UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA

DISCIPLINA: Cálculo I (MAT 065) SEMESTRE: 2010.2

PROFESSOR: *Adriano Cattai* DATA: 07/02/2011

NOME: ____

2ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *Utilize caneta* ***preta*** *ou* ***azul****. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
2. *É proibido o uso de calculadora e celulares;*
3. *Solução ilegível é considerada como errada;*
4. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
5. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
6. *Não responder na folha de questões.*

"A Matemática é o mais maravilhoso instrumento criado pelo gênio do homem para a descoberta da verdade." (Laisant)

Boa Prova!

Q. 1 (2,0)***.*** Escreva a definição de limite, no ponto $x = a$, para uma função f. Em seguida, mostre pela definição que $\lim\limits_{x\to -2} x^2 = 4$.

Idem prova 1!

Q. 2 (3,0)***.*** Sem o uso da regra de L'Hospital, avalie os limites abaixo:
(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$; (b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen}(a)}{h}$; (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+1)-\ln(x)]$.
Em seguida, recalcule cada limite acima com o uso da regra de L'Hospital.

Sem uso da regra de L'Hospital, ver prova 1. Com o uso da regra de L'Hospital, segue abaixo:

(a) Como $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6} = \lim\limits_{x\to 3} x^2-4x+3 = 0$, temos uma indeterminação $0/0$. Assim, podemos derivar, em função de x, numerador e denominador, obtendo:

$$\begin{aligned}
\frac{[\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}]'}{[x^2-4x+3]'} &= \frac{\frac{1}{2}(x^2-2x+6)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x-2)-\frac{1}{2}(x^2+2x-6)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+2)}{2x-4}\\
&= \frac{x-1}{(2x-4)\sqrt{x^2-2x+6}}-\frac{x+1}{(2x-4)\sqrt{x^2+2x-6}}\\
&= \frac{1}{2x-4}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+6}}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-6}}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{2x-4}\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+6}}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-6}}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

(b) Como $\lim\limits_{h\to 0} \operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen}(a) = \lim\limits_{h\to 0} h = 0$, derivamos, em função de h, numerador e denominador, obtendo:

$$\lim_{h\to 0}\frac{[\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen}(a)]'}{[h]'} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-0}{1} = \cos(a).$$

(c) Como $x[\ln(x+1)-\ln(x)] = x\cdot\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$, temos $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, ou seja, o limite $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+1)-\ln(x)]$ é uma forma indeterminada $0/0$, quando escrito como $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. Pela regra de L'Hospital, temos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1} = 1.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+1)-\ln(x)] = 1$.

Q.* 3** (2,1).*** Escreva, de forma mais simples possível, a:

(a) derivada de $f(x)=\sqrt[3]{\sqrt{2x^2-x}}$;

(b) 20^a derivada da função $g(x)=\dfrac{1}{x}$;

(c) derivada de $h(x)=\ln(\text{sen}^2(x))$.

(a) Como $y=\sqrt[3]{\sqrt{2x^2-x}}=\left((2x^2-x)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=(2x^2-x)^{\frac{1}{6}}$, temos: $y'=\dfrac{1}{6}\cdot\left(2x^2-x\right)^{-\frac{5}{6}}\cdot(4x-1)=\dfrac{4x-1}{6\cdot\sqrt[6]{(2x^2-x)^5}}$.
(b) Como $f'(x)=\dfrac{-1}{x^{1+1}}$, $f''(x)=\dfrac{-1\cdot(-2)}{x^{2+1}}$, $f'''(x)=\dfrac{-1\cdot(-2)\cdot(-3)}{x^{3+1}}$ e $f^{(4)}(x)=\dfrac{-1\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)}{x^{4+1}}$, podemos intuir que $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}}$. Assim, $f^{(20)}(x)=\dfrac{(-1)^{20}\cdot 20!}{x^{20+1}}=\dfrac{20!}{x^{21}}$.
(c) Deixando $h(x)=\ln(\text{sen}^2(x))$, temos $h'(x)=\dfrac{1}{\text{sen}^2(x)}\cdot 2\text{sen}(x)\cos(x)=2\text{cotg}(x)$. Agora, se escrevermos $h(x)=\ln(\text{sen}^2(x))=2\ln(\text{sen}(x))$, temos $h'(x)=2\cdot\dfrac{1}{\text{sen}(x)}\cdot\cos(x)=2\text{cotg}(x)$.

Q.* 4** (1,0).*** Mostre que: *se* $f(x)=x^n$*, então* $f'(x)=n\cdot x^{n-1}$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$.

Veja nas notas de aula do dia ??/??/2010.

Q.* 5** (1,9).*** Defina função contínua e analise se a função $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|2x-6|}{x^2-9}, & x\neq 3\\ 1, & x=3\end{cases}$ é contínua.

A definição em termos de limites é: *Uma função f é dita contínua em um ponto $x=x_0$ de seu domínio se* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Note que esta definição impõem duas premissas, a saber: (i) $\exists\ f(x_0)$, e (ii) $\exists\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Para decidir se a função f, dada, é contínua, devemos eliminar o módulo e analisar a existência do limite em $x=3$ visto que, para todo $x\neq 3$ temos que $\dfrac{|2x-6|}{x^2-9}$ é contínua. Assim, temos:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)}, & x>3\\ \dfrac{-2(x-3)}{(x-3)(x+3)}, & x<3\\ 1, & x=3\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2}{x+3}, & x>3\\ \dfrac{-2}{x+3}, & x<3\\ 1, & x=3\end{cases},$$

donde f não é contínua, apenas, em $x=3$, visto que $\nexists\ \lim\limits_{x\to 3} f(x)$ pois $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\dfrac{1}{3}$ e $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\dfrac{1}{3}$.

Apenas uma questão extra, respondida corretamente, entrará no somatório.

Q.* 6** (1,5 (extra)).*** Use o teorema do valor intermediário para mostrar que toda função polinomial, de grau ímpar, tem, pelo menos, uma raiz real.

Ver na prova 1.

Q.* 7** (1,5 (extra)).*** Determine o(s) ponto(s) em que a reta tangente à curva $C: x^2+xy+y^2-3y=9$ é horizontal.

Sabemos que a reta tangente é horizontal nos pontos em que $m_t=y'=0$. Derivando implicitamente a equação que descreve C, temos que:

$$2x+xy'+y+2yy'-3y=0\Rightarrow y'=\frac{-2x-y}{x+2y-3}\quad(*).$$

Se $x+2y-3\neq 0$, então $y'=0\Leftrightarrow y=-2x$. $(**)$. Substituindo em C, temos que:

$$3x^2+6x-9=0\Rightarrow x^2+2x-3=0\Rightarrow x=3\text{ ou }x=1.$$

Substituindo estes valores em $(**)$, obtemos: $P_1(-3;6)$ e $P_2(1;-2)$. Portanto, a reta tangente é horizontal nos pontos P_1 e P_2, pois satisfazem a condição $(*)$.