Lista de Exercícios
— Cálculo Integral —
Prof. Adriano Pedreira Cattai

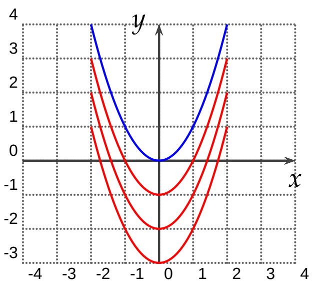
Somos o que repetidamente fazemos. A excelência portanto, não é um feito, mas um hábito. *Aristóteles*

Integral Indefinida e Técnicas de Integração
(*Atualizada em 6 de março de 2016*)

Nome: ______________________________ Data: ___/___/_____

Sumário

1 Definição e Integrais Imediatas



Q 1 Escreva a lei de definição de cada parábola da figura ao lado e derive cada uma dessas funções. A partir daí, decida se elas são primitivas de alguma função $f(x)$.

Q 2 Esboce, num mesmo sistema de coordenadas cartesianas, os gráficos de outras quatro primitivas de $f(x) = 2x$, diferentes da questão anterior.

Q 3 Esboce, num mesmo sistema de coordenadas cartesianas, os gráficos de três primitivas de $f(x) = \cos(x)$.

Q 4 Use o conceito de primitiva (derivando) de uma função para verificar **se** as seguintes integrais estão corretas.

(a) $\displaystyle\int \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\operatorname{arctg}(x) + K$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{tg}(t)\,\mathrm{d}t = -\ln(\cos(t)) + K$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{e^{2x^3}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}e^{-2x^3} + K$

(d) $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = a^x + K$

(e) $\displaystyle\int \cos(7x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen}(7x) + K$

(f) $\displaystyle\int \cos(t)\,\mathrm{d}t = -\operatorname{sen}(t) + K$

(g) $\displaystyle\int e^{ay}\,\mathrm{d}y = \frac{e^{ay}}{a} + K$

(h) $\displaystyle\int z^2 e^{z^3}\,\mathrm{d}z = \frac{e^{z^3}}{3} + K$

(i) $\displaystyle\int \frac{2s}{s^2+1}\,\mathrm{d}s = \ln(s^2+1) + K$

(j) $\displaystyle\int \frac{3}{1+3v^2}\,\mathrm{d}v = \operatorname{arctg}(3v) + K$

(k) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{u}}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = e^{\sqrt{u}} + K$

(l) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(3x)}{1+\cos(3x)}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln|1+\cos(3x)|}{3} + K$

(m) $\displaystyle\int \sec(x)\,\mathrm{d}x = \ln|\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + K$

(n) $\displaystyle\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + K$

(o) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(x)\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arctg}(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + K$

Q 5 Prove, usando a definição de integral, que se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, para cada constante $K \in \mathbb{R}$ e cada $x \in \mathrm{Dom}(f)$, $F(x) + K$ também é uma primitiva de $f(x)$.

Q 6 Exeplique extamente o significado da afirmação: "derivação e integração são processos inversos".

Q 7 Sabendo que $f'(x) = \sqrt[5]{x^4} + 2x + \dfrac{1}{x} + 4$ e que $f(1) = \dfrac{5}{9}$, determine $f(x)$.

Q 8 (Integração Imediata) Encontre a família de primitivas para cada função e em seguida derive para verificar a sua resposta.

(a) $\displaystyle\int \sqrt{2} + \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int x^4\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int x^3 + \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x} + e^x\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int e^{2x}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int \cos(3x)\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int e^{-x}\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int \left(16x^3 - \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int \sqrt{3x} - \frac{1}{\sqrt{3x}}\,\mathrm{d}x$

(l) $\displaystyle\int \frac{e}{4x^2+4}\,\mathrm{d}x$

(m) $\displaystyle\int \frac{2x^5+4x^4+2x^3+2x-1}{2x^3}\,\mathrm{d}x$

(n) $\displaystyle\int x\cdot\sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{d}x$

(o) $\displaystyle\int \sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{d}x$

(p) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{x^2}}{x^3}\sqrt[4]{x}\,\mathrm{d}x$

(q) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\,\mathrm{d}x$

(r) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$

(s) $\displaystyle\int \frac{1-\cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)}\,\mathrm{d}x$

(t) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{\operatorname{sen}(x)}\,\mathrm{d}x$

(u) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cossec}(x)}{\operatorname{tg}(x)}\,\mathrm{d}x$

Obs. Dica: (i) $\dfrac{x^3+x+1}{1+x^2} = \dfrac{x^3+x}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x(x^2+1)}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+x^2}$

Q 9 Resolva, por separação de variáveis, as equações diferenciais dadas.

(a) $y' = \operatorname{sen}(5x)$;

(b) $dx + e^{3x}dy = 0$;

(c) $xy' = 4y$;

(d) $y' = e^{3x+2y}$;

(e) $2(y-1)dy = (3x^2+4x+2)dx$;

(f) $y' + y^2\operatorname{sen}(x) = 0$;

(g) $y' = x + 1$;

(h) $5\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = 0$;

(i) $\dfrac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = x^2$.

Q 10 Classifique em verdadeira ou falsa as seguintes afirmativas. Caso falsa, exiba um contra-exemplo.

(a) A soma das integrais de duas funções definidas no mesmo intervalo é igual a integral da soma destas funções;

(b) A integral do produto de duas funções definidas no mesmo intervalo é igual ao produto das integrais destas funções;

(c) A integral de uma constante é igual a zero;

(d) Se $g(x)$ é uma função derivável no intervalo I tal que $g'(x) = 0$, para todo $x \in I$, então g é uma função constante em I;

(e) Se $g(x)$ é uma função derivável no intervalo I e $F(x)$ uma primitiva de f neste intervalo, então

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x = F(g(x)) + K.$$

(f) Se $f(x)$ é uma função derivável em I, então $\dfrac{d}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right] = f(x)$.

♡ Obs. A fórmula do item (e) é a regra da cadeia para integrais.

✎ **Q 11** Determine, em cada caso, uma função f sabendo que $f'(x)$ é contínua e que:

(a) $f(\pi) = 2$ e $\int f'(x)\,\mathrm{tg}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{sen}^3(x) - \cos(x) + K$, com $K \in \mathbb{R}$.

(b) $f(0) = 5$ e $\int \mathrm{arctg}\left(\dfrac{f'(x)}{x}\right)\mathrm{d}x = x^3 + K$, com $K \in \mathbb{R}$.

(c) $f(0) = 1$ e $\int (1 + x^2) f'(x)\,\mathrm{d}x = x + K$, com $K \in \mathbb{R}$;

(d) $f(0) = 5$ e $f'(x) + 6\,\mathrm{sen}(3x) = 0$.

✎ **Q 12** Determine:

(a) A primitiva $G(x)$ da função $g(x) = \dfrac{(2x^2-1)^2}{x^3}$ que passa pelo ponto $P(1, 3/2)$;

(b) A imagem $f(\pi/4)$, sabendo-se que $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{sen}(x) - x\cos(x) - \dfrac{x^2}{2} + K$.

✎ **Q 13** Obtenha a equação de uma curva $y = f(x)$, sabendo que o coeficiente angular da reta tangente em um de seus pontos é igual ao simétrico do dobro de sua abscissa e que o ponto $(1, 1)$ pertence a curva.

✎ **Q 14** Em todos os pontos de uma curva $y = f(x)$ tem-se que $y'' = x^2 - 1$. Obtenha a equação desta curva que passa pelo ponto $(1, 1)$ e a reta tangente neste ponto é paralela à reta $x + 12y - 13 = 0$.

✎ **Q 15** A velocidade de uma partícula, no instante t, em movimento numa linha reta é dada por $v(t) = t^{\frac{2}{3}}$. Determine a função horária do movimento $s(t)$ sabendo que $s(0) = 3$.

✎ **Q 16** Uma partícula move-se ao longo de um eixo x. Use a informação dada para encontrar a função posição da partícula em cada item abaixo.

(a) $v(t) = t^3 - 2t^2 + 1$ e $x(0) = 1$;

(b) $a(t) = 4\cos(2t)$, $v(0) = -1$ e $x(0) = -3$.

✎ **Q 17** Estima-se que daqui a t meses a população de uma certa cidade estará variando segundo uma taxa de $2 + 6\sqrt{t}$ pessoas por mês. A população atual é de 5.000 pessoas. Qual a população daqui a 9 meses?

2 Subistituição da Variável

2.1 Integrais "Quase" Imediatas

Q 18 (a) Verifique diretamente (derivando) que:

(a1) $\displaystyle\int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x = \ln(x+2) + K$;

(a2) $\displaystyle\int \frac{5}{3x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3}\ln(3x+2) + K$;

(a3) $\displaystyle\int \frac{3}{-x+2}\,\mathrm{d}x = -3\ln(-x+2) + K$.

(b) Baseado no item anterior, determine:

(b1) $\displaystyle\int \frac{3}{x-6}\,\mathrm{d}x$; (b2) $\displaystyle\int \frac{4}{-5x+8}\,\mathrm{d}x$; (b3) $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x$.

Q 19 (a) Verifique diretamente (derivando) que:

(a1) $\displaystyle\int (x+5)^9\,\mathrm{d}x = \frac{(x+5)^{10}}{10} + K$;

(a2) $\displaystyle\int (-x+5)^9\,\mathrm{d}x = -\frac{(-x+5)^{10}}{10} + K$;

(a3) $\displaystyle\int (3x+5)^9\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+5)^{10}}{10} + K$.

(b) Baseado no item anterior, determine:

(b1) $\displaystyle\int (5x-17)^{13}\,\mathrm{d}x$; (b2) $\displaystyle\int (\pi-2x)^{519}\,\mathrm{d}x$; (b3) $\displaystyle\int (ax+b)^n\,\mathrm{d}x$.

Q 20 Com o mesmo raciocício da questão anterior, determine:

(a) $\displaystyle\int e^{ax}\,\mathrm{d}x$; (c) $\displaystyle\int \cos(ax)\,\mathrm{d}x$; (e) $\displaystyle\int \mathrm{sen}(ax)\,\mathrm{d}x$; (g) $\displaystyle\int \frac{1}{1+(ax)^2}\,\mathrm{d}x$;

(b) $\displaystyle\int e^{ax+b}\,\mathrm{d}x$; (d) $\displaystyle\int \cos(ax+b)\,\mathrm{d}x$; (f) $\displaystyle\int \mathrm{sen}(ax+b)\,\mathrm{d}x$; (h) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-(ax)^2}}\,\mathrm{d}x$.

Q 21 Verdadeiro ou falso?

(a) Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então $\displaystyle\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + K$;

(b) $\displaystyle\int (ax+b)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$.

Q 22 Um tanque de armazenamento de petróleo sofre uma ruptura no instante $t = 0$ e o petróleo vaza do tanque a uma taxa de $100e^{-0{,}01\cdot t}$ litros por minuto. Determine a quantidade de litros de petróelo que vazou do tanque nos primeiros sessenta minutos.

Q 23 Uma população de bactérias cresce a uma taxa de $R(t) = 450{,}268\cdot e^{1{,}12567\cdot t}$ bactérias por horas e tem incialmente 400 bactérias. Quantas bactérias existirão após três horas?

Q 24 A XYZ Instruments Company preparou uma linha de montagem para fabricar uma nova calculadora. A taxa de produção dessas calculadoras após t semanas é $P'(t) = 5.000\cdot\left[1 - \dfrac{100}{(t+10)^2}\right]$ calculadoras por semana. (Observe que a produção tende a 5.000 por semana à medida que passa o tempo, mas a produção inical é baixa, pois os trabalhadores não estão familiarizados com as novas técnicas.)
Encontre o número de calculadoras produzidas no começo da terceira semana até o fim da quarta semana.

2.2 Mudando a Variável

Q 25 Por uma mudança de variável conveniente encontre uma primitiva para cada função.

(a) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}}\,\mathrm{d}x$;

(b) $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x}}+2}{x^2}\,\mathrm{d}x$;

(c) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen}(x)}{2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int \sqrt{5t^4+t^2}\,\mathrm{d}t$;

(e) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$;

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$;

(g) $\displaystyle\int \left(e^{2x}+2\right)^4\cdot e^{2x}\,\mathrm{d}x$;

(h) $\displaystyle\int 8x^2\cdot\sqrt{6x^3+5}\,\mathrm{d}x$;

(i) $\displaystyle\int \sqrt{\operatorname{sen}(2x)}\cdot\cos(2x)\,\mathrm{d}x$;

(j) $\displaystyle\int \sec^2(5x+3)\,\mathrm{d}x$;

(k) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{(9-\cos(x))^3}\,\mathrm{d}x$;

(l) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{[7-\operatorname{sen}^2(x)]^3}\,\mathrm{d}x$;

(m) $\displaystyle\int x^2[\operatorname{sen}(2x^3)+5x^2]\,\mathrm{d}x$;

(n) $\displaystyle\int \frac{x}{(1+4x^2)^2}\,\mathrm{d}x$;

(o) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

(p) $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$;

(q) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x+1}\,\mathrm{d}x$;

(r) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

Q 26 Mudando a variável, resolva as integrais abaixo que envolvem funções trigonométricas.

(a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$;

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(x)\ \mathrm{d}x$;

(c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(2x+1)\,\mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int \cos^5(3-3x)\,\mathrm{d}x$;

(e) $\displaystyle\int 2x\operatorname{sen}^4(x^2-1)\,\mathrm{d}x$;

(f) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3(x)\cos^4(x)\,\mathrm{d}x$;

(g) $\displaystyle\int \cos^4(x)\,\mathrm{d}x$;

(h) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^4(x)\,\mathrm{d}x$;

(i) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^4(x)}\,\mathrm{d}x$;

(j) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(3x)\cdot\cos(5x)\,\mathrm{d}x$;

(k) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(2x)\cos^4(2x)\,\mathrm{d}x$;

(l) $\displaystyle\int \frac{\cos^3(x)}{\operatorname{sen}^4(x)}\,\mathrm{d}x$;

(m) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(x)\cdot\cos^3(x)\,\mathrm{d}x$;

(n) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(x)\cdot\cos^3(x)\,\mathrm{d}x$;

(o) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$;

(p) $\displaystyle\int \operatorname{tg}(x)\cdot\sec^2(x)\,\mathrm{d}x$;

(q) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3(x)\cdot\sec^2(x)\,\mathrm{d}x$;

(r) $\displaystyle\int \frac{-2\sqrt{\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)}}{\operatorname{cossec}(2x)}\,\mathrm{d}x$.

2.3 Integrais Envolvendo o Trinômio do Segundo Grau

Q 27 Verifique diretamente (derivando) que:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)+K$;

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)+K$;

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right)+K$;

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+K$;

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+K$;

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+K$.

♡ **Atenção**: Guarde este exercício no coração. Ele é útil na resolução de muitas outras integrais.

Q 28 Com base na qauestão anterior e completando quadrado (quando necessário), determine:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+2x^2}\,\mathrm{d}x$;

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}\,\mathrm{d}x$;

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{4-9x^2}\,\mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,\mathrm{d}x$;

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$;

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-6x+5}\,\mathrm{d}x$;

(g) $\displaystyle\int \frac{x+5}{2x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x$;

(h) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,\mathrm{d}x$;

(i) $\displaystyle\int \frac{x+5}{\sqrt{2x^2+4x+3}}\,\mathrm{d}x$;

(j) $\displaystyle\int \frac{15}{x^2+3x-4}\,\mathrm{d}x$;

(k) $\displaystyle\int \frac{15}{x^2+4x+9}\,\mathrm{d}x$;

(l) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+6x-2}\,\mathrm{d}x$;

(m) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4x-5}\,\mathrm{d}x$;

(n) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x$;

(o) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{\sqrt{2x^2+4x+3}}\,\mathrm{d}x$;

(p) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+6x+9}\,\mathrm{d}x$.

3 Integração Por Partes

Q 29 A partir da regra de derivação do produto, deduza a fórmula de integração por partes e, em seguida, explique como se dá o uso desta fórmula para calcular integrais.

Q 30 Resolva as seguintes integrais usando a técnica de integração por partes.

(a) $\int x\,\mathrm{sen}(5x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\int xe^{4x}\,\mathrm{d}t$

(c) $\int (x+1)\cos(2x)\,\mathrm{d}x$

(d) $\int e^x \cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

(e) $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x$

(f) $\int \ln(1-x)\,\mathrm{d}x$

(g) $\int x\ln(x)\,\mathrm{d}x$

(h) $\int \frac{\ln(ax+b)}{\sqrt{ax+b}}\,\mathrm{d}x$

(i) $\int x\sec^2(x)\,\mathrm{d}x$

(j) $\int x\cdot\mathrm{arctg}(x)\,\mathrm{d}x$

(k) $\int \sec^3(x)\,\mathrm{d}x$

(l) $\int \mathrm{cossec}^3(x)\,\mathrm{d}x$

(m) $\int \sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x$

(n) $\int \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$

(o) $\int x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$

(p) $\int (x-1)\sec^2(x)\,\mathrm{d}x$

(q) $\int x(\ln(x))^2\,\mathrm{d}x$

(r) $\int e^{-2x}\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{d}x$

(s) $\int x^3e^{x^2}\,\mathrm{d}x$

(t) $\int x^3\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$

(u) $\int e^{-x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x$

(v) $\int x^2\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{d}x$

(w) $\int x\sec(x)\,\mathrm{tg}(x)\,\mathrm{d}x$

(x) $\int \mathrm{arcsec}(x)\,\mathrm{d}x$

(y) $\int x\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$;

(z) $\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$;

(α) $\int 3x^5(1+e^{x^3})\,\mathrm{d}x$.

Obs. Dicas: (y) $2\cos^2(x) = 1+\cos(2x)$, (z) u=x e (α) $x^5 = x^3\cdot x^2$.

4 Integração de Funções Racionais

Q 31 Classifique as funções em função racional própria (FRP), ou função racional imprópria (FRI) ou função não racional (FNC).

(a) $\frac{\sqrt{2}\cdot x+1}{x^2-\mathrm{tg}(3)}$;

(b) $\frac{\sqrt{2x+1}}{x^2+\mathrm{tg}(3)}$;

(c) $\frac{\mathrm{sen}(7)x^4+1}{x^3+2x+1}$;

(d) $\frac{\ln(x^2+9)}{x^4-x^2}$;

(e) $\frac{1+3x^2}{(x-1)(x^2-5x+6)}$;

(f) $\frac{\ln(2)(x+1)}{(x^3-1)(x^2-1)}$;

(g) $\frac{(ex)^2+1}{(x^2+x+3)^2(x^2-6x+9)}$;

(h) $\frac{x^2+3x+1}{x^2-6x+8}$;

(i) $\frac{(4x^2-8x)}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$.

Q 32 No exercício anterior, apresente uma forma de decomposição em frações parciais para cada uma das funções racionais próprias.

Q 33 Por decomposição em soma de frações parciais, mostre que:

(a) $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + K$;

(b) $\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + K$.

Q 34 Resolva as integrais das funções racionais.

(a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$;
(b) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+3)(x+5)}\,\mathrm{d}x$;
(c) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-2x+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$;
(d) $\displaystyle\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,\mathrm{d}x$;
(e) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{4x^3-x}\,\mathrm{d}x$;
(f) $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,\mathrm{d}x$;
(g) $\displaystyle\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,\mathrm{d}x$;
(h) $\displaystyle\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}\,\mathrm{d}x$;
(i) $\displaystyle\int \frac{8x-16}{16-x^4}\,\mathrm{d}x$;
(j) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+3}{(x^2+1)(x^2-2x+1)}\,\mathrm{d}x$;
(k) $\displaystyle\int \frac{5x^3+12}{x^3-5x^2+4x}\,\mathrm{d}x$;
(l) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+9)^2}\,\mathrm{d}x$.

5 Integração de Funções Irracionais

5.1 Integração por Subistituição Racionalizante

Q 35 Por uma mudança de variável racionalizante, determine as seguintes integrais de funções racionais:

(a) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x(x-2\sqrt{x}+3)}\,\mathrm{d}x$;
(b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$;
(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[6]{(x-2)^5}\left[\sqrt[3]{x^2-4x+4}-1\right]}\,\mathrm{d}x$;
(d) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$;
(e) $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;
(f) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$;
(g) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$;
(h) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x}}{2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
(i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$;
(j) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$;
(k) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;
(l) $\displaystyle\int \frac{x}{x+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$.

5.2 Integração por Subistituição Trigonométrica

Q 36 Resolva as integrais usando substituição trigonométrica:

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$
(b) $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$
(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$
(d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,\mathrm{d}x$
(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(4+x^2)^5}}\,\mathrm{d}x$
(f) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^4\sqrt{x^2+2x+10}}\,\mathrm{d}x$
(g) $\displaystyle\int \sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x$
(h) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$
(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x$;
(j) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$;
(k) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}}\,\mathrm{d}x$.

6 Outra Substituição Trigonomética

Q 37 A partir de $w=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ dê a expressão de dx e, em função de w, expresse $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$.

Q 38 Use a substituição trigonométrica da questão anterior para resolver as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)[1+\cos(x)]}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{2}{\operatorname{sen}(x)+\operatorname{tg}(x)}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{1+\cos(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{3+\operatorname{sen}(2x)}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{3+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{e^x}{4\operatorname{sen}(e^x)-3\cos(e^x)}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{4-\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}\,dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{3+2\cos(x)}\,dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{\sec(x)}{4-3\operatorname{tg}(x)}\,dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^2(x)-1}{\sec^2(x)}\,dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{\sec(x)}{\operatorname{cotg}^5(x)}\,dx$

7 Miscelânea

Q 39 Use um método adequado e resolva as integrais abaixo:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(2x)\cdot\cos(2x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{\ln(x)}}{x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{\ln(x^2)}{x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2-15x+5}{x^2-2x-8}\,dx$

(e) $\displaystyle\int x^2\operatorname{arctg}(x)\,dx$

(f) $\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$

(g) $\displaystyle\int x\sec^2(x)\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{x-1}{2x^2+4x+20}\,dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$

(j) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4x-7}\,dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x}}\,dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{4x^2+3x+1}{x^3+x^2}\,dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^2}\,dx;$

(n) $\displaystyle\int \ln(x^2+2x-8)\,dx$

(o) $\displaystyle\int \operatorname{tg}(x)\cdot\ln(\cos(x))\,dx$

(p) $\displaystyle\int \ln\left(\sqrt{x^2+2x}\right)dx$

(q) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$

(r) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}\,dx$

(s) $\displaystyle\int \frac{\sec^2(x)}{[1+\operatorname{tg}(x)]^2}\,dx$

(t) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{tg}(x)+\operatorname{sen}(x)}\,dx$

(u) $\displaystyle\int \frac{18\operatorname{tg}^2(x)\sec^2(x)}{2+\operatorname{tg}^3(x)}\,dx$

8 Wolfram | Alpha

O Wolfram | Alpha é um mecanismo de conhecimento computacional desenvolvido por Stephen Wolfram e sua empresa Wolfram Research. Excelente ferramenta que se demonstra como uma verdadeira fonte dinâmica de conhecimento.

O acesse é dado pelo endereço http://www.wolframalpha.com/ ou por algum aplicativo para iOS ou Android. Existe uma quantidade grande de exemplos para que o usuário possa tomar como base, bastando acessar http://www.wolframalpha.com/examples/. Em especial, que é o nosso caso, acesse a página destinada a exemplos para Cálculo Diferencial e Integral pelo endereço http://www.wolframalpha.com/examples/Calculus.html.

Alguns comandos úteis:

1. `plot x^3 - 6x^2 + 4x + 12`: desenha o gráfico da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x + 12$. Mais opções de plotagem em http://www.wolframalpha.com/examples/PlottingAndGraphics.html
2. `domain of 1/(x^2-4)`: exibe o domínio da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$;
3. `range of 1/(1+x^2)`: exibe a imagem da função $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$;
4. `is tan(x) continuous`: determinar se a função $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ é contínua;
5. `discontinuities (x^3+8)/(x^3+3x^2-4x-12)`: identificar os pontos de descontinuidade da função $f(x) = \dfrac{x^3+8}{x^3+3x^2-4x-12}$;

6. `lim (sin(x) - x)/x^3, x=0`: calcula o limite bilateral $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^3}$. Caso queira ver a resolução passo a passo, clique em **Step-by-step solution**;
7. `lim (sin(x) - x)/x^3, x=0-`: calcula o limite lateral à esquerda. De forma análoga o da direita;
8. `lim (1+1/x)^x, x=+infinity`: calcula o limite no infinito $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$;
9. `diff x^2`: deriva a função $f(x) = x^2$;
10. `d/dx x^2`: deriva, em relação a x, a função $f(x) = x^2$;
11. `d/dy x^2y^5`: deriva, em relação a y, a função $f(x, y) = x^2y^5$;
12. `d^3/dx^3 x^4 + sin(x)`: derivada de terceira ordem da função $f(x) = x^4 + \operatorname{sen}(x)$. Mais opções para derivação em http://www.wolframalpha.com/examples/Derivatives.html
13. `int f(x)`: exibirá a família de primitivas de $f(x)$;
14. `int f(x), x=a..b`: exibirá o valor da integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$;
15. `f(x)=g(x)`: exibirá o conjunto solução desta equação, além da visualização gráfica das duas funções, auxiliando na identificação e cálculo da área de regiões limitadas por funções.

9 Referências

1. James Stwart – Cálculo;
2. Louis Leithold – O Cálculo com Geometria Analítica;
3. Piskunov N. – Cálculo Diferencial e Integral;
4. Diva Flemming – Cálculo A;
5. Eliana Prates – UFBA.

10 Respostas dos Exercícios

✉ Caso encontre alguma divegência entre a sua resposta e a digitada aqui, não entre em pânico. Veja se alghum ajuste algébrico encerra essa divergência. Ainda persistindo, confira suas contas com auxílio do WolframAlpha pelo endereço http://www.wolframalpha.com/, com o comando "**int**".
Identificando algum erro nas respostas apresentadas, ficarei muito grato com sua coleboração enviando seu comentário para didisurf@gmail.com

☺ **Q 1** As parábolas são: $F_0(x) = x^2$, $F_1(x) = x^2 - 1$, $F_2(x) = x^2 - 2$, $F_3(x) = x^2 - 3$. Suas derivadas são todas iguais a $f(x) = 2x$ e, portanto, são primitivas de f. De modo geral, a família de parábolas $F(x) = x^2 + K$ são primitivas de $f(x) = 2x$.

☺ **Q 2** ☺

☺ **Q 3** Basta desenhar, num mesmo sistema de coordenadas, os gráficos de $F_1(x) = \text{sen}(x)$, $F_2(x) = \text{sen}(x) + 1$ e $F_3(x) = \text{sen}(x) + 2$, por exemplo. Há muitas outras possibilidades.

☺ **Q 4** Estão incorretas apenas (d); (e); (f); (j) e (k).

☺ **Q 5** Argumente usando o fato que $F'(x) = f(x)$, peplo fato em que F é uma primitiva de f, e que a derivada da constante é zero.

☺ **Q 6** ☺

☺ **Q 7** Integre $f'(x)$ para obter $f(x) = \clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit + K$. Use o dado $f(1) = \dfrac{5}{9}$ para obter a constante de integração e concluir que $f(x) = \dfrac{5}{9}\sqrt[5]{x^9} + x^2 + \ln(x) + 4x - 5$.

☺ **Q 8** (a) $\sqrt{2}x - \dfrac{1}{2x^2} + K$; (b) $\dfrac{x^5}{5} + K$; (c) $\dfrac{x^4}{4} - \cos(x) + K$; (d) $\ln(x) + e^x + K$; (e) $\dfrac{1}{2}e^{2x} + K$; (f) $\dfrac{1}{3}\,\text{sen}(3x) + K$; (g) $-e^{-x} + K$; (h) $\text{arctg}(x) + K$; (i) $\dfrac{x^2}{2} + \text{arctg}(x) + K$; (j) $4x^4 + \dfrac{2}{\sqrt{x}} + K$; (k) $\dfrac{2\sqrt{3}x\sqrt{x}}{3} - \dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{x}}{3} + K$; (l) $\dfrac{e}{4}\,\text{arctg}(x) + K$; (m) $\dfrac{x^3}{3} + x^2 + x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{4x^2} + K$; (n) $\dfrac{3x^2\sqrt[3]{x^2}}{8} + K$; (o) $\dfrac{1x^2\sqrt[12]{x^5}}{29} + K$; (p) $\dfrac{-20}{27x\sqrt[20]{x^7}} + K$; (q) $-\text{cotg}(x) + K$; (r) $\sec(x) + K$; (s) $-\cos(x) + K$; (t) $\sec(x) + K$; (u) $-\text{cossec}(x) + K$.

☺ **Q 9** Em cada item, separe os diferenciais e integre. (a) $-5y = \cos(5x) + K$; (b) $3y = e^{-3x} + K$; (c) $y = Kx^4$; (d) $-3e^{-2y} = 2e^{3x} + K$; (e) $y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + K$, se $K = 3$ $[y(0) = -1]$, então $y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$; (f) $y^{-1} + \cos(x) = K$; (g) $y = \dfrac{x^2}{2} + x + K$; (h) $y = ce^{-\frac{x}{5}}$; (i) $y = \dfrac{x^4}{12} + K_1x + K_2$.

☺ **Q 10** (a) V. $\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$; (b) F. Veja que $\int 3\,\mathrm{d}x = 3x$, $\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2$ e que $\int 3 \cdot 2x\,\mathrm{d}x = 3x^2 \neq 3x \cdot x^2$; (c) F. A integral de uma contante é um polinômio de grau um, ou seja, $\int a\,\mathrm{d}x = ax + b$; (d) V. Visto que a derivada da função constante é identicamente nula; (e) V. Pois $[F(g(x)) + K]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) + 0 = f(g(x)) \cdot g'(x)$. (f) V. Supondo $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$, ou seja, $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(X) + K$, temos que $\dfrac{d}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right] = \dfrac{d}{\mathrm{d}x}[F(x) + K] = F'(x) + [K]' = f(x) + 0 = f(x)$.

☺ **Q 11** (a) Derive a equação dada, isole f' para integrar e obter f. Use o dado $f(\pi) = 2$ para obter a constante de integração K e por tanto $f(x) = -\cos^3(x) + \text{sen}(x) + 1$; (b) $f(x) = -\frac{1}{6}\ln|\cos(3x^2)| + 5$; (c) $f(x) = \text{arctg}(x) + 1$; (d) Integre $f'(x) = -6\,\text{sen}(3x)$ para obter $f(x) = 2\cos(3x) + K$. Use o dado $f(0) = 5$ para obter $K = 3$. Logo $f(x) = 2\cos(3x) + 3$.

☺ **Q 12** (a) Expanda o numerador e divida cada parcela (deste numerador) por x^3, para obter três integrais imediatas. Depois use o dado $G(1) = 3/2$ para obter a constante de integração e $G(x) = 2x^2 + 4\ln|x| - \dfrac{1}{2x^2}$; (b) Derive a equação $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen}(x) - x\cos(x) - \dfrac{x^2}{2} + K$ para obter $f(x)$. Depois substitua $\pi/4$ para obter $f(\pi/4) = \dfrac{\pi(\sqrt{2}-2)}{8}$.

☺ **Q 13** $a_t = f'(x) = -2x$, em que x é a abscissa de um ponto qualquer. Integre para obter $f(x) = -x^2 + K$, use o ponto $(1,1)$ para obter $K = 2$. Logo a curva é $y = 2 - x^2$.

☺ **Q 14** Integre y'' para obter $y' = \dfrac{x^3}{3} - x + K_1$. Com a inclinação da reta $a_t = \dfrac{-1}{12}$ no ponto $x_p = 1$ obetnha $K_1 = \dfrac{7}{12}$. Integre y' para obter $y = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{7}{12}x + K_2$. Aqui, com o ponto $(1,1)$ obtenha $K_2 = \dfrac{5}{6}$. Logo $12y = x^4 - 6x^2 + 7x + 10$ é a curva desejada.

☺ **Q 15** $s(t) = \dfrac{3}{5}\sqrt[3]{t^5} + 3$.

☺ **Q 16** (a) Integre $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$ para obter $x(t) = \dfrac{t^4}{4} - \dfrac{2t^3}{3} + t + K$. Use $x(0) = 1$ para obter $K = 1$, donde $x(t) = \dfrac{t^4}{4} - \dfrac{2t^3}{3} + t + 1$; (b) Integre $a(t) = \dfrac{dv}{dt}$ para obter $v(t) = 2\operatorname{sen}(2t) + K_1$. Use $v(0) = -1$ para obter $K_1 = -1$. Por fim, integre $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$ para obter $x(t) = -\cos(2t) - t + K_2$ e use $x(0) = -3$ obtendo $K_2 = -2$ e $x(t) = -\cos(2t) - t - 2$.

☺ **Q 17** integre $P'(t) = 2 + 6\sqrt{t}$ para obter $P(t) = 2t + 4\sqrt{t^3} + K$. Com $p(0) = 5.000$, obtenha $K = 5.000$. Por fim calculo $P(9)$ dando 5.126 pessoas.

☺ **Q 18** (b1) $3\ln(x-6) + K$; (b2) $-\dfrac{4}{5}\ln(-5x+8)$; (b3) $\dfrac{1}{a}\ln(ax+b)$.

☺ **Q 19** (b1) $\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{(5x-17)^{14}}{14} + K$; (b2) $\dfrac{-1}{2}\cdot\dfrac{(\pi-2x)^{520}}{520} + K$; (b3) $\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + K$.

☺ **Q 20** (a) $\dfrac{1}{a}e^{ax} + K$; (b) $\dfrac{1}{a}e^{ax+b} + K$; (c) $\dfrac{1}{a}\operatorname{sen}(ax)$; (d) $\dfrac{1}{a}\operatorname{sen}(ax+b)$; (e) $-\cos(ax)$; (f) $-\cos(ax+b)$; (g) $\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}(ax)$; (h) $\dfrac{1}{a}\operatorname{arcsen}(ax)$.

☺ **Q 21** (a) Verdadeiro. Basta verificar que $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{a}F(ax+b) + K\right] = f(ax+b)$; (b) Análogo ao item (a).

☺ **Q 22** Sendo $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 100e^{-0{,}01\cdot t}$, temos $V(t) = \int 100e^{-0{,}01\cdot t}\,\mathrm{d}t = -10.000\cdot e^{-0{,}01\cdot t} + K$. Agora faça $V(60) - V(0)$, obtendo $10.000 - 10.000\cdot e^{-0{,}6}$ que, com uso de uma calculadora científica, dá $4.511{,}88\ \ell$.

☺ **Q 23** Como $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = R(t)$, então $P(t) = \int R(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{450{,}268}{1{,}12567}\cdot e^{1{,}12567\cdot t} + K = 400\cdot e^{1{,}12567\cdot t} + K$. Com $P(0) = 400$, obtenha $K = 0$. Por fim, $P(3) = 400\cdot e^{1{,}12567\cdot 3} \approx 11.713{,}23$ bactérias.

☺ **Q 24** $P(t) = 5.000\cdot\int 1 - \dfrac{100}{(t+10)^2}\,\mathrm{d}t = 5.000\cdot\left[t + \dfrac{100}{t+10}\right] + K$. Faça $P(5) - P(3)$, que após algumas continhas, tem-se $\dfrac{5.000\cdot 38}{39}$ calculadoras.

☺ **Q 25** (a) MV $y = x^3 - 1$ e $\frac{3}{2}(x^3-1)^{\frac{2}{3}} + K$; (b) MV $y = 1/x$ e $-e^{\frac{1}{x}} - 2\frac{1}{x} + K$; (c) MV $y = \text{arcsen}(x)$ e $\frac{(\text{arcsen}(x))^2}{4} + K$; (d) ponha t^2 em evidência para sair da raiz, MV $y = 5t^2 + 1$ e $\frac{1}{15}(5t^2+1)^{\frac{3}{2}} + K$; (e) separe em duas, MV $y = 1 + x^2$ e $\frac{3}{2} \cdot \ln|x^2+1| + 2\,\text{arctg}(x) + K$; (f) MV $y = \ln(t)$ e $\ln(\ln|t|) + K$; (g) MV $y = e^{2x} + 2$ e $\frac{1}{10}\left(e^{2x}+2\right)^5 + K$; (h) MV $y = 6x^3 + 5$ e $\frac{8}{27}\left(6x^3+5\right)^{\frac{3}{2}} + K$; (i) MV $y = \text{sen}(2x)$ e $\frac{1}{3}\left(\text{sen}(2x)\right)^{\frac{3}{2}} + K$; (j) MV $y = 5x + 3$ e $\frac{1}{5}\,\text{tg}(5x+3) + K$; (k) MV $y = 9 - \cos(x)$ e $-\frac{1}{2\,(9-\cos(x))^2} + K$; (l) como $\text{sen}(2x) = 2\,\text{sen}(x)\cos(x)$, MV $y = 7 - \text{sen}^2(x)$ e $\frac{1}{2(7+\text{sen}^2(x))^2} + K$; (m) distribua o x^2, MV $y = 2x^3$ e $-\frac{1}{6}\cos(2x^3) + x^5 + K$; (n) MV $y = 1 + 4x^2$ e $-\frac{1}{8\cdot(4x^2+1)} + K$; (o) MV $y = \text{sen}(x)$ e $\frac{\text{sen}^3(x)}{3} + K$; (p) MV $y = x + 1$ e $x - \ln|x+1| + K$; (q) MV $y = x+1$ e $2x + \ln|x+1| + K$; (r) MV $y = x + 1$ e $\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + K$.

☺ **Q 26** (a) use $\text{sen}(2x) = 2\,\text{sen}(x)\cos(x)$ e $-2\cos(x) + K$; (b) use $\text{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ (fórmula do arco duplo) e $\frac{x}{2} - \frac{\text{sen}(2x)}{4} + K$; (c) MV1 $y = 2x+1$, $\text{sen}^3(y) = \text{sen}^2(y)\,\text{sen}(y) = (1-\cos^2(y))\,\text{sen}(y)$, MV2 $z = \cos(y)$ e $-\frac{1}{2}\cos(2x+1) + \frac{1}{6}\cos^3(2x+1) + K$; (d) análogo, $-\frac{1}{3}[\text{sen}(3-3x) - \frac{2}{3}\,\text{sen}^3(3-3x) + \frac{1}{5}\,\text{sen}^5(3-3x)] + K$; (e) MV1 $y = x^2 - 1$, use a fórmula do arco duplo e $\frac{3x^2}{8} - \frac{\text{sen}(2x^2-2)}{4} + \frac{\text{sen}(4x^2-4)}{32} + K$; (f) simplifique o $\cos^3(x)$, MV $y = \text{sen}(x)$ e $\frac{\text{sen}^4(x)}{4} + K$; (g) use a fórmula do arco duplo e $\frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} + \text{sen}(2x) + \frac{\text{sen}(4x)}{8}\right] + K$; (h) note que $\text{tg}^4(x) = \text{tg}^2(x)\cdot\text{tg}^2(x)$, use $\text{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1$ e $\frac{1}{3}\,\text{tg}^3(x) - \text{tg}(x) + x + K$; (i) ajuste o integrando para $\text{tg}^2(x)\cdot\sec^2(x)$ e $\frac{1}{3}\,\text{tg}^3(x) + K$; (j) ajuste o integrando com a fórmula $\text{sen}(a)\cdot\cos(b) = \frac{\text{sen}(a+b)+\text{sen}(a-b)}{2}$ e $\frac{1}{2}[-\frac{\cos(8x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2}] + K$; (k) MV1 $y = 2x$, $\text{sen}^3(y) = \text{sen}(y)\cdot\text{sen}^2(y)$, MV2 $z = \text{sen}(y)$ e $\frac{1}{14}\cos^7(2x) - \frac{1}{10}\cos^5(2x) + K$; (l) análogo $-\frac{1}{3}\,\text{cossec}^3\,x + \text{cossec}(x) + K$; (m) análogo $\frac{\text{sen}^3(x)}{3} - \frac{\text{sen}^5(x)}{5} + K$; (n) análogo $\frac{\text{sen}^4(x)}{4} - \frac{\text{sen}^6(x)}{6} + K$; (o) MV $y = 1 + \cos^2(x)$, $\text{sen}(2x) = 2\,\text{sen}(x)\cos(x)$ e $-\frac{2}{3}(1+\cos^2(x))^{\frac{3}{2}} + K$; (p) MV $y = \text{tg}(x)$ e $\frac{\text{tg}^2(x)}{2} + K$; (q) MV $y = \text{tg}(x)$ e $\frac{\text{tg}^4(x)}{4} + K$; (r) use $\cos(2x) = \cos^2(x) - \text{sen}^2(x)$, $1/\,\text{cossec}(2x) = \text{sen}(2x)$ e MV $y = \frac{2}{3}\cos^{\frac{3}{2}}(2x) + K$.

☺ **Q 27** ☺

☺ **Q 28** (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + K$; (b) $\frac{1}{3}\,\text{arcsen}\left(\frac{3x}{4}\right) + K$; (c) $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right| + K$; (d) $\ln\left|x + \sqrt{x^2+9}\right| + K$; (e) $\frac{1}{2}\,\text{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + K$; (f) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + K$; (g) $\frac{1}{4}\ln|x^2+4x+3| + 2\sqrt{2}\,\text{arctg}\left[\sqrt{2}(x+1)\right] + K$; (h) $\frac{7}{4}\,\text{arcsen}\left(\frac{2x-1}{2}\right) - \frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2} + K$; (i) $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+4+x} + 2\sqrt{2}\ln\left|\sqrt{2x^2+4x+3}\right| + \sqrt{2}(x+1) + K$. (j) $3\ln\left|\frac{x-1}{x+4}\right| + K$; (k) $3\sqrt{5}\,\text{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right) + K$; (l) $\frac{\sqrt{13}}{26}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{13}}{2x+3+\sqrt{13}}\right| + K$; (m) $\frac{1}{6}\ln|x-1| + \frac{5}{6}\ln|x+5| + K$; (n) $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+5| - \text{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + K$; (o) $\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-x} + \frac{23}{4\sqrt{2}}\ln\left|4x - 1 + \sqrt{16x^2-8x}\right| + K$; (p) $\frac{3}{x+3} + \ln|x+3| + K$.

☺ **Q 29** ☺

☺ **Q 30** (a) $-\frac{x\cos(5x)}{5} + \frac{\text{sen}(5x)}{25} + K$; (b) $\frac{e^{4x}}{4}\left(x - \frac{1}{4}\right) + K$; (c) $\frac{1}{2}\,\text{sen}(2x)\,(x+1) + \frac{\cos(2x)}{4} + K$; (d) $\frac{2}{5}\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)e^x + \frac{4}{5}e^x\cos\left(\frac{x}{2}\right) + K$; (e) $x(\ln(x) - 1) + K$; (f) $\ln(1-x)\cdot(1-x) + x + K$; (g) $\frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right) + K$; (h) $\frac{2\cdot\sqrt{ax+b}}{a}(\ln(ax+b) - 2) + K$; (i) $x\,\text{tg}(x) + \ln|\cos(x)| + K$; (j) $\frac{x^2}{2}\,\text{arctg}(x) - \frac{x}{2} + \frac{\text{arctg}(x)}{2} + K$; (k) $\frac{1}{2}\,\text{tg}(x)\sec(x) + \frac{1}{2}\ln|\sec(x) + \text{tg}(x)| + K$; (l) $\frac{-1}{2}\,\text{cotg}(x)\,\text{cossec}(x) + \frac{1}{2}\ln|\,\text{cossec}(x) - \text{cotg}(x)| + K$; (m) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln|x| - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + K$; (n) $x\ln(x^2+1) - 2x + 2\,\text{arctg}(x) + K$; (o)

$\frac{x^3}{3}\left(\ln(x)-\frac{1}{3}\right)+K$; (p) $(x-1)\,\mathrm{tg}(x)+\ln|\cos(x)|+K$; (q) $\frac{x^2}{2}\left((\ln|x|)^2-\ln|x|+\frac{1}{2}\right)+K$; (r) $-\frac{e^{-2x}}{5}(\cos(x)+2\,\mathrm{sen}(x))+K$; (s) $\frac{e^{x^2}}{2}(x^2-1)+K$; (t) $\frac{1}{2}(x^2\,\mathrm{sen}(x^2)+\cos(x^2))+K$; (u) $\frac{e^{-x}}{5}(2\,\mathrm{sen}(2x)-\cos(2x))+K$; (v) $-x^2\cos(x)+2x\,\mathrm{sen}(x)+2\cos(x)+K$; (w) $x\sec(x)-\ln|\sec(x)+\mathrm{tg}(x)|+K$; (x) $x\,\mathrm{arcsec}(x)-\ln(\sqrt{x^2-1}+x)+K$; (y) $\frac{1}{8}\left[2x\,\mathrm{sen}(2x)+4\cos(2x)+8x^2\right]+K$ (z) $\frac{1}{2}\left[\mathrm{arctg}(x)-\frac{x}{1+x^2}\right]+K$; ($\alpha$) $\frac{x^6}{2}+e^{x^3}(x^3-1)+K$.

☺ **Q 31** (a) FRP; (b) FNR, pois o numerador não é um polinômio; (c) FRI, pois o grau do polinômio no numerador é maior do que o do denominador; (d) FNR, idem (b); (e) FRP; (f) FRP; (g) FRP; (h) FRI, pois os gaus são iguais; (i) FRP.

☺ **Q 32** (a) $\frac{A}{x-\sqrt{\mathrm{tg}(3)}}+\frac{B}{x+\sqrt{\mathrm{tg}(3)}}$; (e) $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$; (f) $\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}$; (g) $\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+3}+\frac{Ex+F}{(x^2+x+3)^2}$; (i) $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$.

☺ **Q 33** Para o item (a), decomponha $\frac{1}{x^2-a^2}$ obtendo $\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$. Basta integrar e usar as propriedades dos logaritmos. O item (b) é análogo.

☺ **Q 34** (a) Veja que é FRI, divida os polinômios para obter $\frac{2x+\ln|2x+1|}{4}+K$; (b) $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+3)^6}{(x+5)^5(x+1)}\right|+K$; (c) $\frac{1}{x-1}+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+K$; (d) Coloque x em evidência no denominador para facilitar a fatração. A integral é $\frac{3}{x-2}+\ln\left(\frac{x-2}{x}\right)^2+K$; (e) Coloque x em evidência no denominador para facilitar a fatração. A integral é $\frac{x}{4}-\ln|x|+\frac{1}{16}\left[9\ln|2x-1|+7\ln|2x+1|\right]+K$; (f) $\ln\left|\frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{x-1}\right|+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right)$; (g) Adote $x^2=y$ para fatorar p denominador, ficando $y^2+6y+8=(y+2)(y+4)=(x^2+2)(x^2+4)$ e depois obtendo $\ln\left|\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}\right|+\frac{3}{2}\mathrm{arctg}(x/2)-\frac{3}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(x/\sqrt{2})+K$; (h) Fatoração denominador: $x^2(x+1)+4(x+1)=(x^2+4)(x+1)$. Integral: $\ln\left|\frac{x^2+4}{(x+1)^2}\right|+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(x/2)+K$; (i) $\ln(\sqrt{4+x^2})-\ln|x+2|-\mathrm{arctg}(x/2)+K$; (j) $\mathrm{arctg}(x)+\ln(\sqrt{x^2+1})-\ln|x+1|+\frac{1}{1-x}+K$; (k) Coloque x em evidência no denominador para facilitar a fatração. A integral é $5x+3\ln|x|-\frac{17}{3}\ln|x-1|+\frac{83}{3}\ln|x-4|+K$; (l) $\frac{x}{18(x^2+9)}+\frac{1}{54}\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)+K$.

☺ **Q 35** (a) $x=y^2$, $\ln|x|+2\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2}}\right)+K$; (b) $x=y^{12}$, $\frac{2}{27}\sqrt[4]{x^9}-\frac{2}{13}\sqrt[12]{x^13}+K$; (c) $x-2=y^6$, $\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x-2}-1}{\sqrt[6]{x-2}+1}\right|-3\,\mathrm{arctg}(\sqrt[6]{x-2})+K$; (d) $1+x=y^3$, $\frac{3\sqrt[3]{(1+x^8)}}{8}-\frac{3\sqrt[3]{(1+x)^5}}{5}+K$; (e) $x=y^6$, $2\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}+24\sqrt[6]{x}-48\ln\left[2+\sqrt[6]{x}\right]+K$; (f) $\frac{1-x}{1+x}=y^2$, isole o x para obter dx. $\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+K$; (g) $2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)+\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|+K$; (h) $x=y^4$, $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-8\sqrt[4]{x}+8\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2}}\right)+K$; (i) $x+1=y^2$, $x-4\sqrt{x+1}+8\ln|\sqrt{x+1}+2|+K$; (j) $1-x=y^2$, $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right|+K$; (k) $x=y^2$, $-x+4\sqrt{x}-4\ln|\sqrt{x}+1|+K$; (l) $x-1=y^2$, $x-2\sqrt{x-1}+\ln|x+\sqrt{x-1}|+\frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}}\right)+K$.

☺ **Q 36** (a) $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\mathrm{arcsen}(x/a)+K$; (b) $2\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+\frac{x^3\sqrt{4-x^2}}{4}+K$; (c) $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+K$; (d) $\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos(x/a)+K$; (e) $\frac{1}{16}\left[\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}-\frac{x^3}{(12+3x^2)\sqrt{4+x^2}}\right]+K$; (f) $\frac{\sqrt{9+(x+1)^2}}{3^4(x+1)}-\frac{\sqrt{[9+(x+1)^2]^3}}{3^5(x+1)^5}+K$; (g) $2\ln\left|x+\sqrt{4+x^2}\right|+$

$\dfrac{x\sqrt{4+x^2}}{2}+K$; (h) $-\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+K$; (i) $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{3-\sqrt{9-x^2}}{x}\right|+K$; (j) $\arccos\left(\dfrac{1}{x}\right)+K=\operatorname{arcsec}(x)+K$ (por que?); (k) $-\dfrac{1}{9}\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{x}+K$.

☺ **Q 37** $\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+w^2}\,\mathrm{d}w$, $\operatorname{sen}(x)=\dfrac{2w}{1+w^2}$ e $\cos(x)=\dfrac{1-w^2}{1+w^2}$. Como obter? Veja na apostila!

☺ **Q 38** (a) $\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}(\dfrac{x}{2})\right|+K$; (b) $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|-\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)+K$; (c) $-2\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)-1\right|-\dfrac{2}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)-1}+\ln\left(\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)+1\right)+K$; (d) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{3\operatorname{tg}(x)+1}{2\sqrt{2}}\right)+K$; (e) $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)+1\right|+K$; (f) $\dfrac{1}{5}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{e^x}{2}-\dfrac{1}{3}\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{e^x}{2}+3\right)}\right|+K$; (g) $-\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)+2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)+K$; (h) $\dfrac{2}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{3\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)-1}{\sqrt{14}}\right)+K$.

☺ **Q 39** (a) $u=\operatorname{sen}(2x)$, $\dfrac{1}{6}\operatorname{sen}^3(2x)+K$; (b) $u=\ln(x)$, $\dfrac{2\sqrt{(\ln|x|)^3}}{3}+\ln|x|+K$; (c) $u=\ln(x)$, $(\ln|x|)^2+K$; (d) Decomposição em Frações Parciais, $x^2+\dfrac{3}{2}\ln|x-4|-\dfrac{1}{2}\ln|x+2|+K$; (e) Por partes, $\dfrac{x^3\operatorname{arctg}(x)}{3}-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{1}{6}\ln(x^2+1)+K$; (f) Por partes, $x\cdot\ln|x+\sqrt{x^2+1}|-\sqrt{x^2+1}+K$; (g) Por partes, $x\cdot\operatorname{tg}(x)+\ln|\cos(x)|+K$; (h) $\dfrac{1}{4}\ln|x^2+2x+10|-\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+1}{3}\right)+K$; (i) $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|+K$; (j) $\dfrac{11-\sqrt{11}}{22}\ln|x+2-\sqrt{11}|+\dfrac{11+\sqrt{11}}{22}\ln|x+2+\sqrt{11}|+K$; (k) $\operatorname{arcsen}(x-1)+K$; (l) $2\ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right|-\dfrac{1}{x}+K$; (m) Substituição trigonométrica, $\ln\left|x+\sqrt{x^2-16}\right|-\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x}+K$; (n) Por partes, $x\ln(x^2+2x-8)-2x-2\ln|x-2|+4\ln|x+4|+K$; (o) $u=\ln(\cos(x))$, $-\dfrac{1}{2}\{\ln[\cos(x)]\}^2+K$; (p) Use propriedades do log e depois por partes, $x\ln(\sqrt{x^2+2x})-x+\ln|x+2|+K$; (q) $x=1\cdot\operatorname{sen}(\theta)$, $-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\operatorname{arcsen}(x)+K$; (r) multiplique e divida por $1-\cos(x)$, $-\operatorname{cossec}(x)+\operatorname{cotg}(x)+K$; (s) —; (t) —; (u) $u=2+\operatorname{tg}^3(x)$, ...

Material escrito em $\LaTeX 2_\varepsilon$, Cattai, 6 de março de 2016