen}(x) + \cos(x)).$$

Sendo assim, $a_t = f'(0) = g'(\cos(0)+\text{sen}(0)) \cdot (-\text{sen}(0)+\cos(0)) = g'(1) = 3$. Portanto, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0; f(0)) = (0; 2)$ é $y = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = 2 + 3x$;

(c) A fórmula para cálculos aproximados é $\Delta y \approx dy$, em que $\Delta y = f(x_p + \Delta x) - f(x_p)$ e $dy = f'(x_p)dx$, para Δx bem pequeno. Para obter $\text{tg}(44°15')$, adotaremos $f(x) = \text{tg}(x)$ (donde $f'(x) = \sec^2(x)$), $x_p = 45°$ e $\Delta x = dx = -0°45' = -0,75° = -\dfrac{\pi}{240}\text{rad}$. Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned} \text{tg}(44°15') &\approx \text{tg}(45°) + \sec^2(45°) \cdot \frac{-\pi}{240} = 1 - \frac{1}{\cos^2(45°)} \cdot \frac{\pi}{240} = 1 - \frac{\pi}{120} \\ &\approx 0,97382006122008505634614463847267. \end{aligned}$$

Só isso.

Obrigado!