LISTA DE EXERCÍCIOS

— CÁLCULO INTEGRAL —

Prof. ADRIANO PEDREIRA CATTAI

Somos o que repetidamente fazemos. A excelência portanto, não é um feito, mas um hábito. *Aristóteles*

Comprimento de Arco

(*Atualizada em 2 de outubro de 2014*)

NOME: ______________________________ DATA: ____/____/______

Sumário

1 Comprimento de Arco

Q 1 (a) Seja $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ cujo gráfico descreve o arco AB, em que $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$. Mostre que seu comprimento é dado por

$$\ell(f, a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x.$$

(b) Seja $x = g(y)$ uma função contínua no intervalo $[c, d]$ cujo gráfico descreve o arco CD, em que $C(g(c), c)$ e $D(g(d), d)$. Mostre que seu comprimento é dado por

$$\ell(g, c, d) = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, \mathrm{d}y.$$

Q 2 Em cada caso, dê a expressão em integral (não calcule) que determina o coprimento de arco indicado. Exiba o gráfico de tal arco de curva.

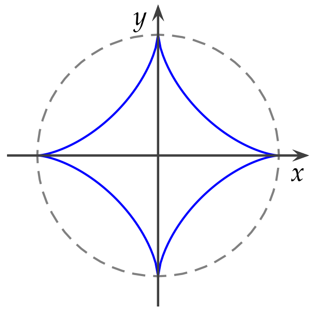
(a) $y = x^2$, $-2 \leq x \leq 4$;
(b) $y = 5 - x^2$, $-2 \leq x \leq 1$;
(c) $xy = 4$, $1 \leq x \leq 4$;
(d) $y = 2x - x^2$, $0 \leq x \leq 2$;
(e) $y = \ln(x)$, $1 \leq x \leq 4$;
(f) $y = 2^{-x}$, $-2 \leq x \leq 1$.

Q 3 Determine o comprimento do arco especificado em cada curva dada.

(a) $y = \ln(1 - x^2)$, $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$;
(b) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}$, $1 \leq x \leq 2$;
(c) $y = 1 - \ln(\operatorname{sen}(x))$, $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$;
(d) $(y - 1)^2 = (x + 1)^3$, $0 \leq x \leq 1$;
(e) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \leq x \leq 1$;
(f) $x = \frac{y^3}{3} + \frac{1}{4y}$, $1 \leq y \leq 3$;
(g) $y = \frac{(2 + x)^{3/2}}{3}$, $0 \leq x \leq 3$;
(h) $y = \frac{2(1 + x^2)^{3/2}}{3}$, $0 \leq x \leq 3$.

Q 4 Mostre que a cincunferência de raio r tem comprimento $2\pi r$.

Q 5 A curva dada pela equação $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ chama-se *astróide* ou *hipociclóide* de quatro cúspides em que a indica o raio do círculo que a circunscreve, como ilistra a figura. Determine o comprimento de arco da astróide quando $a = 1$.



Atenção: Veja que esse exercício implicará numa integral imprópria.

Saiba Mais: http://mathworld.wolfram.com/Astroid.html

2 Wolfram | Alpha

O Wolfram | Alpha é um mecanismo de conhecimento computacional desenvolvido por Stephen Wolfram e sua empresa Wolfram Research. Excelente ferramenta que se demonstra como uma verdadeira fonte dinâmica de conhecimento.

Acesse pelo endereço http://www.wolframalpha.com/ ou baixe seu aplicativo para iOS ou Android.

O comando "**arclength f(x), x=a..b**" determinará a integral $\int_a^b \sqrt{1 + [y']^2}\, dx$, que é o comprimento de arco da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ e, além disso, exibirá o gráfico da função destacando o arco indicado.

Nota: "comprimento de arco" em inglês é "arc length".

3 Referências

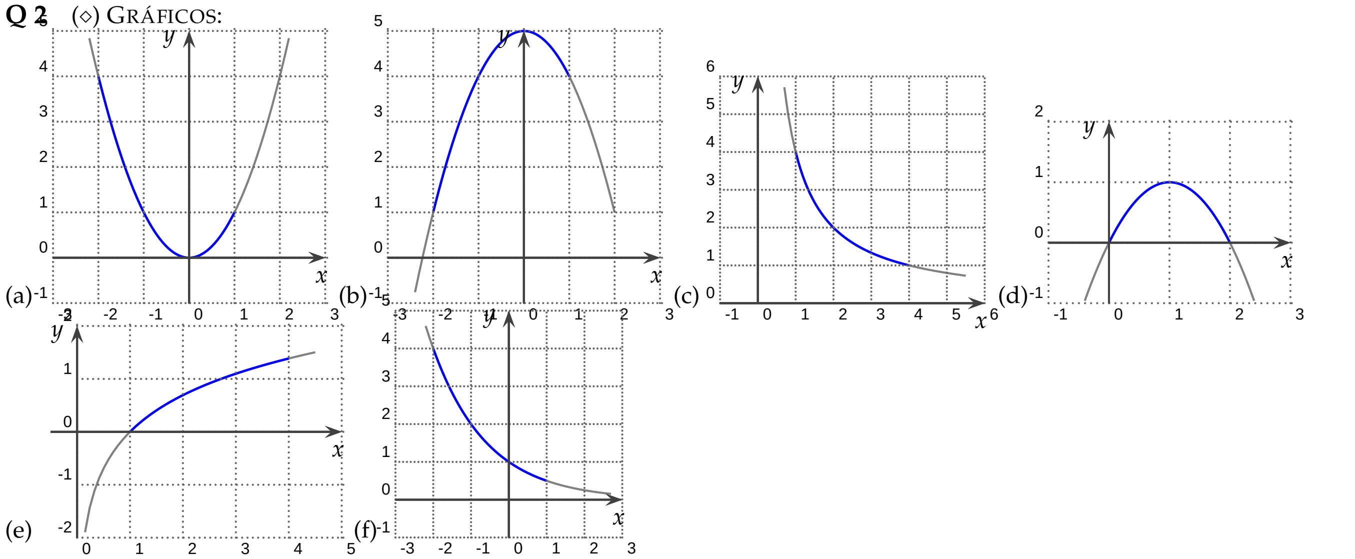
1. James Stwart – Cálculo;
2. Louis Leithold – O Cálculo com Geometria Analítica;
3. Piskunov N. – Cálculo Diferencial e Integral;
4. Diva Flemming – Cálculo A;
5. Eliana Prates – UFBA.

4 Respostas dos Exercícios

✉ Caso encontre alguma divegência entre a sua resposta e a digitada aqui, não entre em pânico. Veja se alghum ajuste algébrico encerra essa divergência. Ainda persistindo, confira suas contas com auxílio do WolframAlpha pelo endereço http://www.wolframalpha.com/ ou me consulte.
Identificando algum erro nas respostas apresentadas, ficarei muito grato com sua coleboração enviando seu comentário para didisurf@gmail.com ou, preferencialmente, me informe pessoalmente.

☺ **Q 1** Cadê o livro ou os apontamentos?

☺ **Q 2** (◇) GRÁFICOS:



(◇) EXPRESSÕES:
(a) $y' = 2x$, $\int_{-2}^{1} \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$; (b) $y' = -2x$, $\int_{-2}^{1} \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$; (c) $y' = \dfrac{-4}{x^2}$, $\int_{1}^{4} \dfrac{\sqrt{16+x^4}}{x^2}\,\mathrm{d}x$; (d) $y' = 2-2x$, $\int_{0}^{2} \sqrt{5-8x+4x^2}\,\mathrm{d}x$; (e) $y' = \dfrac{1}{x}$, $\int_{1}^{4} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$; (f) $y' = -\ln(2)\cdot 2^{-x}$, $\int_{-2}^{1} \sqrt{1+\ln^2(2)\cdot 2^{-2x}}\,\mathrm{d}x$.

☺ **Q 3** (a) $\ell = \ln\left(\dfrac{21}{5}\right) - \dfrac{1}{2}$ com $y' = \dfrac{2x}{x^2-1}$ e $1+(y')^2 = \dfrac{(x^2+1)^2}{(x^2-1)^2}$; (b) $\ell = \dfrac{123}{32}$ com $y' = x^3 - \dfrac{1}{4x^3}$ e $1+(y')^2 = \dfrac{(4x^6+1)^2}{16x^6}$; (c) $\ell = \ln\left|\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}}\right|$ com $y' = -\operatorname{cotg}(x)$ e $1+(y')^2 = \operatorname{cossec}^2(x)$; (d) $\ell = \dfrac{22\sqrt{22}-13\sqrt{13}}{27}$ com $y' = \dfrac{3\sqrt{x+1}}{2}$ e $1+(y')^2 = \dfrac{9x+13}{4}$; (e) $\ell = \dfrac{e^2-1}{2e}$ com $y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $1+(y')^2 = \dfrac{(e^x+e^{-x})^2}{4}$; (f) $\ell = \dfrac{53}{6}$ com $y' = x^2 - \dfrac{1}{4x^2}$ e $1+(y')^2 = \dfrac{16x^8+8x^4+1}{16x^4}$; (g) $\ell = 9-2\sqrt{6}$ com $y' = \dfrac{\sqrt{x+2}}{2}$ e $1+(y')^2 = \dfrac{x+6}{4}$; (h) $\ell = 21$ com $y' = 2x\sqrt{x^2+1}$ e $1+(y')^2 = (2x^2+1)^2$.

☺ **Q 4** Tome o arco de circunferência $y = \sqrt{r^2-x^2}$, $-r \leq x \leq r$, cuja derivada é $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$. Basta então calcular $2\cdot\int_{-r}^{r} \dfrac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$ que obterá $2\pi r$. (Para obter a primitiva use a substituição trigonométrica $x = r\cdot\operatorname{sen}(\theta)$.)

☺ **Q 5** Pondo $y = \sqrt{(1-\sqrt[3]{x^2})^3}$ basta calcular $4\int_{0}^{1} \sqrt{1+[y']^2}\,\mathrm{d}x$. Temos $y' = \dfrac{-\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}}$ com $\sqrt{1+[y']^2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Daí $\ell = 4\lim\limits_{A\to 0}\int_{A}^{1} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = 6$.
Se a for qualquer valor positivo, $\ell = 6a$. Comprove!

Material escrito em $\LaTeX\,2_\varepsilon$, Cattai, 2 de outubro de 2014