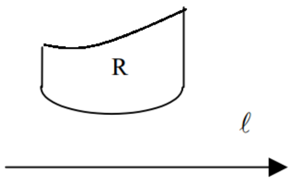
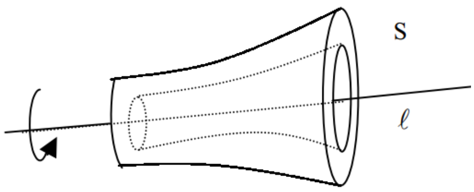
VOLUME DO SÓLIDO DE REVOLUÇÃO
(UMA PURA DIVERSÃO NO CÁLCULO INTEGRAL)

RESUMO

Dada uma região *R* plana e uma linha reta *l* contida no mesmo plano de *R*, girando-se *R* em torno de *l*, forma-se um sólido chamado de *sólido de revolução*.

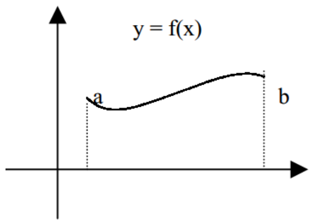


Área plana 1

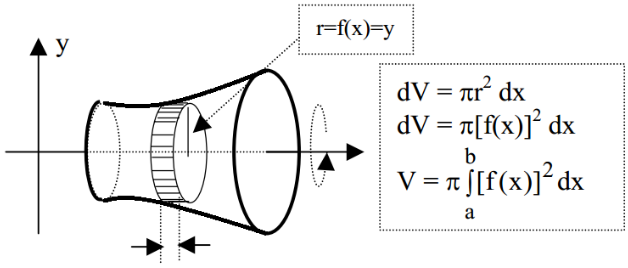


Sólido gerado pela Rotação.

1. Girando o gráfico de uma função $y = f(x)$, definida no intervalo $[a,b]$, em torno do eixo-x, temos:

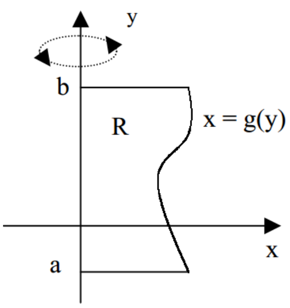


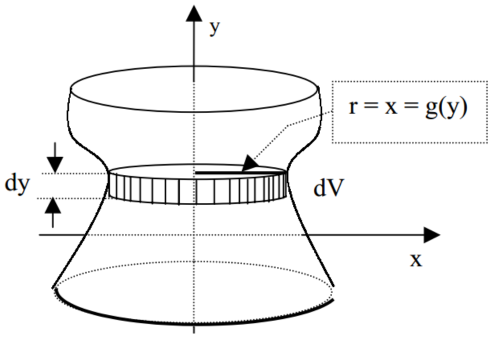
Área plana 2



Cálculo do elemento de volume

2. Se a região for girada em torno do eixo-y ao invés do eixo-x, teremos:





$$V = \pi \int_a^b [g(y)]^2 \, dy$$

3. Se a área de revolução é limitada por duas funções $y=f(x)$ e $y=g(x)$, tal que $f(x) > g(x)$, para todo $x \in [a,b]$, então teremos o elemento de volume do anel dado por:

$$dV = \pi\,[f(x)]^2 dx - \pi\,[g(x)]^2 dx = \pi\,\{\,[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\, dx$$

de forma que o volume é dado por

$$V = \int_a^b dV = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx$$

Note que o vão interno é descontado pela subtração dos dois volumes.

QUESTÕES

5) Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo Ox, da região R delimitada pelos gráficos das equações dadas abaixo:

a) $y = x+1,\ x=0,\ x=2$ e $y=0$

b) $y = x$ e $y = x^2$

c) $y = x^2$ e $y = x^3$

d) $y = \frac{1}{x},\ x=1,\ x=2,$ e $y=0$

e) $y = x^3,\ x=-1,\ x=1,$ e $y=0$

f) $y = x^2+1,\ x=0,\ x=2$ e $y=0$

g) $y = \sqrt{x-1},\ x=2,\ x=5$ e $y=0$

h) $y = \cos x,\ y = \operatorname{sen} x,\ x=0$ e $x = \frac{\pi}{4}$

6) Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo y = 2 da região limitada por $y = 1-x^2$; $y=2$; $x=-2$ e $x=2$

7) Calcular o volume gerado pela rotação da região $y = 3$, $1 \le x \le 3$, em torno da reta $y = 2$

8) Calcular o volume gerado pela rotação da região $y = 1/2\,x + 2$, $1 \le x \le 2$, em torno da reta $y = 1$

9) Considere a região R limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x$. Dê apenas a expressão da integral (indicando os limites de integração), que permite calcular o volume do sólido obtido, nos seguintes casos:

a) R gira em torno de OY; b) R gira em torno de $x = -1$; c) R gira em torno de $y = 2$;

10) Considere R a região limitada pela curva $y = 1 + x^2$ e a reta $y = 2$, no 1º quadrante. Dê a expressão da integral (indicando os limites de integração) que permite calcular o volume gerado pela rotação de R em torno de:

a) 0Y; b) $y = 3$; c) $x = -1$

11) Considere a região R limitada pela curva $y = \frac{1}{x}$ as retas $x = 2$ e $y = 2$. Esboce a região R e

a) Encontre o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno de $y = 2$.

b) Dê a expressão da integral (indicando os limites de integração) que permite calcular o volume gerado pela rotação de R em torno de:

b_1) $y = 0$; b_2) $y = 3$; b_3) $x = 0$; b_4) $x = 2$

RESPOSTAS

5) a) $\frac{26\pi}{3}$ u.v. b) $\frac{2\pi}{15}$ u.v. c) $\frac{2\pi}{35}$ u.v d) $\frac{\pi}{2}$ u.v e) $\frac{2\pi}{7}$ u.v f) $\frac{206\pi}{15}$ u.v g) $\frac{15\pi}{2}$ u.v.

h) $\frac{\pi}{2}$ u.v.

6) $\frac{412\pi}{15}$ u.v. 7) 2π u.v. 8) $\frac{37\pi}{12}$ u.v.

9) a) $V = \pi\int_0^1 (y^2 - y^4)dy$ b) $\pi\int_0^1 [(y+1)^2 - (y^2+1)^2]dy$ c) $\pi\int_0^1 [(2-x)^2 - (2-\sqrt{x})^2]dx$

10) a) $\pi\int_1^2 (\sqrt{y-1})^2\,dy = \pi\int_1^2 (y-1)dy$ b) $\pi\int_0^1 [(3-(x^2+1))^2 - 1]dx = \pi\int_0^1 [(2-x^2)^2 - 1]dx$ c) $\pi\int_1^2 [(\sqrt{y-1}+1)^2 - 1]dy$

11) a) $(\pi(15/2 - 8\ln 2))$u.v. b_1) $\pi\int_{1/2}^{2} (4 - \frac{1}{x^2})dx$; b_2) $\pi\int_{1/2}^{2} ((3-\frac{1}{x})^2 - 1)dx$; b_3) $\pi\int_{1/2}^{2} (4 - \frac{1}{y^2})dy$

b_4) $\pi\int_{1/2}^{2} (2 - \frac{1}{y})^2 dy$