UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA

DISCIPLINA: Cálculo I (MAT 065) SEMESTRE: 2010.2

PROFESSOR: *Adriano Cattai* DATA: 29/11/2010

NOME: ____

1ª AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

INSTRUÇÕES:

1. *Utilize caneta **preta** ou **azul**. Todas as questões devem possuir respostas justificadas;*
2. *É proibido o uso de calculadora e celulares;*
3. *Solução ilegível é considerada como errada;*
4. *Não use somente símbolos matemáticos, explique os passos da solução em Português claro e sucinto;*
5. *Todas figuras devem ser acompanhadas de textos explicativos;*
6. *Não responder na folha de questões.*

"Na Matemática, para saborear bem o fruto, é preciso conhecer bem suas raízes." (autor desconhecido)

Boa Prova!

Q. 1 (3,0)***.*** Escreva a definição de limite, no ponto $x = a$, para a função f. Em seguida, mostre pela definição que $\lim_{x\to 5} x^2 = 25$.

Dizemos que o limite da função $f(x)$, quando x tende a a, é igual ao número real L, se qualquer que seja $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que para todo x, satisfazendo $0 < |x - a| < \delta$, vale $|f(x) - a| < \varepsilon$. Simbolicamente escrevemos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, \delta > 0; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Para mostrarmos que $\lim_{x\to 5} x^2 = 25$, precisamos mostrar que $\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, \delta > 0; 0 < |x - 5| < \delta \Rightarrow |x^2 - 25| < \varepsilon$. Para tanto, observemos que:

$$|x^2 - 25| = |(x-5)(x+5)| = |x-5| \cdot |x+5|.$$

Como $0 < |x-5| < \delta$, restringindo δ entre 0 e 1, temos que $0 < |x-5| < 1$, donde $-1 < x - 5 < 1$, ou seja, $9 < x + 5 < 11$. Assim, temos que $|x+5| < 11$. Logo,

$$|x^2 - 25| = |(x-5)(x+5)| = |x-5| \cdot |x+5| < \delta \cdot 11.$$

Portanto, assumindo $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{11}\right\}$, mostramos o limite:

$$\begin{aligned}\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, \delta > 0; 0 < |x-5| < \delta \Rightarrow |x^2 - 25| &= |x-5| \cdot |x+5| \\ &< \delta \cdot 11 = \frac{\varepsilon}{11} \cdot 11 \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Q. 2 (2,4)***.*** Sem o uso da regra de L'Hospital, avalie os limites abaixo:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6} - \sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$; (b) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+h) - \operatorname{sen}(a)}{h}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x[\ln(x+1) - \ln(x)]$.

(a) Perceba que $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6} - \sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$ é uma forma indeterminada $0/0$. Assim, façamos o seguinte cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2-2x+6} - \sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3} &= \frac{[\sqrt{x^2-2x+6} - \sqrt{x^2+2x-6}] \cdot [\sqrt{x^2-2x+6} + \sqrt{x^2+2x-6}]}{[x^2-4x+3] \cdot [\sqrt{x^2-2x+6} + \sqrt{x^2+2x-6}]} \\ &= \frac{-4(x-3)}{(x-1)(x-3)(\sqrt{x^2-2x+6} + \sqrt{x^2+2x-6})} \\ &= \frac{-4}{(x-1)(\sqrt{x^2-2x+6} + \sqrt{x^2+2x-6})}.\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 3} \dfrac{-4}{(x-1)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} = -\dfrac{1}{3}$.

(b) Como $\mathrm{sen}(a+h) = \mathrm{sen}(a)\cos(h) + \mathrm{sen}(h)\cos(a)$, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{sen}(a+h)-\mathrm{sen}(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{sen}(a)\cos(h)+\mathrm{sen}(h)\cos(a)-\mathrm{sen}(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{sen}(a)[\cos(h)-1]+\mathrm{sen}(h)\cos(a)}{h} \\
&= \mathrm{sen}(a)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(a)\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{sen}(h)}{h} = \mathrm{sen}(a)\cdot 0 + \cos(a)\cdot 1 = \cos(a).
\end{aligned}$$

(c) Como $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, temos que $\lim_{x\to+\infty} x[\ln(x+1)-\ln(x)]$ é uma forma indeterminada $\infty-\infty$. Agora, já que $x[\ln(x+1)-\ln(x)] = x\cdot\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, temos:

$$\lim_{x\to+\infty} x[\ln(x+1)-\ln(x)] = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] = \ln(e) = 1.$$

Q. 3 (1,6). Usando o conceito de derivada, determine o ponto da curva $y = 2+x^2$ em que a reta tangente tem ângulo de inclinação $\frac{\pi}{3}$. Faça o esboço gráfico.

Pela definição de derivada, no ponto x_0, temos:

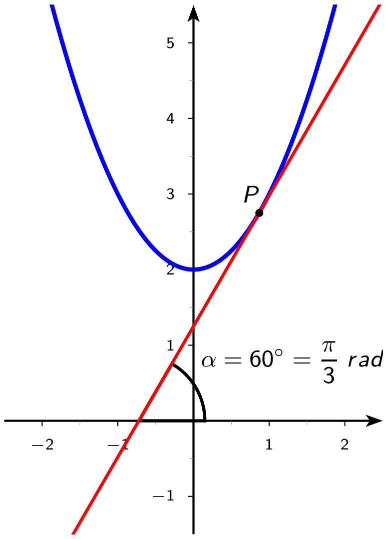
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

Ainda, $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = 2 + (x_0+\Delta x)^2 - [2+x_0^2] = \Delta x(2x_0+\Delta x)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0.
\end{aligned}$$

Ou seja, $x_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Logo, $y_0 = 2 + x_0^2 = 2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{11}{4}$.

Portanto, o ponto da curva $y = 2+x^2$ em que a reta tangente tem ângulo de inclinação $\frac{\pi}{3}$ é $P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{11}{4}\right)$.



Q. 4 (1,2). Exiba o gráfico de uma função $f : [-2,6] \to \mathbb{R}^*_-$ tal que:

(1) $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -2$

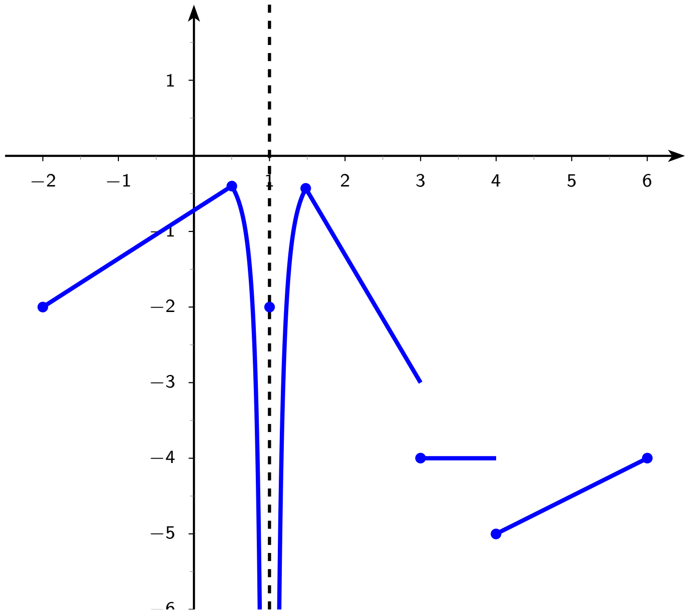
(2) $\lim_{x\to 6^-} f(x) = -4$

(3) f descontínua em $x = 3$

(4) $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$

(5) $\nexists \lim_{x\to 4} f(x)$

(6) $f(4) = -5$



Q. 5 (1,8)**.** Use o teorema do valor intermediário para mostrar que toda função polinomial, de grau ímpar, tem, pelo menos, uma raiz real.

O teorema do valor intermediário diz que se uma função f é contínua em todo $\mathbb{R}$ e se existem a e b, com $a \neq b$, tais que $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existem pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Assim, como todo função polinomial $f(x) = p_n(x)$ é contínua, que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} p_n(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} a_n x^n$ e que n é ímpar, então:

$$\lim_{x \to +\infty} p_n(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} p_n(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a_n < 0 \\ -\infty, & \text{se } a_n > 0 \end{cases}$$

Supondo que $a_n > 0$, temos $\lim\limits_{x \to +\infty} p_n(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} p_n(x) = -\infty$. Como $P_n(x)$ é contínua em todo $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, logo existe, pelo menos algum número real x_0 que $P_n(x_0) = 0$. O caso $a_n < 0$, é análogo.

Q. 6 (1,0 (extra))**.** Use a definição de limite para mostrar que $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Análogo à questão 1, percebendo que $\left| x \cdot \text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) - 0 \right| = |x| \cdot \left| \text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$.