UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA

DISCIPLINA: Cálculo I (MAT 065) SEMESTRE: 2012.1

PROFESSOR: *Adriano Cattai* DATA: 18/06/2012

NOME: ______________________________

1ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *A interpretação faz parte da avaliação;*
2. *Não será permitida qualquer espécie de consulta, nem uso de equipamentos eletrônicos;*
3. *Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
4. *Utilize caneta **preta** ou **azul**;*
5. *Solução ilegível ou à lápis será considerada como errada;*
6. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
7. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
8. *Nesta folha, escreva apenas seu nome.*

"Assustar-se com as notícias produzidas pelo mundo é muito fácil, porém, entender o que está por trás dessas requer um esforço intelectual que nem todas as pessoas estão dispostas a empreender." (Emerson Natal)

QUESTÕES

***Q.* 1** (1,8)**.** Julgue cada afirmativa em verdadeiro ou falso.

(a) Se uma função f muda de sinal quando x varia de um ponto $x = a$ para o ponto $x = b$, então existirá, obrigatoriamente, um ponto entre a e b em que a função f se anula;

(b) Se $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{3x \cdot f(x) - 5}{x^2 - 4x + 4}$ é finito, então $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$ é igual a qualquer número;

(c) Se uma função f é negativa para todo número real não nulo, então $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ é negativo.

(a) Se a função fosse contínua no intervalo $[a, b]$, pelo TVI garantiríamos a existência deste $c \in [a, b]$. Como nada foi dito, a afirmativa é falsa. Como contra-exemplo temos a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se $x \neq 0$, com $f(0) = 2$, $a = -1$ e $b = 1$.

(b) Falso. Como $\displaystyle\lim_{x\to 2} x^2 - 4x + 4 = 0$, o limite $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{3x \cdot f(x) - 5}{x^2 - 4x + 4}$ será finito quando $\displaystyle\lim_{x\to 2} 3x \cdot f(x) - 5 = 0$, donde $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{5}{6}$;

(c) Falso. Talvez este limite nem exista, como é o caso se $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases}$.

***Q.* 2** (2,4)**.** Escreva a definição de derivada para uma função f num ponto $x = p$. Com esta definição determine a derivada da função $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x) + 2}$ e da função $g(x) = \sqrt{x+6} + \sqrt{x+2}$, no ponto $p = 0$.

A derivada de f num ponto $x = p$ é dada pelo limite $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$ e indicada por $f'(p)$. Por esta definição, temos:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{\operatorname{sen}(0+h)+2} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}(0)+2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{\operatorname{sen}(h)+2} - \dfrac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2 - [\operatorname{sen}(h)+2]}{2h[\operatorname{sen}(h)+2]} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \cdot \frac{-1}{2[\operatorname{sen}(h)+2]} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{0+h+6} + \sqrt{0+h+2} - (\sqrt{0+6} + \sqrt{0+2})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+6} + \sqrt{h+2} - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\sqrt{h+6} - \sqrt{6}}{h} + \frac{\sqrt{h+2} - \sqrt{2}}{h} \right] = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+6} - \sqrt{6}}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+2} - \sqrt{2}}{h} \\ &= \cdots \text{ racionalize } \cdots = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Q. 3 (1,0+1,6).

(a) Defina assíntota horizontal. Dê exemplos de funções que não tenham assíntotas horizontais, mostrando no gráfico e através de cálculos;

(b) Determine as assíntotas horizontais e verticais do gráfico da função $f(x) = \dfrac{\text{arctg}(x)+1}{x^2-2x+1}$.

(a) Dizemos que a reta $y = b$ é assíntota horizontal para o gráfico da função f, se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$. Temos as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = \text{sen}(x)$, duas funções que não possuem assíntotas. Para f, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$. Para g, os limites $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{sen}(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{sen}(x)$ não existem. Pegue um livro para ver os desenhos dos gráficos destas funções.

(b) Primeiramente, vamos determinar as assíntotas verticais. Temos que $x^2 - 2x + 1 = 0$ se, e somente se, $x = 1$. Assim, a reta $x = 1$ é a única candidata a assíntota vertical. Visto que $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0$, para todo $x \neq 1$, então $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2 = 0^+$. Daí

$$\lim_{x\to1} \frac{\text{arctg}(x)+1}{(x-1)^2} = \frac{\pi/4+1}{0^+} = +\infty.$$

Deste modo $x = 1$ é a única assíntota vertical para o gráfco de f. Agora, vamos determinar as assíntotas horizontais. Note que $\text{arctg}(x)+1$ é uma função limitada, pois $-\pi/4 < \text{arctg}(x) < \pi/4$. Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^2-2x+1} = 0$, pelo teorema do anulamento, temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{arctg}(x)+1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x-1)^2}(\text{arctg}(x)+1) = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\text{arctg}(x)+1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(x-1)^2}(\text{arctg}(x)+1) = 0.$$

Portanto, a reta $y = 0$ é assíntota horizontal.

Q. 4 (1,4). Use o TVI para mostrar que todo polinômio de grau ímpar possui, pelo menos, uma raiz real.

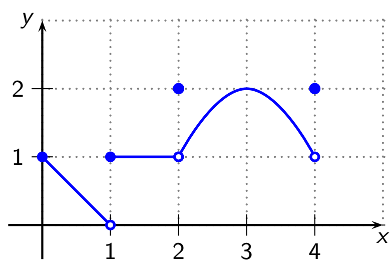
Seja $p_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ um polinômio qualquer de grau n. Sem perda de generalidade, vamos supor que $a_n > 0$. Deste modo temos que $\lim\limits_{x\to+\infty} p_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_nx^n = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} p_n(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_nx^n = -\infty$, visto que n é ímpar. Como $p_n(x)$ é uma função contínua (por se tratar de um polinômio) em todo $\mathbb{R}$ e que muda de sinal, então pelo TVI asseguramos que f se anula, pelo menos uma vez, para algum $x \in \mathbb{R}$.

Q. 5 (1,8). Exiba o esboço gráfico da função $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ dada ao lado. Dê a definição para uma função contínua num dado ponto e, a partir desta definição e do gráfico de f, investigue a continuidade desta função.

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in [0,1) \\ 1, & x \in [1,2) \\ 2, & x = 2 \text{ ou } x = 4 \\ -x^2+6x-7, & x \in (2,4) \end{cases}$$

A partir do gráfico, ao lado, temos:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x\to1^+} f(x) = 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x\to1} f(x)$$
$$\lim_{x\to2^-} f(x) = 1 \text{ e } \lim_{x\to2^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to2} f(x) = 1 \neq 2 = f(2)$$
$$\lim_{x\to3^-} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x\to3^+} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x\to3} f(x) = 2 = f(3)$$
$$\lim_{x\to4^-} f(x) = 1 \neq 2 = f(4)$$



A função f é contínua num ponto $x = a$ se, e somente se, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Deste modo, f não é contínua nos pontos $x = 1$, $x = 2$ e $x = 4$. Neste último, f não é contínua à esquerda. E, em $x = 0$, f é contínua à direita.

Só isso.

Obrigado!