CÁLCULO INTEGRAL

— Prof. ADRIANO CATTAI —

Apostila 03: Funções de Várias Variáveis

(*Atualizada em 4 de novembro de 2014*)

NOME: ______________________________ DATA: ____/____/________

> "Não há ciência que fale das harmonias da natureza com mais clareza do que a matemática"
> (Paulo Carus)

Sumário

1 Introdução

Agradeço por lerem estas notas de aula e por contribuirem nas correções de digitação. Aqui apresentamos as ideias básicas para introdução dos conteúdos previstos em nossa ementa. Elas foram organizadas a partir dos livros indicados na bibiografia, direcionadas às disciplinas Cálculo II (UNEB) e Cálculo B (UFBA). Nunca esqueçam que:

✓ Esta apostila **não** substitui o livro e **jamais** deverá ser tratado como único texto ou como texto base para seus estudos;

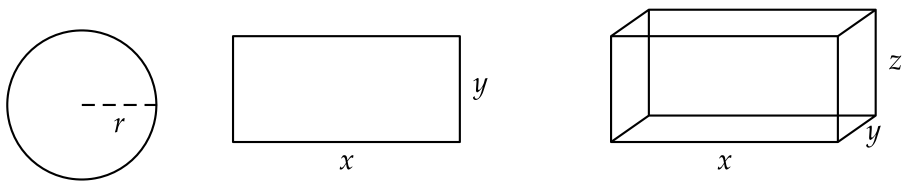
✓ Ela é nosso "ponto de partida" ou nossa orientação na sequência dos contéudos que iremos conversar em sala;

✓ Prestem bem atenção com a notação utilizada. A matemática possui uma linguagem própria.

Considerando o círculo de raio r, vemos que sua área e seu comprimento dependem somente da medida do raio, isto é, $A(r) = \pi \cdot r^2$ e $C(r) = 2\pi \cdot r$. No entanto, podemos notar que a análise de outros numerosos fenômenos necessitam do emprego de fórmulas/relações que envolvam duas ou mais variáveis independentes. Por exemplo:

◇ A área de um retângulo de lados x e y é dada por $A(x, y) = x \cdot y$, em que a cada par de valores x e y corresponde um único valor bem determinado $x \cdot y$;

◇ O volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões x, y e z é dado por $V(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$, em que a cada terno (x, y, z) o volume corresponde um valor bem determinado $x \cdot y \cdot z$.



Assim, considere a seguinte definição.

Definição 1 (Função de n Variáveis)

Seja D um conjunto do espaço n-dimensional $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$, isto é, os elementos de D são n-uplas ordenadas, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, de números reais. A cada ponto P do conjunto D associamos um único elemento $z \in \mathbb{R}$, assim temos uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Essa função é chamada de função a *n-variáveis reais a valores reais*, a qual indicamos por

$$z = f(P) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Observação 1

(i) O conjunto D, denominado *domínio* da função, é o maior subconjunto do $\mathbb{R}^n$ (podendo ser o próprio $\mathbb{R}^n$) em que $z = f(P)$ exista. Usamos a seguinte notação: $D = \mathrm{Dom}(f)$;

(ii) O conjunto de todos os valores possíveis de z que pode ser obtido aplicando a relação f aos pontos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é a *imagem* de f, a qual indicamos por $\mathrm{Im}(f)$;

(iii) Dizemos que z é a variável dependente e que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as variáveis independentes.

O *gráfico* da função f a n-variáveis reais é o conjunto dos pontos (P, z) no espaço $(n+1)$-dimensional, em que $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, assim, escrevemos:

$$\text{Graf}(f) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1}; z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}.$$

Desta definição, podemos observar que:

(i) quando $n = 1$, a função é de uma variável ($y = f(x)$) e seu gráfico é

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\},$$

que é uma curva no $\mathbb{R}^2$;

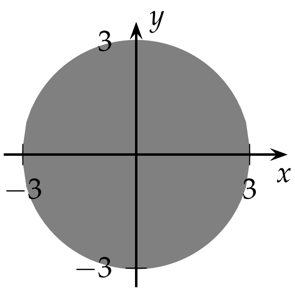
(ii) quando $n = n$, a função é de duas variável ($z = f(x, y)$) e seu gráfico é

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x, y)\},$$

que é uma superfície no $\mathbb{R}^3$;

(iii) quando $n \geq 3$, o gráfio de f não possui representação gráfica.

Exemplo 1
Seja $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ uma função de 2 variáveis, assim seu domínio é um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ e seu gráfico é um subconjunto do $\mathbb{R}^3$. Para que $\sqrt{9 - x^2 - y^2}$ seja um número real devemos ter

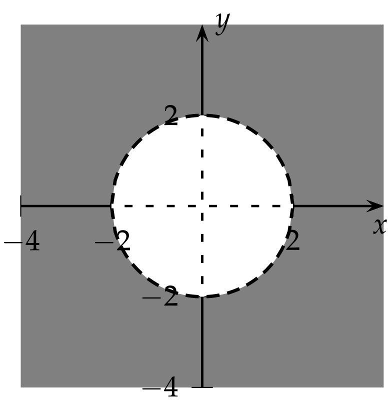


$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 9$. Daí, escrevemos:

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Graficamente, esse domínio representa uma região circular de raio 3, como ilustra a figura ao lado.
A imagem de f é o intervalo $[0, 3]$ e escrevemos $\text{Im}(f) = [0, 3]$.

Exemplo 2
Seja $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$ uma função de 2 variáveis, assim seu domínio é um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ e seu gráfico é um subconjunto do $\mathbb{R}^3$. Para que $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$ seja um número real devemos ter

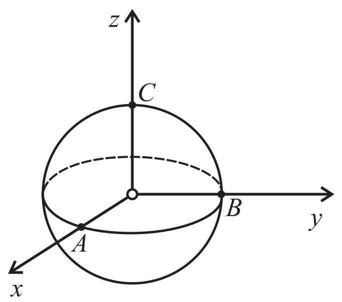


$x^2 + y^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 4$. Daí, escrevemos:

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 > 4\}.$$

Graficamente, esse domínio representa a região do plano que está no exterior do círculo de raio 2, como ilustra a figura ao lado.
A imagem de f é $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$.

Exemplo 3
Seja $f(x, y, z) = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$ uma função de 3 variáveis, assim seu domínio é um subconjunto do $\mathbb{R}^3$ e seu gráfico é um subconjunto do $\mathbb{R}^4$. Para que $\sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$ seja um número real devemos ter $16 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ ou ainda $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$, assim



$$\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leq 16\}.$$

Graficamente, esse domínio representa uma região esférica de raio 4, como ilustra a figura ao lado onde $A(4,0,0)$, $B(0,4,0)$ e $C(0,0,4)$ e que $f(A) = f(B) = f(C) = 0$.
Note que não é possível representar graficamente o gráfico dessa função, pois está no $\mathbb{R}^4$. A imagem de f é o intervalo $[0,4]$ e escrevemos $\mathrm{Im}(f) = [0,4]$.

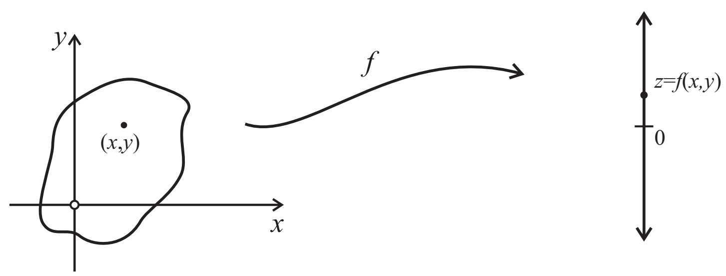
2 Funções de Duas Variáveis

Por questões geométricas, iremos concentrar nossas energias às funções de duas variáveis, visto que, em geral os resultados são válidos para funções a n-variáveis, $n \geq 3$.

Definição 2 (Função de duas Variáveis)

Uma *função real a duas variáveis* é uma relação que transforma em um único número real z cada par ordenado (x,y) de números reais de um certo conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$, chamado de domínio da função, e escrevemos $z = f(x,y)$. Em outras palavras

$$\begin{array}{rcl} f : D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & z = f(x,y) \end{array}$$



Observação 2
(i) O conjunto $D = \mathrm{Dom}(f)$ é o maior subconjunto do $\mathbb{R}^2$ (podendo ser o próprio $\mathbb{R}^2$) em que $z = f(x,y)$ exista. Ele é representado através de um conjunto de pontos no planor xy;

(ii) Na equação $z = f(x,y)$, dizemos que z é a variável dependente e que x e y são as variáveis independentes;

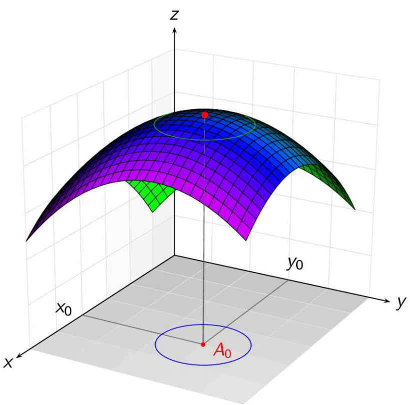
(iii) O conjunto de todos os valores possíveis de z, que pode ser obtido aplicado a relação f aos pares ordenados $(x,y) \in D$, é denominado *Imagem* de f, a qual indicamos por $\mathrm{Im}(f)$;

(iv) O gráfico da função f é o conjunto dos pontos (x,y,z) no espaço tridimensional, tal que $(x,y) \in \mathrm{Dom}(f)$ e $z = f(x,y)$, em outras palavras

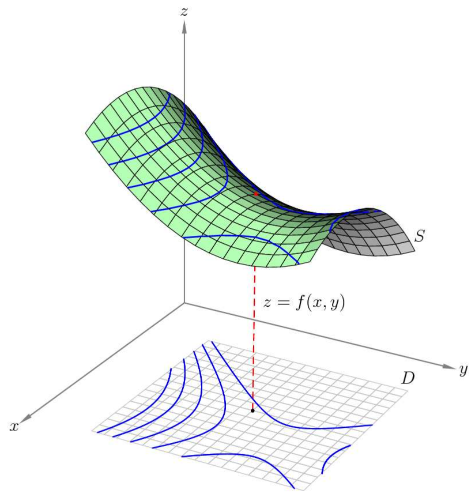
$$\mathrm{Graf}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = f(x,y)\},$$

que é uma superfície no $\mathbb{R}^3$, cuja projeção perpendicular ao plano xy é D.

Observe que quando (x,y) varia em D, o ponto correspondente $(x,y,z) = (x,y,f(x,y))$ varia sobre a superfície.



(a) Gráfico de função



(b) Curvas de nível

Dada uma superfície S, podemos nos perguntar se ela sempre representa o gráfico de uma função $z = f(x, y)$. A resposta é **não**! Sabemos que, se f é uma função, cada ponto de seu domínio pode ter somente uma imagem. Portanto, a superfície S só representará o gráfico de uma função $z = f(x, y)$ se qualquer reta perpendicular ao plano$-xy$ corta S no máximo em um ponto.

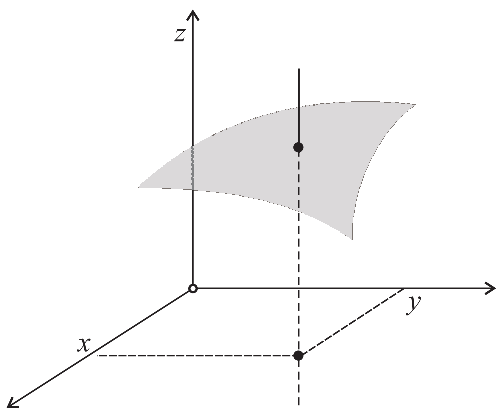


Figura 1: S é gráfico de função $z = f(x, y)$

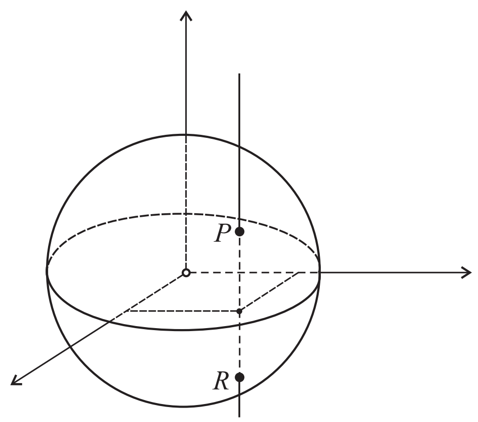
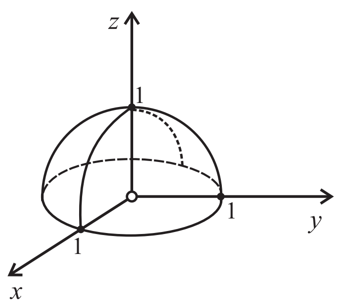


Figura 2: S não é gráfico de função

Observe que na figura 2 os pontos $P(x_1, y_1, z_1)$ e $R(x_2, y_2, z_2)$ são imagens de um único ponto (x, y) do $\mathbb{R}^2$ com $z_1 \neq z_2$.

Exemplo 4

Seja $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ uma função de 2 variáveis. Deste modo, seu domínio é um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ e seu gráfico é um subconjunto do $\mathbb{R}^3$. Para que $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ seja um número real devemos ter $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ ou ainda $x^2 + y^2 \leq 1$, logo $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.



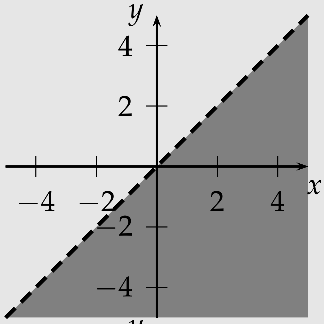
Um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pertence ao gráfico de f se, e somente se, $z = f(x, y)$, isto é, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, equivalentemente a $z \geq 0$ e $z^2 + x^2 + y^2 = 1$. Deste modo, o gráfico consiste no hemisfério superior da esfera $z^2 + x^2 + y^2 = 1$, conforme figura ao lado.

A imagem de f é o intervalo $[0, 1]$ e escrevemos $\mathrm{Im}(f) = [0, 1]$.

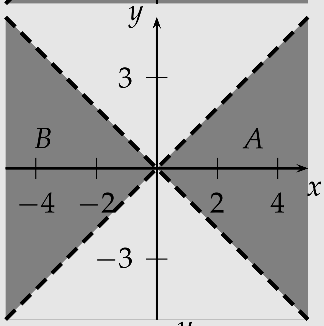
Exemplo 5
Fazer uma representação gráfica do domínio das seguintes funções:
(a) $f(x,y) = \ln(x-y)$; (b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2-y^2}}$; (c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-25}}$.

Solução:

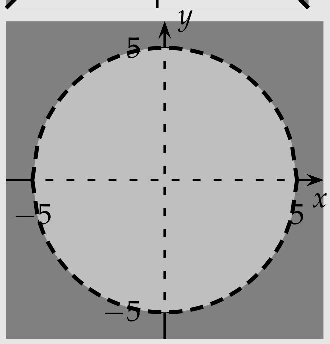
(a) Sabemos que $\ln(x-y)$ é um número real quando $x-y>0$ ou $x>y$. Assim, $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y<x\}$, graficamente temos a figura ao lado.



(b) Sabemos que $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2-y^2}}$ é um número real quando $x^2-y^2>0$ ou $(x-y)(x+y)>0$, logo $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-y)(x+y)>0\}$. Lembrando que $(x-y)(x+y)$ é um número real positivo quando $x-y>0$ e $x+y>0$ ou $x-y<0$ e $x+y<0$. Na figura, a região A represента o primeira caso, enquanto a região B o segundo.



(c) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-25}}$ é um número real quando $x^2+y^2-25>0$ ou $x^2+y^2>25$, logo $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2>25\}$. Esse é o conjunto dos pontos que estão na região exterior à circunferência $x^2+y^2=25$. Conforme figura ao lado.



Exemplo 6
Determinar o domínio da função $f(x,y) = \sqrt{y^2-4} \cdot \ln(x-y)$ e esboce o conjunto no plano xy.

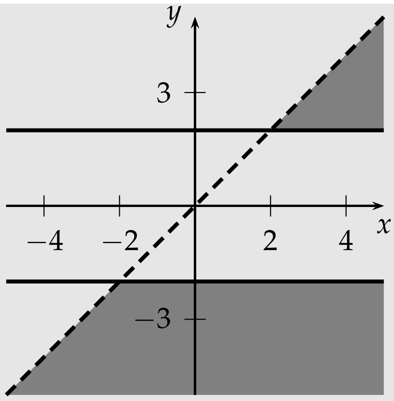
Solução: Nesse caso as restrições para o domínio, são:

$$\begin{cases} y^2-4 & \geq & 0 \\ x-y & > & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y & \leq & -2 \text{ ou } y \geq 2 \\ y & < & x \end{cases}$$

Logo, o domínio de f é:

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \leq -2 \text{ ou } y \geq 2 \text{ e } y < x\}.$$

Veja a representação gráfica do domínio ao lado.



Questão 1 Determine o domínio das funções dadas a seguir e esboce os conjuntos no plano xy.

(a) $f(x,y) = \sqrt{x-1} + \sqrt{y}$;
(b) $f(x,y) = 2x - y$;
(c) $f(x,y) = \ln(x+y)$;
(d) $g(x,y) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2-4}} + \sqrt{9-(x^2+y^2)}$;
(e) $f(x,y) = \sqrt{y-x} + \sqrt{1-y}$;
(f) $f(x,y) = \dfrac{x+y-1}{\sqrt{x^2+4y^2-16}}$;
(g) $h(x,y) = \ln(x^2+y^2)$;
(h) $f(x,y) = 1 - x - \dfrac{1}{2}y$;
(i) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{y}$;
(j) $f(x,y) = \dfrac{xy}{y-x^2}$;
(k) $f(x,y) = \sqrt{y-x^2}$;
(l) $f(x,y) = \ln(2x+y) = \sqrt{y-1}$.

2.1 Curvas de Nível

No caso das funções de uma variável, uma maneira de obter seu gráfico é elaborar uma tabela determinando os valores da função para uma série de pontos de seu domínio. Esse método rudimentar, embora não muito eficiente, constitui uma ferramenta importante. No entanto, pra esboçar o gráfico de uma forma mais precisa, vários outros recursos são utilizados, tais como determinação de raízes, assíntotas, intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de máximos e mínimos etc.

Para uma função de duas variáveis, é praticamente impossível obter um esboço do gráfico apenas criando uma tabela com os valores da função em diversos pontos de seu domínio. Para contornar essa dificuldade, vários procedimentos são adotados. O principal deles, muito usado pelos cartógrafos na elaboração de mapas de relevo, consiste em determinar os conjuntos de pontos do domínio da função, em que esta permanece constante. Esses conjuntos de pontos são chamados *curvas de nível da função* e são definidas assim:

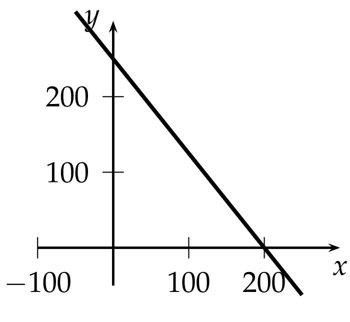
Definição 3 (Curvas de Nível)

Seja k um número real. Uma curva de nível, C_k, de uma função $z = f(x,y)$ é o conjunto de todos os pontos do domínio da função f, tais que $f(x,y) = k$, ou seja,

$$C_k = \{(x,y) \in D(f); f(x,y) = k\}.$$

Exemplo 7
Suponha que $\mathrm{T}(x,y) = 80 - \dfrac{x}{20} - \dfrac{y}{25}$ dê a temperatura em graus F no ponto com coordenadas cartesianas (x,y), onde x e y estão medidos em milhas.

A equação da curva ao logo do qual a temperatura tem um valor constante e igual a 70°F é $\mathrm{T}(x,y) = 70$, isto é, $80 - \dfrac{60}{20} - \dfrac{75}{25} = 70$, ou $5x + 4y = 1000$.



Essa última equação, cuja representação geométrica é uma reta, é a curva de nível para a função $\mathrm{T}(x,y)$, quando $k = 70$. Isto quer dizer que para quaisquer par ordenado (x,y), que satisfaça a equação da curva, terá imagem por T igual a 70.

Questão 2 Seja $f(x,y) = \ln\left(x^2 + \dfrac{y^2}{9}\right)$. Determine e esboce a equação da curva de nível que passa pelo ponto $(1,0)$.

Dica/Resp.: Determine $f(1,0)$, obtendo $k = \ln(1) = 0$. Em seguida, iguale a função a 0 para obter $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$, uma elpise. Esta curva é a curva de nível 0.

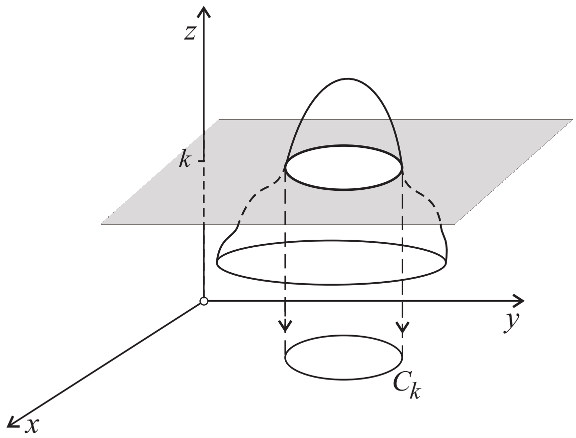
Questão 3 Se $V(x,y)$ for a voltagem ou potencial sobre um ponto (x,y) no plano XOY, então as curvas de nível de V são chamadas de curvas equipotenciais. Ao longo de tal curva a voltagem permanece constante. Dado que $V(x,y) = \dfrac{8}{\sqrt{15 + x^2 + y^2}}$, identifique e trace a curva equipotencial na qual $V = 1$.

Dica/Resp.: Iguale a função a 1 para obter a curva $x^2 + y^2 = 49$, que é a circunferência de raio 7 e centro $(0,0)$.

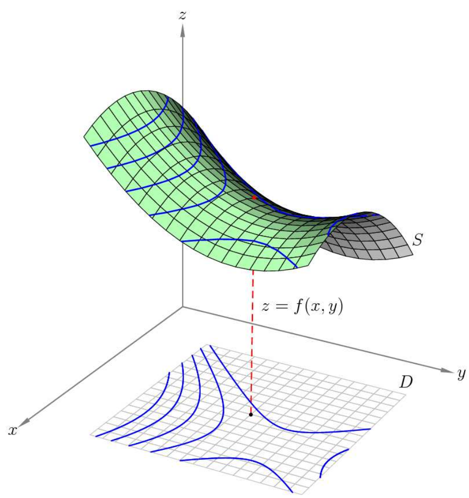
2.1.1 Mapa de Contorno da Superfície

Suponha que por uma função f se estabeleça a altura $z = f(x,y)$ de uma certa superfície S do plano xy no ponto (x,y). A intersecção de superfície S com o plano $z = k$ produz a curva C_k constituída por todos os pontos da superfície que estejam a k unidades acima do plano xy.

A projeção perpendicular da curva C_k sobre o plano$-xy$ resulta na curva de nível da função f, cuja equação é $f(x,y) = k$, que também denominada de *linha de contorno* da superfície S. Como ilustra a figura a seguir.



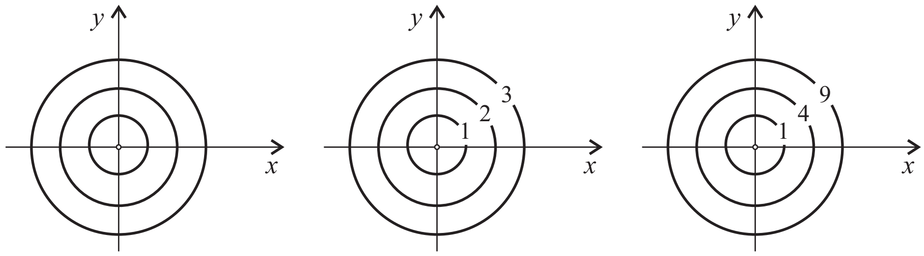
(a) Curva de Nível



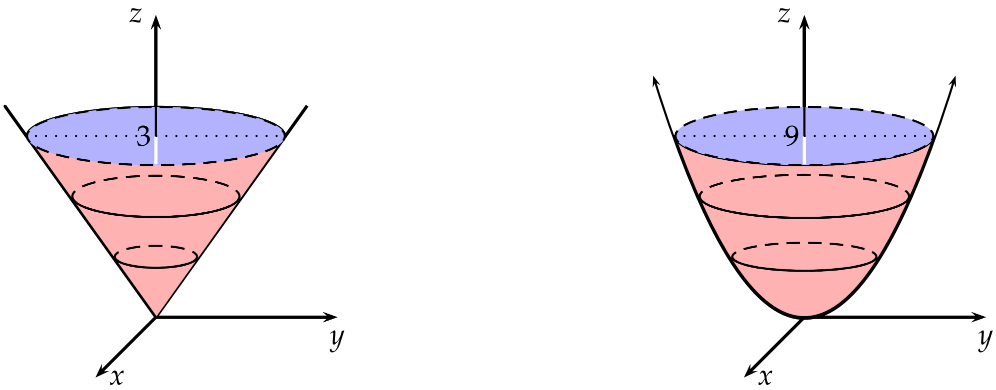
(b) Curvas de nível

Desenhando um certo número de diferentes linhas de contorno, cada qual identificada pelo próprio valor de k a ela associada, obtemos o *mapa de contorno da superfície*. Tal mapa de contorno facilita–nos a visualização da superfície como se estivéssemos sobre ela, observando suas intersecções com os planos horizontais de alturas variadas. Se essas alturas são consideradas de modo a diferir por iguais quantidades, então uma grande quantidade de linhas de contorno sucessivas indica uma parte relativamente íngreme da superfície.

Exemplo 8
Sejam $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $g(x,y) = x^2 + y^2$ duas funções de duas variáveis reais. Fazendo seções com planos paralelos ao plano-xy ao gráfico da f e g nas alturas, $k = 1,2,3$ e $k = 1,4,9$ respectivamente, temos que as curvas de nível das duas funções são circunferências de raio $1,2$ e 3 centradas na origem, porém em níveis diferentes.



Assim usando somente as curvas de nível, podemos ter dificuldade em esboçar o gráfico corretamente, se não olharmos com cuidado ao mapa de contorno. Observemos que as intersecções do gráfico de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ com os planos yz e xz são as semi-retas $z = \pm y$ e $z = \pm x$, $z \geq 0$, respectivamente. Por sua vez, a intersecção de $z = x^2 + y^2$ com os planos yz e xz são, respectivamente, as parábolas $z = y^2$ e $z = x^2$. Essas informações ajudam a ver que o gráfico da f é um *cone* e que o gráfico da g é um *parabolóide*.



2.1.2 Roteiro para Construção de Gráfico

Abaixo, vamos apresentar um pequeno roteiro capaz de nos dar uma ideia do gráfico da função de duas variáveis.

Roteiro para Esboço de Gráfico:

1. Identificar o domínio da função, não é necessário a representação gráfica;
2. Encontrar as interseções com os eixos coordenados x, y e z;
3. Interseções com os planos coordenados xy, xz e yz;
4. Identificar as seções paralelas, fazendo $x = k$ e $y = k$, sendo k uma constante;
5. Encontrar as curvas de níveis e fazer o seu esboço gráfico;
6. Esboçar o gráfico da função.

Exemplo 9

Esboce o gráfico da função $f(x, y) = 9x^2 + 4y^2$, seguindo o roteiro indicado anteriormente.

Solução:

1. Identificar o domínio da função;

Veja que o domínio da função $f(x,y) = 9x^2 + 4y^2$ é $D(f) = \mathbb{R}^2$, pois, para cada par ordenado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ o valor da função é um número real.

2. Encontrar as interseções com os eixos coordenados OX, OY e OZ;

   Interseção com OX: $y = z = 0 \Rightarrow 9x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Logo, o ponto $(0,0,0)$ é interseção.

   Interseção com OY: $x = z = 0 \Rightarrow 4y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$. Logo, o ponto $(0,0,0)$ é interseção.

   Interseção com OZ: $x = y = 0 \Rightarrow z = 0$. Logo, o ponto $(0,0,0)$ é interseção.

3. Interseções com os planos coordenados XOY, YOZ e XOZ;

   Interseção com XOY: $z = 0 \Rightarrow 9x^2 + 4y^2 = 0$. Observe que o único ponto que satisfaz a equação acima é o $(0,0,0)$. Logo, o ponto $(0,0,0)$ interseção com o plano XOY.

   Interseção com YOZ: $x = 0 \Rightarrow z = 4y^2$. Observe que a interseção com o eixo YOZ é uma parábola $z = 4y^2$.

   Interseção com XOZ: $y = 0 \Rightarrow z = 9x^2$. Observe que a interseção com o plano XOZ é uma parábola $z = 9x^2$.

4. Identificar as seções paralelas, fazendo $x = k$ e $y = k$, sendo k constante:

   Interseção com seções paralelas ao plano YOZ: $x = k \Rightarrow z = 9k^2 + 4y^2$. Observe que se k é uma constante a equação $z = 4y^2 + 9k^2$ representa parábolas.

   Interseção com seções paralelas ao plano XOZ: $y = k \Rightarrow z = 9x^2 + 4k^2$. Observe que se k é uma constante a equação $z = 9x^2 + 4k^2$ representa parábolas.

5. Encontrar as curvas de níveis e fazer o seu esboço gráfico;

   Para encontrarmos as curvas de níveis vamos fazer $z = k$, k uma constante, ou seja, vamos identificar as seções paralelas ao plano XOY. Siga o raciocínio abaixo para verificar que essas seções são elipses, cuja equação é dada por: $\dfrac{x^2}{(a)^2} + \dfrac{y^2}{(b)^2} = 1$, em que a e b são números reais que representam os eixos menor ou maior das elipses:

$$9x^2 + 4y^2 = k \Rightarrow \frac{x^2}{1/9} + \frac{x^2}{1/4} = k \Rightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{k}/3)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{k}/2)^2} = 1.$$

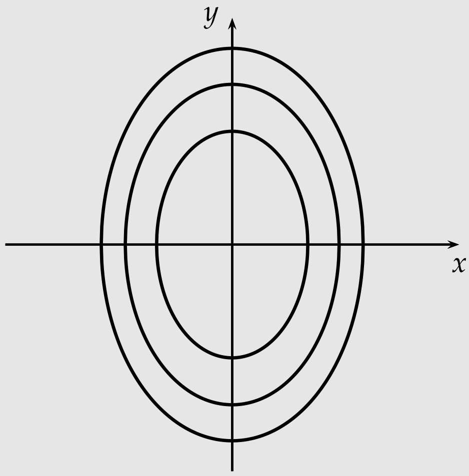
   Para $k \geq 0$ as curvas de níveis são elipses da forma $\dfrac{x^2}{(\sqrt{k}/3)^2} + \dfrac{y^2}{(\sqrt{k}/2)^2} = 1$.

   Para $k = 0$ temos o ponto $(0,0,0)$.

   Para $k \leq 0$ o conjunto é vazio, ou seja, não temos curvas de níveis.

Assim, fazendo $k = 0$, $k = 1$,k = 2, $k = 3$ e assim por diante, obtemos as elipses e podemos traçar as curvas de níveis.

$$\begin{array}{lll}
k=0 & \Rightarrow & (0,0) \\
k=1 & \Rightarrow & \dfrac{x^2}{(1/3)^2}+\dfrac{y^2}{(1/2)^2}=1 \\
k=2 & \Rightarrow & \dfrac{x^2}{(2/3)^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{2}/2)^2}=1 \\
k=3 & \Rightarrow & \dfrac{x^2}{(3/3)^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{3}/2)^2}=1 \\
k=4 & \Rightarrow & \dfrac{x^2}{(2/3)^2}+\dfrac{y^2}{(1)^2}=1 \\
 & \vdots &
\end{array}$$

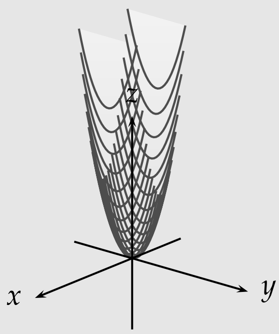


Observe que as curvas de níveis estão se afastando da origem. Logo, nossa superfície é uma "depressão".

6. Esboçar o gráfico da função;

Agora, com os dados obtidos podemos visualizar a superfície tri-dimensional e esboçar.

Veja que a nossa superfície é um parabolóide elíptico.



3 Derivadas Parciais. Taxa de Variação

Definição 4 (Derivada Parcial)

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função real, definida no aberto D. Dado o ponto $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$, a i-ésima derivada parcial de f no ponto P, (em que $1 \leq i \leq n$), é o limite

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(P+te_i)-f(P)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_1,x_2,\ldots,x_i+t,\ldots,x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{t}
\end{aligned}$$

se esse limite existir.

Usamos, ainda, as seguintes notações para $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$: $\partial_{x_i} f$, f_{x_i}, f_i, etc.

Suponhamos que f é uma função de duas variáveis. Então, a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ dá a razão instantânea de variação de f no ponto $P(x_0, y_0)$ por unidade de variação de x. Isto é, a taxa de variação de f por unidade de x no ponto $P(x_0, y_0)$.

Analogamente, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ dá a taxa de variação de f por unidade de y.

Exemplo 10
Ache as derivadas parciais $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, para as seguintes funções:

(a) $z = x^3y^4$ (b) $z = (x+y)^2$ (c) $z = 5x^4y^2 - 2xy^5$ (d) $z = \dfrac{e^{2x}}{y}$ (e) $z = \ln(x \cdot y)$

Solução: Ao derivarmos uma função em relação a uma das variáveis, devemos considerar a outra variável constante, ou seja, $\dfrac{\partial F(y)}{\partial x} = 0$ e $\dfrac{\partial F(x)}{\partial y} = 0$. Assim, utilizamos as mesmas regras de derivação vistas em cálculo I.

(a) Nesse caso vamos precisar da regra de derivação do produto.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial(x^3)}{\partial x} \cdot y^4 + x^3 \cdot \overbrace{\frac{\partial(y^4)}{\partial x}}^{=0} = 3x^2y^4 + 0 = 3x^2y^4 \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \underbrace{\frac{\partial(x^3)}{\partial y}}_{=0} \cdot y^4 + x^3 \cdot \frac{\partial(y^4)}{\partial y} = 0 + x^3 \cdot 4y^3 = 4x^3y^3
\end{aligned}$$

(b) Aqui, usaremos a regra da potência.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= 2(x+y)\frac{\partial(x+y)}{\partial x} = 2(x+y)(1+0) = 2(x+y) \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= 2(x+y)\frac{\partial(x+y)}{\partial y} = 2(x+y)(0+1) = 2(x+y)
\end{aligned}$$

(c) Inicialmente, usaremos a regra da soma de duas funções e depois a regra do produto, em cada parcela.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial(5x^4y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy^5)}{\partial x} = \frac{\partial(5x^4)}{\partial x} \cdot y^2 + 5x^4 \cdot \overbrace{\frac{\partial y^2}{\partial x}}^{}_{=0} - \left[\frac{\partial(2x)}{\partial x} \cdot y^5 + 2x \cdot \overbrace{\frac{\partial(y^5)}{\partial x}}^{}_{=0}\right] \\
&= 20x^3y^2 + 0 - [2y^5 + 0] = 20x^3y^2 - 2y^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial(5x^4y^2)}{\partial y} - \frac{\partial(2xy^5)}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial(5x^4)}{\partial y}}_{=0} \cdot y^2 + 5x^4 \cdot \frac{\partial(y^2)}{\partial y} - \left[\underbrace{\frac{\partial(2x)}{\partial y}}_{=0} \cdot y^5 + 2x \cdot \frac{\partial(y^5)}{\partial y}\right] \\
&= 0 + 5x^4 \cdot 2y - [0 + 2x \cdot 5y^4] = 10x^4y - 10xy^4
\end{aligned}$$

(d) Vamos utilizar a regra do quociente

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial(e^{2x})}{\partial x}\cdot y - e^{2x}\cdot \overbrace{\frac{\partial(y)}{\partial x}}^{=0}}{y^2} = \frac{e^{2x}\cdot\frac{\partial(2x)}{\partial x}\cdot y - 0}{y^2} = \frac{2ye^{2x}}{y^2} = \frac{2e^{2x}}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\overbrace{\frac{\partial(e^{2x})}{\partial y}}^{=0}\cdot y - e^{2x}\cdot\frac{\partial(y)}{\partial y}}{y^2} = \frac{0 - e^{2x}}{y^2} = -\frac{e^{2x}}{y^2}$$

(e) Finalmente, usaremos a regra de derivação do logaritmo neperiano

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{xy}\cdot\frac{\partial(xy)}{\partial x} = \frac{1\cdot y + x\cdot 0}{xy} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{xy}\cdot\frac{\partial(xy)}{\partial y} = \frac{0\cdot y + x\cdot 1}{xy} = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}$$

Fique Atento! Como vimos, ao derivarmos uma função em relação a uma das variáveis, devemos considerar a outra variável constante, ou seja, $\frac{\partial F(y)}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial F(x)}{\partial y} = 0$. Além disso, $\frac{\partial[F(x)\cdot G(y)]}{\partial x} = G(y)\cdot\frac{\partial F(x)}{\partial x}$ e $\frac{\partial[F(x)\cdot G(y)]}{\partial y} = F(x)\cdot\frac{\partial G(y)}{\partial y}$, assim o exemplo anterior pode ser respondido mais rapidamente, veja:

(a) Vamos usar a regra da potência, apenas.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^4\cdot\frac{\partial(x^3)}{\partial x} = 3x^2y^4$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3\cdot\frac{\partial(y^4)}{\partial y} = 4x^3y^3$$

(b) Aqui, usaremos a regra da potência.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x+y)\frac{\partial(x+y)}{\partial x} = 2(x+y)(1+0) = 2(x+y)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(x+y)\frac{\partial(x+y)}{\partial y} = 2(x+y)(0+1) = 2(x+y)$$

(c) Inicialmente, usaremos a regra da soma de duas funções e depois a regra da potência.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial(5x^4y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy^5)}{\partial x} = y^2\cdot\frac{\partial(5x^4)}{\partial x} - y^5\cdot\frac{\partial(2x)}{\partial x} = 20x^3y^2 - 2y^5$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial(5x^4y^2)}{\partial y} - \frac{\partial(2xy^5)}{\partial y} = 5x^4\cdot\frac{\partial(y^2)}{\partial y} - 2x\cdot\frac{\partial(y^5)}{\partial y} = 10x^4y - 10xy^4$$

(d) Inicialmente, veja que $z = \dfrac{e^{2x}}{y} = e^{2x} \cdot y^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= y^{-1} \cdot \frac{\partial(e^{2x})}{\partial x} = y^{-1} \cdot e^{2x} \cdot 2 = \frac{2e^{2x}}{y} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= e^{2x} \cdot \frac{\partial(y^{-1})}{\partial y} = e^{2x} \cdot (-1) \cdot y^{-2} = -\frac{e^{2x}}{y^2}
\end{aligned}$$

(e) Finalmente, usaremos a regra de derivação do logaritmo neperiano.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{xy} \cdot \frac{\partial(yx)}{\partial x} = \frac{y \cdot 1}{xy} = \frac{1}{x} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{xy} \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial y} = \frac{x \cdot 1}{xy} = \frac{1}{y}
\end{aligned}$$

Questão 4 Ache as derivadas parciais $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ para as seguintes funções:

(a) $z = x^2 + 3y^2$

(b) $z = xy$

(c) $z = e^x + y$

(d) $z = \dfrac{2x+3}{y-2}$

(e) $z = e^{xy}$

(f) $z = 2x^3 - 11x^2y + 3y^2$

(g) $z = 6x + 16xy^2 - 9y$

(h) $z = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

(i) $z = \ln(x+y)$

(j) $z = (2x+3)(y-2)$

(k) $z = \ln\left(\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(y)}\right)$

(l) $z = \ln\left(\dfrac{\cos(y)}{\cos(x)}\right)$

Questão 5 A área A da superfície lateral de um cone circular reto de altura h e raio da base r é dada por $A = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$.

(a) Se r é mantido fixo em $3cm$, enquanto h varia, encontre a taxa de variação de A em relação a h, no instante em que a altura é e $7cm$;

(b) Se h é mantido fixo em $7cm$, enquanto r varia, encontre a taxa de variação de A em relação à r, no instante em que $r = 3cm$.

Questão 6 Uma fábrica produz mensalmente x unidades de um produto A e y unidades de um produto B, sendo o custo mensal de produção conjunta dado por $C(x,y) = 15.000 + \sqrt{2x^2 + 8y^2}$ reais. Num determinado mês, foram produzidas 2.000 unidades de A e 1.000 de B.

(a) Calcule o custo de produção neste mês;

(b) Determine $\dfrac{\partial C}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial C}{\partial y}$, neste mês;

(c) Usando o resultado do item (b), o que é mais conveniente: aumentar a produção de A e manter a de B constante ou ao contrário? Por que?

Questão 7 Numa loja, o lucro diário L é uma função do número de vendedores x, e do capital investido em mercadorias y, (y em milhares de reais). Numa certa época tem-se, $L(x,y) = 500 - (10 - x)^2 - (40 - y)^2$, em milhares de reais.

(a) Calcule o lucro diário se a loja tem 4 vendedores e 30.000 reais investidos;

(b) Calcule $\dfrac{\partial L}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial L}{\partial y}$, no ponto $(4, 30)$;

(c) É mais lucrativo aumentar o número de vendedores de uma unidade mantendo o capital investido ou investir mais 1.000 reais mantendo o número de vendedores?

4 Derivadas de Ordem Superior

Seja a função f de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$. As suas derivadas de segunda ordem de f são calculadas a partir de suas primeiras derivadas. Assim:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right).$$

Para funções de duas variáveis, $f(x, y)$, temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

4.1 Teorema de Schwartz

Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ for uma função contínua numa determinada região D com derivadas parciais contínuas, então as derivadas mistas de segunda ordem, da função f, são iguais, ou seja:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}.$$

4.2 Equação de Laplace e Função Harmônica

A equação diferencial parcial $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ é chamada de equação de Laplace em homenagem ao matemático Pierre Laplace (1749-1827). As soluções dessa equação são chamadas de funções harmônicas e são importantes no estudo da condução de calor, escoamento de fluidos e potencial elétrico.

Uma função $f(x, y)$ é dita harmônica se satisfaz a equação de Laplace, ou seja, se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

4.3 Equação de Onda

A equação de onda $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, em que a é uma constante, descreve o movimento de uma onda (onda do mar, onda de som, onda luminosa, onda de uma corda vibrante, etc). Uma solução para a equação da onda é uma função $u(x,t)$. Por exemplo, se $u(x,t)$ representa o deslocamento da corda de um violino, no instante t e x a distancia a uma extremidade da corda, então $u(x,t)$ satisfaz a equação da onda. Neste caso, a constante a depende da densidade da corda e da tensão aplicada.

Questão 8 Usando as informações acima:

(a) verifique se as funções são harmônicas:

$$f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y) + e^y \cos(x); \quad g(x,y) = \ln\left(\sqrt{x+y^2}\right); \quad h(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

(b) verifique se o teorema de Schwartz vale para as funções:

$$f(x,y) = e^{x-y^2}; \quad g(x,y) = e^x + \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(y); \quad h(x,y) = \ln(xy^2) + \operatorname{arctg}(x^2 - y).$$

(c) verifique que a função $u(x,t) = \operatorname{sen}(x - at)$, em que a é uma constante, satisfaz a equação de onda.

Questão 9 Se $w = f(x - at) + (x + at)$, com f e g dotadas de derivadas parciais segundas, mostre que w satisfaz a equação da onda.

5 Reta Tangente e Interpretação Geométrica da Derivada Parcial

O gráfico de uma função de duas variáveis $z = f(x,y)$ é, em geral, uma superfície em $\mathbb{R}^3$. A interseção do plano $y = y_0$ (paralelo ao plano xz) com a superfície $z = f(x,y)$, que passa pelo ponto $(0, y_0, 0)$, é a curva C_1, cuja equação é dada por:

$$C_1 : \begin{cases} y &= y_0 \\ z &= f(x, y_0) = g_1(x) \end{cases}$$

Como a curva é plana, podemos considerá-la como o gráfico de uma função de uma variável: $g_1(x) = f(x, y_0)$. Assim, o coeficiente angular da reta tangente t_1 à curva C_2, no ponto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, é dado por: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g_1'(x_0)$. Assim, a equação da reta tangente, t_1, é dada por:

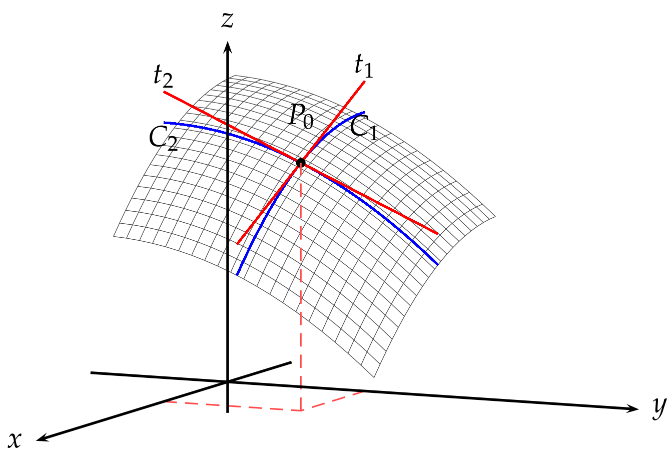
$$t_1 : \begin{cases} y &= y_0 \\ z - z_0 &= \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \end{cases}$$

Analogamente, a interseção do plano $x = x_0$ com a superfície $z = f(x,y)$ é a curva C_2, cuja equação é dada por:

$$C_2 : \begin{cases} x &= x_0 \\ z &= f(x_0, y) = g_2(y) \end{cases}$$

O coeficiente angular da reta tangente t_2 à curva C_1 no ponto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é dado por: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = g_2'(y_0)$. Assim, a equação da reta tangente, t_2, é dada por:

$$t_2 : \begin{cases} x = x_0 \\ z - z_0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \end{cases}$$



Questão 10 Determine a equação da reta tangente ponto $(-1, 1, 5)$ à curva obtida pela interseção da superfície $z = x^2 + 4y^2$ com os planos (a) $x = -1$ e (b) $y = 1$.

6 Plano Tangente e Diferencial Total

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, U um subconjunto aberto. Se $f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0), então, existe um plano tangente a superfície $z = f(x, y)$ no ponto (x_0, y_0) e esse plano tem por equação:

$$z_1 = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)[x - x_0] + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)[y - y_0].$$

Um vetor normal a este plano é $\overrightarrow{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$.

A diferencial total de $f(x, y)$ é

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy.$$

A diferencial total de $f(x, y)$ no ponto (x_0, y_0) é

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)[x - x_0] + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)[y - y_0].$$

Exemplo 11
Dada a função $f(x, y) = 3x^3y^2 - 2xy^3 + xy - 1$, temos $\frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2y^2 - 2y^3 + y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y - 6xy^2 + x$ assim, a diferencial da função é

$$df = (9x^2y^2 - 2y^3 + y)dx + (6x^3y - 6xy^2 + x)dy$$

Questão 11 Encontre diferencial total e a equação do plano tangente das superfícies abaixo, nos pontos indicados.

(a) $z = 3x^2 + xy - 2y^3$ em $(2, 1, 12)$;

(b) $f(x, y) = x^y$ em $(1, 1, 1)$

7 Derivadas Direcionais e Gradiente

Teorema 1
Se $f(x,y)$ é diferenciável em (x_0,y_0), então para todo vetor não nulo $\overrightarrow{u}$ existe a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0,y_0)$ e é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot(a,b),$$

em que $\nabla f(x_0,y_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$ é o vetor gradiente de f em (x_0,y_0), e $(a,b) = \overrightarrow{u^{o}} = \dfrac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}$.

Se $\nabla f(x_0,y_0) \neq 0$ e θ é o ângulo entre o vetor gradiente e u, temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0,y_0) = |\nabla f(x_0),(y_0)|\cdot|u_0|\cdot\cos(\theta) = |\nabla f(x_0,y_0)|\cdot\cos(\theta)$$

Observe que o módulo do versor é 1 e, além disso, a variação das derivadas direcionais depende apenas do $\cos(\theta)$. Como o $\cos(\theta)$ varia de -1 a 1, então num só ponto temos infinitas derivadas direcionais que varia de $-|\nabla f(x_0,y_0)|$ a $|\nabla f(x_0,y_0)|$. Assim, a maior derivada direcional $|\nabla f(x_0,y_0)|$ ocorre quando $\cos(\theta) = 1 \Rightarrow \theta = 0°$, ou seja, ocorre quando o vetor u e o vetor gradiente têm mesma direção e sentido. Daí, nós podemos concluir que:

O vetor gradiente aponta para a direção e sentido em que o crescimento da função é maior.

Da mesma forma, podemos concluir que a menor derivada direcional ocorre para $\cos(\theta) = -1 \Rightarrow \theta = 180°$, ou seja, se u tem a direção do gradiente e sentido contrário a ele.

Questão 12 Encontre a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0,y_0)$, sendo:

(a) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$, $(x_0,y_0) = (1,1)$ e $\overrightarrow{u} = (3,4)$;

(b) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$, $(x_0,y_0) = (3,3)$ e $\overrightarrow{u} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

(c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, $(x_0,y_0) = (3,2)$ e $\overrightarrow{u} = \left(\dfrac{5}{13}, \dfrac{12}{13}\right)$.

Questão 13 Para cada função e ponto indicado abaixo, determine

(i) Um vetor unitário na direção da derivada direcional máxima;

(ii) O valor máximo da derivada direcional.

(a) $f(x,y) = x^2 - 7xy + 4y^2$ e $P_0(1,-1)$;

(b) $g(x,y) = x^2 - y^2 - \operatorname{sen}(y)$ e $P_0\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Questão 14 Uma chapa de metal aquecida está situada em um plano xy de tal modo que a temperatura T é inversamente proporcional à distância da origem. Se a temperatura em $P(3,4)$ é de 100^o, determine a taxa de variação de T em P na direção do vetor $\overrightarrow{u} = (1,1)$. Em que direção e sentido T cresce mais rapidamente em P? Em que direção a taxa de variação é nula?

Questão 15 O potencial elétrico V em um ponto $P(x,y,z)$ num sistema de coordenadas retangulares é dado por $V = x^2 + 4y^2 + 9z^2$. Determine a taxa de variação de V em $P(2,-1,3)$ na direção de P para a origem. Determine a direção e sentido que produz taxa máxima de variação de V em P. Qual a taxa máxima de variação em P?

8 Regra da Cadeia

Seja $z = f(x,y)$ uma função diferenciável em que $x = g(u,v)$ e $y = h(u,v)$. Se $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial v}$ existem, então:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Esse resultado pode ser generalizado para n variáveis. Observe que ao derivarmos uma função de várias variáveis usamos a notação de ∂ (lê-se derrom) em vez de d.

Questão 16 Usando a regra da cadeia encontre as derivadas parciais $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ da função $z = 4x^3 - 3x^2y^3$ sabendo que $x = u\cos(v)$ e $y = v\,\mathrm{sen}(u)$.

8.1 Derivada Total

Seja $z = f(x,y)$ e $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & g(t) \\ y & = & h(t) \end{array}\right.$ $t \in \mathbb{R}$. Podemos expressar z como uma função de uma variável $z = (g(t), h(t))$. Dizemos que a derivada total de z em relação a t, $\dfrac{dz}{dt}$ é dada por:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Exemplo 12
A derivada da função $F(x,y) = x^2 + 3y - 5$, em que $x(t) = e^t$ e $y(t) = t^3$, pode ser obtida a partir da função, posta em função de t, $F(t) = e^{2t} + 3t^3 - 5$, que é:

$$\frac{dF}{dt} = 2e^{2t} + 9t^2.$$

Fazendo o uso das derivadas parciais, temos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3.$$

As derivadas de $x(t)$ e $y(t)$ são:

$$\frac{dx}{dt} = e^t \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2.$$

Assim $\dfrac{dF}{dt} = 2x \cdot e^t + 3 \cdot 3t^2 = 2et + 9t^2$.

Questão 17 Determine a derivada total da função $f(x,y) = x^2y + xy^2$, em que $\begin{cases} x(t) = 2 + t^4 \\ y(t) = 1 - t^3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Questão 18 Num dado instante, o comprimento de um lado de um retângulo é de $6cm$ e cresce a taxa de a $1cm/s$ e o comprimento do outro lado é de $10cm$ e decresce a taxa de $2cm/s$. Encontre a taxa de variação da área do retângulo, no dado instante. (Sugestão: A equação que define a área do retângulo é dada por $A = x \cdot y$. Encontre a derivada total dessa função).

Questão 19 A altura de um cilindro reto de base circular está diminuindo à taxa de $10cm$ por minuto e o raio está aumentando à taxa de $4cm$ por minuto. Encontre a taxa de variação do volume no instante em que a altura é $50cm$ e o raio é de $16cm$.

Questão 20 Em um dado instante, o comprimento de um cateto de um triângulo retângulo é $10cm$ e cresce à razão de $1cm$ por minuto e o comprimento do outro é $12cm$ e decresce à razão de $2cm$ por minuto. Encontre a razão de variação da medida do ângulo agudo oposto ao cateto de $12cm$ de comprimento, no dado instante.

9 Máximos e Mínimos para Funções de Duas Variáveis

Uma importante aplicação do estudo de derivadas parciais, é a da otimização de funções de várias variáveis. Otimizar uma função, significa encontrar seu desempenho máximo ou mínimo, numa vizanhança. Como para as funções de uma variável, quando as derivadas primeiras forem nulas, teremos a oportunidade em avaliar se tais pontos são extremos, podendo ser máximos ou mínimos. Para saber de que tipo são esses pontos, teremos de utilizar o *Determinante Hessiano* calculado no ponto (x_0, y_0), definido a partir da *Matriz Hessiana*. Assim, primeiramente, vamos definir a Matriz Hessiana de uma função f de n variáveis.

A matriz quadrada $n \times n$

$$\text{Hess}[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

das derivadas parciais de segunda ordem da função, é a *Matriz Hessiana* de f, em que $f_{ij} = \dfrac{\partial f^2}{\partial x_i \partial x_j}$.

Se f for de duas ou de três variáveis, temos, respectivamante, suas matrizes Hessianas:

$$\text{Hess}[f(x,y)] = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial f^2}{\partial y^2} \end{bmatrix},$$

$$\text{Hess}[f(x,y,z)] = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial f^2}{\partial y^2} & \dfrac{\partial f^2}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial z \partial x} & \dfrac{\partial f^2}{\partial z \partial y} & \dfrac{\partial f^2}{\partial z^2} \end{bmatrix}.$$

Como consequência do Teorema de Schwartz, quando as derivadas parciais de primeira ordem forem contínuas, a matriz Hessiana será simétrica.

Esta matriz descreve a curvatura local da função f. A matriz Hessiana foi desenvolvida no século XIX pelo alemão Ludwig Otto **Hesse**, razão porque mais tarde James Joseph Sylvester lhe deu este nome. O próprio Hesse, ao contrário, usava o termo *determinantes funcionais*, pois na otimização é utilizado o determinante da matriz Hessiana, o qual definimos como *função Hessiana* de f e, num determinado ponto, o chamaremos de o *Hessiano* de f no ponto.

$\diamond$ *Função Hessiana*: $FH(x,y) = \det(\text{Hess}[f])(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$

$\diamond$ *Hessiano* de f no ponto (x_0, y_0), denotado por $H(x_0, y_0)$, é:

$$\det(\text{Hess}[f])(x_0,y_0) = \left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}\right|_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}.$$

Exemplo 13
Se $f(x,y) = x^2y^3$, então a matriz Hessiana é $\text{Hess}[f] = \begin{bmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y \end{bmatrix}$ e, a função Hessiana é $FH(x,y) = \det(\text{Hess}[f])(x,y) = 12x^2y^4 - 36x^2y^4$. No ponto $(2,1)$, temos $H(2,1) = FH(2,1) = -96$.

9.1 Classificação dos Pontos Críticos

Como a função cresce no sentido do gradiente e decresce no sentido oposto, nos pontos de máximos e mínimos locais o gradiente será nulo, caso exista.

O ponto P_0 tal que $\nabla f(P_0) = \vec{0}$ ou não exista $\nabla f(P_0)$ é denominado *ponto crítico* de f. A imagem deste ponto é denominado *valor crítico* de f. Um ponto é dito *regular* se não for crítico. Veja que, o gradiente é nulo em P_0 se as derivadas parciais se anulam neste ponto, ou seja, $\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial y} = 0$, pois não há restrição alguma no produto xy.

Exemplo 14
Se $f(x,y) = xy$, então $\nabla f(x,y) = (y,x) = \vec{0}$ se, e somente se, $y = x = 0$. Assim, $(0,0)$ é o único ponto crítico de f. Note que não existe (x,y) tal que não exista $\nabla f(x,y)$.

Exemplo 15
Seja $f(x,y) = x \cdot \sqrt[3]{y+1} - x$. Temos que $\nabla f(x,y) = \left(\sqrt[3]{y+1} - 1, \dfrac{x}{3\sqrt[3]{(y+1)^2}} \right)$, assim:

$\diamond$ $\nabla f(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow \sqrt[3]{y+1} - 1 = 0$ e $\dfrac{x}{3\sqrt[3]{(y+1)^2}} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$;

$\diamond$ $\nexists\, \nabla f(x,y) \Leftrightarrow y = -1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Portanto, os pontos críticos são $(0,0)$ e os da forma $(x,-1)$. Note que $(x,-1)$ é toda a reta horizontal $y = -1$.

O critério da segunda derivada, o *teste do Hessiano*, para determinar se um ponto crítico (x_0, y_0) é extremante de f, é:

(i) $H(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (ou $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$) então (x_0, y_0) é um máximo;

(ii) $H(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (ou $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$) então (x_0, y_0) é um mínimo;

(iii) $H(x_0, y_0) < 0$ então (x_0, y_0) é um ponto de sela;

(iv) $H(x_0, y_0) = 0$ o teste é inconclusivo.

Notação:
$f_{xx}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}$, $f_{yy}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$, $f_{xy}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$ e $f_{yx}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x}$.

Questão 21 Para cada função, determine seus pontos críticos e use o teste do Hessiano para classificar esses pontos.

(a) $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$;

(b) $g(x, y) = x^3 + 3xy + y^2 - 2$;

(c) $h(x, y) = x^5 + y^4 - 5x - 32y - 3$;

(d) $p(x, y) = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 6y^2 + 12y - 4$.

Resp.: (a) $P_1(0, 0)$ sela, $P_2(1, 1)$ mínimo; (b) $P_1(0, 0)$ sela, $P_2(3/2, -9/4)$ mínimo; (c) $P_1(1, 2)$ mínimo, $P_2(-1, 2)$ sela; (d) $P_1(0, -1)$ sela, $P_2(1, -1)$ mínimo, $P_3(-3, -1)$ mínimo.

Questão 22 A temperatura T, em graus, em cada ponto de uma região plana é dada por por $T(x, y) = 16x^2 + 24x + 40y^2$. Encontre a temperatura nos pontos mais quentes e mais frios da região.

Resp.: $P_0(3/4, 0)$, mínimo.

10 Wolfram | Alpha

O Wolfram | Alpha é um mecanismo de conhecimento computacional desenvolvido por Stephen Wolfram e sua empresa Wolfram Research. Excelente ferramenta que se demonstra como uma verdadeira fonte dinâmica de conhecimento.

Acesse pelo endereço http://www.wolframalpha.com/ ou baixe seu aplicativo para iOS ou Android.

Alguns comandos úteis para funções de duas variáveis:

1. Digitando “**f(x,y)**” será exibido o gráfico da função $f(x, y)$, o mapa de contorno e algumas propriedades, como domínio, imagem e sua forma geométrica;
2. Digitando “**d/dy f(x,y)**” ele exibirá a derivada parcial de $f(x, y)$, em relação a y.
3. Digitando “**d/dx d/dy (x,y)**” será determinada $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$;
4. Digitando “**domain of f(x,y)**” ele exibirá o conjunto que representa o domínio da função $f(x, y)$;
5. Digitando “**grad f(x,y)**” será exibido o vetor $\nabla f(x, y)$;

Se o usuário estiver logado terá disponível a versão interativa, clicando em “Enable interacivity”. Vale muito a pena!

11 Referências

1. Diva Flemming – Cálculo B;
2. Eliana Patres – DMAT/UFBA;
3. Humberto José Bortolossi – UFF/RJ;
4. James Stwart – Cálculo;
5. Louis Leithold – O Cálculo com Geometria Analítica;
6. Piskunov – Cálculo Diferencial e Integral.

Texto composto em $\LaTeX\,2_\varepsilon$, Cattai, 4 de novembro de 2014