UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
3ª LISTA DE EXERCÍCIOS DE CÁLCULO II-A
Última atualização 04-04-2004

1) Determine e represente graficamente o domínio de cada uma das funções:

a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2-1} + \sqrt{y-x^2}$

b) $f(x,y) = \sqrt{y^2-4}.\ln(x-y)$

c) $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2)$

d) $f(x,y) = \ln\left[\dfrac{x^2+y^2-1}{x}\right]$

e) $f(x,y) = \operatorname{arc\,sec}(\dfrac{x^2}{4} + y^2)$

2) Sejam a função f(x,y) = arccos(x-y) e o ponto P = (1, ½) do seu domínio. Determine e represente graficamente a curva de nível que passa por esse ponto.

3) Determine e represente graficamente as curvas de nível k = 0, k = 1, k =5, k = -1, k = -5 da função f(x, y) = xy.

4) Determine o domínio; determine e trace as interseções do gráfico com os planos coordenados; determine e trace as curvas de nível; e esboce o gráfico das funções:

a) $f(x,y) = 16 - x^2 - y^2$

b) $f(x,y) = 9x^2 + 4y^2$

c) $f(x,y) = x^2$

d) $f(x,y)=\dfrac{1}{1+y^2}$

e) $f(x,y) = 8 - 2x - 4y$

f) $f(x,y)=\dfrac{4}{x^2+4y^2}$

g) $f(x,y)=\sqrt[4]{x^2+y^2}$

5) Determine os limites a seguir:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - x^2y + y^2x - y^3}{x^2+y^2}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{(x+y-4)(x^2+xy)}{(x-1)+(y-3)}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} y\,\mathrm{sen}\left(\frac{y}{x-1}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

6) Mostre que $\displaystyle\lim_{P\to P_o} f(x,y)$ não existe se:

a) $f(x,y) = \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$ e $P_o = (0,0)$

b) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}$ e $P_o = (0,0)$

c) $f(x,y) = \dfrac{y^3 - (x-2)^4}{2(x-2)^3 + y^3}$ e $P_o = (2,0)$

d) $f(x,y) = \dfrac{(x+1)y}{(x+1)^2 + y^2}$ e $P_o = (-1, 0)$

e) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$ e $P_o = (0,0)$

7) Determine em que pontos $(x,y) \in R^2$ a função f é contínua:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)y}{(x+1)^2 + y^2} & ;\ \text{se } (x,y) \neq (-1,0) \\ 0 & ;\ \text{se } (x,y) = (-1,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2} + 1 & ;\ \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & ;\ \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

8) Calcule, caso existam, as derivadas parciais das funções nos pontos indicados.

a) $f(x,y) = e^x \ln(x.y)$; $P_o(1,2)$

b) $f(x,y) = x\cos(\dfrac{x}{y} + \pi)$; $P_o(0,1)$

c) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\sqrt{4x^2 - y^2}$; $P_o(1,1)$

d) $f(x,y,z) = \sqrt{x} + (\operatorname{sen}^2 y)\operatorname{tg} z$; $P_o(4, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4})$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 + 2y}{x^2 - y} & ;\ \text{se } y \neq x^2 \\ 3 & ;\ \text{se } y = x^2 \end{cases}$; $P_o(1,0)$ e $P_1(1,1)$

f) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$; $P_o = (0,0)$

9) Considere a função $z = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$. Mostre que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

10) Seja ϕ: R → R, uma função diferenciável tal que $\phi'(1) = 4$ e $\phi'(2) = -1$ e seja $g(x,y) = \phi(\dfrac{x}{y})$. Calcule:

a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(2,2)$

b) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(6,3)$

11) Considere a função em (x,y), $w = xy + z^4$, com $z = f(x,y)$. Se $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 4$ e $f(1,1) = 1$, calcule $\dfrac{\partial w}{\partial x}(1,1)$.

12) Seja $f(x,y) = \displaystyle\int_{x^2}^{2y^2} e^{-t^2}\,dt$. Calcule:

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1)$

13) Determine a reta tangente, no ponto $P_o = (1,2)$, à curva que é intersecção da superfície $z = f(x,y) = ye^{-x^2}$ com o plano:
a) $x = 1$ b) $y = 2$

14) Uma placa de metal aquecida está situada em um plano xOy de modo que a temperatura T no ponto (x,y) é dada por $T(x,y) = 10(x^2 + y^2)^2$. Determine a taxa de variação de T em relação à distância, no ponto $P_O(1,2)$ no sentido positivo do eixo:
a) Ox b) Oy

15) A área, A, da superfície lateral de um cone circular reto de altura h e raio da base r é dada por $A = \pi.r\sqrt{h^2 + r^2}$.

a) Se r é mantido fixo em 3cm, enquanto h varia, encontre a taxa de variação de A em relação a h, no instante em que h = 7cm.

b) Se h é mantido fixo em 7cm, enquanto r varia, encontre a taxa de variação de A em relação a r, no instante em que r = 3cm.

16) Uma fábrica produz mensalmente x unidades de um produto A e y unidades de um produto B, sendo o custo mensal de produção conjunta dado por $C(x,y) = 15000 + \sqrt{2x^2 + 8y^2}$ reais. Num determinado mês, foram produzidas 2000 unidades de A e 1000 de B.

a) Calcule o custo de produção neste mês.

b) Determine $\frac{\partial C}{\partial x}$ e $\frac{\partial C}{\partial y}$, neste mês.

c) Usando o resultado do ítem b), o que é mais conveniente: aumentar a produção de A e manter a de B constante ou ao contrário? Justifique-se.

17) Uma função f (x,y) é harmônica se $f_{xx} + f_{yy} = 0$. Prove que a função $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ é harmônica.

18) Sendo $z = e^x \ln y + \operatorname{sen} x \cdot \cos y$, calcule $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

19) Considere $f(x,y)=\ln(xy^2)+\operatorname{arctg}(x^2-y)$.

a) calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,3)$.

b) Se x e y são funções de (u,v) tais que $x = uv + 2v$, $y(0,1) = 3$, $\dfrac{\partial y}{\partial u}(0,1)=2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,1)=-4$, calcule:

i) $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,1)$ ii) $\dfrac{\partial y}{\partial v}(0,1)$

20) Se $w = f(x-at)+g(x+at)$, com f e g dotadas de derivadas mostre que w satisfaz a equação da onda $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

21) Encontre a diferencial das funções:

a) $f(x,y)=\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ b) $f(x,y,z)=xe^{yz}+ye^{xz}$

22) Determinar o plano tangente e a reta normal à superfície $z = f(x,y)$ no ponto (x_0, y_0).

a) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$, $(x_0, y_0) = (1,1)$. b) $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $(x_0, y_0) = (e, 0)$.

23) Determine o plano tangente à superfície $z = xy$ que é paralelo ao plano $2x + 6y - 2z = 5$

24) Seja $f(x,y,z)=g\left(e^{xyz}, x^2y^2z^2\right)$. Determine o valor da constante β, sabendo que $\beta\, x\dfrac{\partial f}{\partial x}=y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

25) Seja f(u,v) uma função diferenciável tal que $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,7)=-1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,7)=3$, $\dfrac{\partial f}{\partial u}(5,2)=1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(5,2)=-2$.

a) Se $g(x,y) = f(x^2y + y^2, y^3x)$, calcule $\dfrac{\partial g}{\partial x}(2,1)$ $\dfrac{\partial g}{\partial y}(2,1)$.

b) Se $h(x, y,z) = f(x + y - z, x +2y + 2z)$, calcule $\dfrac{\partial h}{\partial x}(1,1,2)$, $\dfrac{\partial h}{\partial y}(1,1,2)$, $\dfrac{\partial h}{\partial z}(1,1,2)$.

26) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o, y_o)$ sendo dados:

a) $f(x,y) = e^{x^2 - y^2}$, $(x_o, y_o) = (1,1)$ e $\vec{u}$ é o versor de $(3,4)$.

b) $f(x,y) = \text{arctg}\frac{x}{y}$; $(x_o, y_o) = (3,3)$ e $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

c) $f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$; $(x_o, y_o) = (3,2)$ e $\vec{u} = \frac{5}{13}\vec{i} + \frac{12}{13}\vec{j}$

27) Para cada função e o ponto indicado determine:

i) Um vetor unitário na direção da derivada direcional máxima.

ii) O valor máximo da derivada direcional.

a) $f(x,y) = x^2 - 7xy + 4y^2, P_o(1,-1)$

b) $f(x,y) = x^2 - y^2 - \text{sen}\, y, P_o(1, \frac{\pi}{2})$

28) Uma chapa de metal aquecida está situada em um plano xOy de tal modo que a temperatura T é inversamente proporcional à distânciada origem. Se a temperatura em P(3,4) é de 100º, determine a taxa de variação de T em P na direção do vetor $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$. Em que direção e sentido T cresce mais rapidamente em P? Em que direção a taxa de variação é nula?

29) O potencial elétrico V em um ponto P(x,y,z) num sistema de coordenadas retangulares é dado por $V=x^2+4y^2+9z^2$. Determine a taxa de variação de V em P(2,-1,3) na direção de P para a origem. Determine a direção e sentido que produz taxa máxima de variação de V em P. Qual a taxa máxima de variação em P?

30) Se z é função de x e y definida implicitamente pela equação $y + x^{(z-1)} + y^2 z = 1$, determine $\vec{\nabla} z(2,0)$.

31) Ache um vetor normal e a equação da reta tangente a cada curva no ponto indicado:

a) $x^2 + y^2 = 2$, $P_o(1,1)$

b) $e^{2x-y} + 2x + 2y = 4$, $P_o(1/2, 1)$

32) Encontre a equação do plano tangente e da reta normal a cada superfície abaixo, nos pontos indicados:

a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ em $P = (1,1,1)$

b) $xyz = 6$ no ponto cuja projeção no plano $y = 0$ é $(1,0,3)$

c) $\cos(xy) + \text{sen}(yz) = 0$ em $P = (1, \pi/6, -2)$

d) $x^3 + y^3 + z - 6xy = 0$ para $x = y = 2$

e) $g(x,y) = x^y$ em $(1,1,1)$

33) Dada a superfície $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, determine as equações dos planos tangentes que são paralelos ao plano $x + 4y + 6z = 0$.

34) Ache os pontos da superfície $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ para os quais os planos tangentes são paralelos aos planos coordenados.

35) Encontre o vetor direção da reta tangente no ponto dado da curva C que é interseção das superfícies:

a) $xz + 2x + 4z = 5$ e $4xy + 3y + 6z = 56$, no ponto $(2,5,1/6)$

b) $x^2 - 2xz + y^2z = 1$ e $3xy + 2yz = -6$, no ponto $(1,-2,0)$

36) Calcule as seguintes integrais iteradas:

a) $\int_1^2 \int_0^{2x} xy^3 dydx$

b) $\int_0^1 \int_0^{y^2} e^{(x/y)} dxdy$

c) $\int_0^{\pi} \int_0^{y^2} \operatorname{sen}(\frac{x}{y}) dxdy$

d) $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dxdy$

e) $\int_0^1 \int_x^1 \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} dydx$

f) $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{x}{y} 3^{(x^2/y^2)} dydx$

g) $\int_0^{\sqrt[6]{\pi}} \int_{x^3}^{\sqrt{\pi}} x^2 \operatorname{sen}(y^2) dydx$

h) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{y} \cos(2y)\sqrt{4 - \operatorname{sen}^2(x)}dxdy$

37) Calcule:

a) $\iint_R x^2 \sqrt{9 - y^2} dA$, onde R é a região do plano limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 9$.

b) $\iint_R \operatorname{sen} x.dA$, onde R é a região do plano limitada pelas retas $y = 2x$, $y = x/2$ e $x = \pi$.

c) $\iint_R \cos(x + y)dA$, onde R é a região plana limitada pelas retas $y = x$, $x = \pi$ e $y = 0$.

38) Encontre (por integração dupla), a área limitada pelas curvas:

a) $y = x^3$ e $y = x^2$ b) $y = x^2 - 9$ e $y = 9 - x^2$

39) Calcule de duas maneiras $\iint_R xy\,dA$, onde R é a região do plano xoy limitada por $y = x^2$ e $y = 2 + x$.

40) Encontre (por integração dupla), o volume do sólido:

a) no 1° octante limitado pelo plano z = 8 - x - 2y
b) abaixo do plano z = 4y e acima do círculo $x^2 + y^2 = 16$ no plano xy.
c) limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + z^2 = 4$
d) limitado por $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$; $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.
e) situado no 1^0 octante e limitado por $z = 4 - y^2$, $y = 2x$ e $x = 0$.
f) situado no 1^0 octante e limitado por $z = 4 - y^2$, $y = 0$, $y = 2x$ e $x = 1$.