LISTA DE EXERCÍCIOS
— CÁLCULO INTEGRAL —

Prof. ADRIANO PEDREIRA CATTAI

Somos o que repetidamente fazemos. A excelência portanto, não é um feito, mas um hábito. *Aristóteles*

Integral Definida e Cálculo de Área

(*Atualizada em 6 de março de 2016*)

NOME: ______________________________ DATA: ____/____/______

Sumário

1 Integral Definida

Q 1 Esboçando a região correspondente, calcule cada integral definida utilizando fórmula de cálculo de área da geometria elementar. Depois, compare seu resultado fazendo uso do TFC.

(a) $\displaystyle\int_0^3 4\,dx$; (b) $\displaystyle\int_0^4 x\,dx$; (c) $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{2}\,dx$; (d) $\displaystyle\int_0^2 2x+5\,dx$; (e) $\displaystyle\int_0^5 5-x\,dx$; (f) $\displaystyle\int_1^3 -2\,dx$; (g) $\displaystyle\int_{-2}^3 x-2\,dx$; (h) $\displaystyle\int_0^4 4-2x\,dx$.

Q 2 Em cada item, use os valores $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 3$ e $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = 5$ para calcular a integral definida.

(a) $\displaystyle\int_a^b f(x)+g(x)\,dx$; (b) $\displaystyle\int_a^b f(x)-g(x)\,dx$; (c) $\displaystyle\int_a^b -4\cdot f(x)\,dx$; (d) $\displaystyle\int_a^b 2\cdot f(x)-8\cdot g(x)\,dx$; (e) $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx$; (f) $\displaystyle\int_b^a g(x)\,dx$; (g) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx$; (h) $\displaystyle\int_b^a 9\cdot g(x)\,dx$.

Q 3 Identificando a região de integração, determine os valores a e b que maximizam o valor $\displaystyle\int_a^b x-x^2\,dx$.

Q 4 Analise cada afirmativa e julgue em verdadeiro ou falso.

(a) Se k é uma constante, então $\displaystyle\int_a^b k\,dx = k(b-a)$;

(b) Se f for integrável e k é uma constante, então $\displaystyle\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$;

(c) Se f e g forem integráveis, então $\displaystyle\int_a^b f(x) \pm g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$;

(d) Se f for integrável, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, em que $c \in [a,b]$;

(e) Se f e g forem integráveis tais que $f(x) \geq g(x), \forall\, x \in [a,b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$;

(f) Se f for contínua e compreendida entre dois números n e M, $\forall\, x \in [a,b]$ (isto é, $n \leq f(x) \leq M$), então $\displaystyle n\cdot(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M\cdot(b-a)$;

(g) Se f for contínua em $[a,b]$, então existe um número $c \in [a,b]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a)$.

Q 5 Esboçando o gráfico de cada função no integrando (para identificar os subintervalos de integração) calcule cada integral definida envolvendo valor absoluto.

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} |x+1|\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} |x^2-1|\,\mathrm{d}x$; (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |e^x-1|\,\mathrm{d}x$; (d) $\displaystyle\int_{0}^{2} |2x-1|\,\mathrm{d}x$; (e) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} |\operatorname{sen}(x)|\,\mathrm{d}x$.

Atenção: Lembre-se que $|\heartsuit| = \begin{cases} \heartsuit, & \text{se } \heartsuit \geq 0 \\ -\heartsuit, & \text{se } \heartsuit < 0 \end{cases}$.

Q 6 Enuncie o TFC e use-o para calcular as seguintes integrais definidas:

(a) $\displaystyle\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x$; (f) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$; (k) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\,\mathrm{d}x$; (p) $\displaystyle\int_0^3 3x^2-4x+1\,\mathrm{d}x$;

(b) $\displaystyle\int_1^3 -x^2+4x-3\,\mathrm{d}x$; (g) $\displaystyle\int_0^1 x(x^2+1)^3\,\mathrm{d}x$; (l) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$; (q) $\displaystyle\int_1^2 9x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x$;

(c) $\displaystyle\int_{-3}^0 x+2\,\mathrm{d}x$; (h) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$; (m) $\displaystyle\int_0^2 (1+2x)^3\,\mathrm{d}x$; (r) $\displaystyle\int_{-1}^1 2e^{2x}\,\mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x^3}\,\mathrm{d}x$; (i) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x$; (n) $\displaystyle\int_{-1}^0 -4x(1-2x^2)^3\,\mathrm{d}x$; (s) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1+x^3}{x^2}\,\mathrm{d}x$;

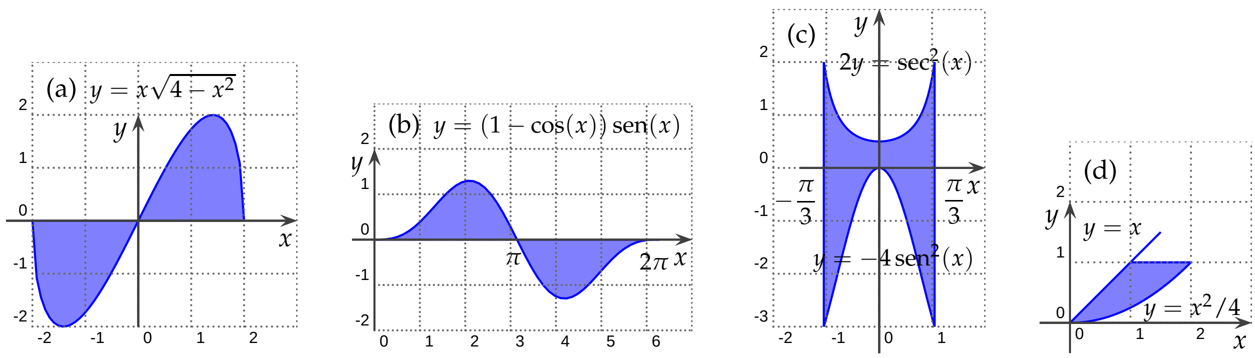
(e) $\displaystyle\int_0^4 4x-x^2\,\mathrm{d}x$; (j) $\displaystyle\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\,\mathrm{d}x$; (o) $\displaystyle\int_0^2 x^3+3x-1\,\mathrm{d}x$; (t) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2(x)\,\mathrm{d}x$.

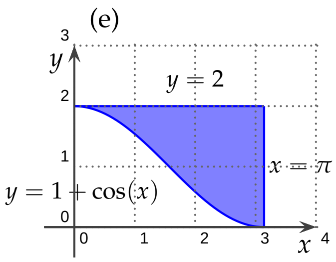
Q 7 Com o uso de integração, determine:

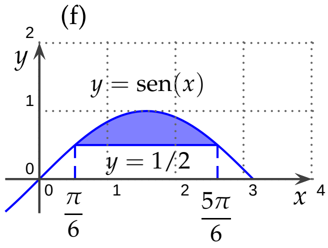
(a) a área do triângulo delimitado pelas retas $r: x+y=3$, $s: 2y=x$ e $t: y=2x$;

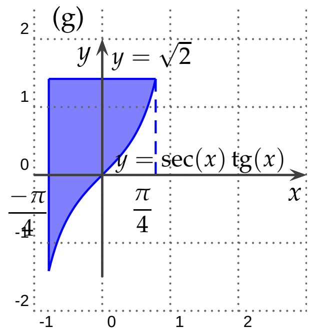
(b) a área do triângulo cujos vértices são os pontos $A(1,2)$, $B(2,1)$ e $C(3,3)$.

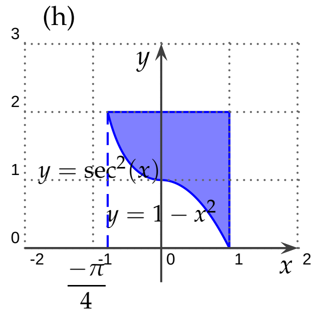
Q 8 Determine a área de cada região sombreada.











Q 9 Determine a área da região plana limitada simultaneamente pelas curvas.

(a) $y = x^2$ e $y = 2 - x$;
(b) $y = 5 - x^2$ e $y = x + 3$;
(c) $y = \ln(x)$, $x = 2$ e o eixo x;
(d) $x = 8 + 2y - y^2$, $y = 1$, $y = 3$ e $x = 0$;
(e) $xy = 4$ e $x + y = 5$;
(f) $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$ e $x = 2$;
(g) $y = e^{-x}$, $y = x + 1$ e $x = -1$;
(h) $y^2 = 2x$ e $x^2 = 2y$;
(i) $y = \ln(x)$, $x = 1$ e $x = 4$;
(j) $y = 2x$, $y = 1$ e $xy = 2$;
(k) $y = x^3 - 3x$ e $y = 2x^2$;
(l) $y = x^3$, $y = x^2 + 2x$;
(m) $xy = 9$, $y = 9x$ e $y = x$;
(n) $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$ e $y = 4$;
(o) elipse com semi eixos a e b;
(p) $x^2 + y^2 \leq 8$ e $y^2 = 2x$;
(q) $y = 4 - 3x^2$, $y = x$ e $y = -x$;
(r) $y = x^2$ e $y = \dfrac{4}{3 + x^2}$.

Q 10 Se uma função $f(x)$ satisfaz a equação $f(-x) = f(x), \forall\, x \in \operatorname{Dom}(f)$, isto é, o gráfico de $f(x)$ é simétrico em relação ao eixo y, então esta função é chamada de *função par* e, se uma função $g(x)$ satisfaz a equação $g(-x) = -g(x), \forall\, x \in \operatorname{Dom}(g)$, isto é, o gráfico de $g(x)$ é simétrico em relação à origem, então esta função é chamada de *função ímpar*. Por exemplo, as funções $f(x) = \cos(x)$ e $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ são exemplos de função par e ímpar, respectivamente.

(a) Determine:

(a1) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} \cos(x)\,dx$; (a2) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \cos(x)\,dx$; (a3) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\,dx$;

(a4) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} \operatorname{sen}(x)\,dx$; (a5) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\,dx$; (a6) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\,dx$.

(b) Compare o resultados obtidos em (a1), (a2) e (a3). Faça o mesmo com (a4), (a5) e (a6);

(c) Verdadeiro ou Falso?

(c1) Se f for par, então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)\,dx$; (c2) Se f for ímpar, então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Q 11 Sabendo que f é uma função par e que $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \pi$, determine:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$; (c) $\displaystyle\int_{0}^{1} -f(x)\,dx$; (d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} -f(x)\,dx$.

Q 12 Sabendo que $\displaystyle\int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$, é verdade que $f(x) = 0, \forall\, x \in [0, a]$?

Q 13 Complete adequadamente:

"A integral indefinida $\displaystyle\int f(x)\,dx$ denota uma família de ________________, cada uma das quais é uma ________________ de f, enquanto a integral definida $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ é ________________."

2 Wolfram | Alpha

O Wolfram | Alpha é um mecanismo de conhecimento computacional desenvolvido por Stephen Wolfram e sua empresa Wolfram Research. Excelente ferramenta que se demonstra como uma verdadeira fonte dinâmica de conhecimento.

Acesse pelo endereço http://www.wolframalpha.com/ ou baixe seu aplicativo para iOS ou Android.

Alguns comandos úteis para integrais:

1. Digitando "**int f(x)**" ele exibirá a família de primitivas de $f(x)$;
2. Digitando "**int f(x),x=a..b**" ele exibirá o valor da integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$;
3. Digitando "**f(x)=g(x)**" ele exibirá o conjunto solução desta equação, além de da visualização gráfica, auxiliando na identificação e cálculo da área de regiões limitadas por funções.

3 Referências

1. James Stwart – Cálculo;
2. Louis Leithold – O Cálculo com Geometria Analítica;
3. Piskunov N. – Cálculo Diferencial e Integral;
4. Diva Flemming – Cálculo A;
5. Eliana Prates – UFBA.

4 Respostas dos Exercícios

✉ Caso encontre alguma divegência entre a sua resposta e a digitada aqui, não entre em pânico. Veja se alghum ajuste algébrico encerra essa divergência. Ainda persistindo, confira suas contas com auxílio do WolframAlpha pelo endereço http://www.wolframalpha.com/ ou me consulte.
Identificando algum erro nas respostas apresentadas, ficarei muito grato com sua coleboração enviando seu comentário para didisurf@gmail.com ou, preferencialmente, me informe pessoalmente.

☺ **Q 1** (a) área de retângulo, 12; (b) área de triângulo, 8; (c) área de triângulo, 4; (d) área de triângulo mais área de retângulo, 14; (e) área de triângulo, 25/2; (f) área de retângulo, -4; (g) área de triângulo, $-15/2$; (h) área de triângulo, 0.

☺ **Q 2** (a) $3+5=8$; (b) $3-5=-2$; (c) -12; (d) $2\cdot 3-8\cdot 5=-34$; (e) -3; (f) -5; (g) 0; (h) -45.

☺ **Q 3** Primeiro esboce a parábola de concavidade voltada para baixo e raízes 0 e 1. Conclua que $a=0$ e $b=1$.

☺ **Q 4** Todas são verdadeiras. Elas representam as propriedades da integral definida. O item (g) é o teorema do valor médio para integrais. Use ilustrações gráficas para argumentar a veracidade das afirmativas.

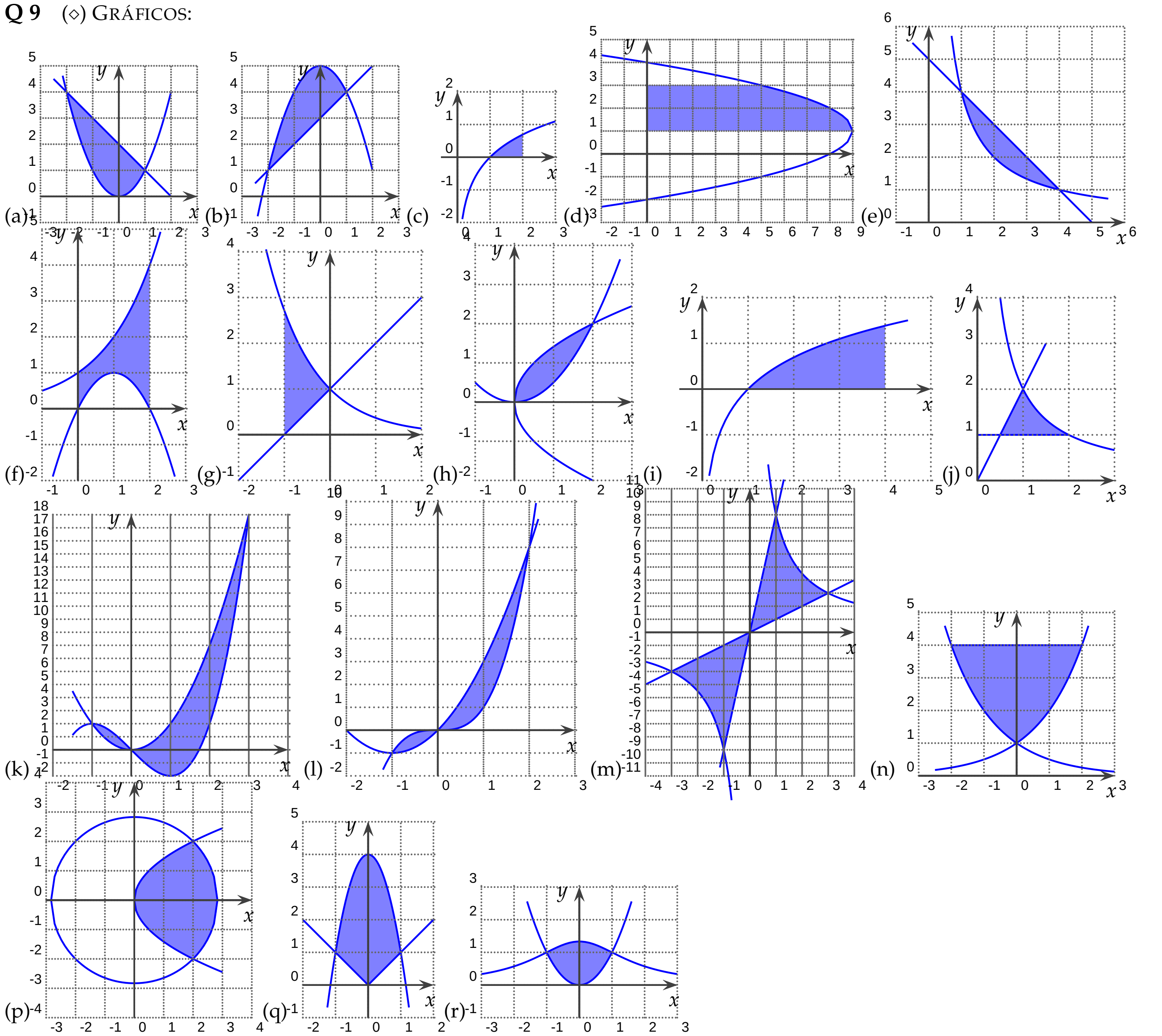
☺ **Q 5** (a) $\int_{-2}^{-1} -x-1\,dx+\int_{-1}^{2} x+1\,dx=5$; (b) $\int_{-2}^{-1} x^2-1\,dx+\int_{-1}^{1} -x^2+1\,dx+\int_{1}^{2} x^2-1\,dx=4$; (c) $\int_{-1}^{0} -e^x+1\,dx+\int_{0}^{1} e^x-1\,dx=1/e+e-2$; (d) $\int_{0}^{1/2} -2x+1\,dx+\int_{1/2}^{2} 2x-1\,dx=5/2$; (e) $\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx+\int_{\pi}^{2\pi} -\operatorname{sen}(x)\,dx=4$.

☺ **Q 6** (a) $8/3$; (b) $4/3$; (c) $3/2$; (d) $8\sqrt{2}/5$; (e) $32/3$; (f) $\ln(3/2)$; (g) $15/8$; (h) $1/3$; (i) 2; (j) $1/2$; (k) 1; (l) $4\sqrt{2}/3$; (m) 78; (n) 0; (o) 8; (p) 12; (q) $54 - 4\sqrt{2}$; (r) $e^2 - e^{-2}$; (s) -1; (t) 1.

☺ **Q 7** (a) Marque os pontos de interseção das retas (duas a duas), que são: $t \cap r = (1,2)$, $t \cap s = (0,0)$ e $r \cap s = (2,1)$. Por fim, obtenha a área da região pela soma de integrais: $\int_0^1 2x - \frac{x}{2}\,dx + \int_1^2 3 - x - \frac{x}{2}\,dx = \frac{3}{2}$;
(b) Marque os três pontos no plano e, a partir de suas coordenadas, obtenha as três retas que passa por dois vértices, são elas: $r_{AB} : y = 3 - x$, $r_{AC} : 2y = x + 3$ e $r_{BC} : y = 2x - 3$. Por fim, use a integral para calcular a área, obtendo $\int_1^2 \frac{x+3}{2} - (3 - x)\,dx + \int_2^3 \frac{x+3}{2} - (2x - 3)\,dx = \frac{3}{2}$.

☺ **Q 8** (a) $A = \left|\int_{-2}^0 x\sqrt{4 - x^2}\,dx\right| + \int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}\,dx = 16/3$; (b) $A = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)(1 - \cos(x))\,dx + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen}(x)(1 - \cos(x))\,dx\right| = 4$; (c) $A = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{\sec^2(x)}{2} - (-4\operatorname{sen}^2(x))\,dx = 4\pi/3$; (d) $A = \int_0^1 x - x^2/4\,dx + \int_1^2 1 - x^2/4\,dx = 5/6$; (e) $A = \int_0^{\pi} 2 - (1 + \cos(x))\,dx = \pi$; (f) $A = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \operatorname{sen}(x) - 1/2\,dx = \sqrt{3} - \pi/3$; (g) $A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{2} - \sec(x)\operatorname{tg}(x)\,dx = \pi/\sqrt{2}$; (h) $A = \int_{-\pi/4}^{0} 2 - \sec^2(x)\,dx + \int_0^{\pi/4} 2 - (1 - x^2)\,dx = 3\pi/4 - 1 + \pi^3/192$.

☺ **Q 9** (◇) GRÁFICOS:



(◇) RESULTADOS:
(a) $\int_{-2}^{1} 2 - x - x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}$; (b) $\int_{-2}^{1} 5 - x^2 - (x+3) \,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}$; (c) $\int_{1}^{2} \ln(x) \,\mathrm{d}x = 2\ln(2) - 1 = \ln(4/e)$; (d) $\int_{1}^{3} 8 + 2y - y^2 \,\mathrm{d}y = \frac{46}{3}$; (e) $\int_{1}^{4} 5 - x - \frac{4}{x} \,\mathrm{d}x = \frac{15}{2} - 8\ln(2)$; (f) $\int_{0}^{2} 2^x - (2x - x^2) \,\mathrm{d}x = \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}$; (g) $\int_{-1}^{0} e^x - (x+1) \,\mathrm{d}x = e - \frac{3}{2}$; (h) $\int_{0}^{2} \sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$; (i) $\int_{1}^{4} \ln(x) \,\mathrm{d}x = 8\ln(2) - 3$; (j) $\int_{1/2}^{1} 2x - 1 \,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \frac{2}{x} - 1 \,\mathrm{d}x = 2\ln(2) - \frac{3}{4}$; (k) $\int_{-1}^{0} x^3 - 3x - 2x^2 \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} 2x^2 - (x^3 - 3x) \,\mathrm{d}x = \frac{71}{6}$; (l) $\int_{-1}^{0} x^3 - (x^2 + 2x) \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} x^2 + 2x - x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{37}{12}$; (m) $2 \cdot \left[\int_{0}^{1} 9x - x \,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} \frac{9}{x} - x \,\mathrm{d}x\right] = 18\ln(3)$; (n) $\int_{-2}^{0} 4 - 2^{-x} \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} 4 - 2^x \,\mathrm{d}x = 16 - \frac{6}{\ln(2)}$; (o) (por substituição trigonométrica) $4\int_{0}^{a} \sqrt{b - \frac{bx^2}{a}} \,\mathrm{d}x = \pi ab$; (p) (por substituição trigonométrica) $\int_{-2}^{2} \sqrt{8 - y^2} - \frac{y^2}{2} \,\mathrm{d}y = 4/3 + 2\pi$; (q) $\int_{-1}^{1} \frac{4}{3 + x^2} - x^2 \,\mathrm{d}x = \left.\frac{4\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}(x/\sqrt{3}) - x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{4\sqrt{3}\pi - 6}{9}$; (r) $\int_{-1}^{0} 4 - 3x^2 - (-x) \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 4 - 3x^2 - x \,\mathrm{d}x = 5/2 + 5/2 = 5$.

☺ **Q 10** (a1) 1; (a2) 1; (a3) 2; (a3) −1; (a4) 1; (a5) 0. (b) $(a1) = (a2)$ e $(a3) = 2 \cdot (a2)$; $(a4) = -(a5)$ e $(a6) = (a4) + (a5) = 0$. (c) Ambas são verdadeiras. Use ilustrações gráficas para perceber a simetria e argumentar os resultados.

☺ **Q 11** (a) π; (b) 2π; (c) $-\pi$; (d) -2π.

☺ **Q 12** Falso. Como contra-exemplo temos a função $f(x) = \mathrm{sen}(x)$, quando $a = 2\pi$.

☺ **Q 13** Primitivas; primitiva; uma constante.

Material escrito em LaTeX 2_ε, Cattai, 6 de março de 2016