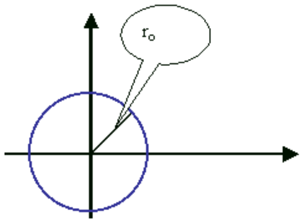
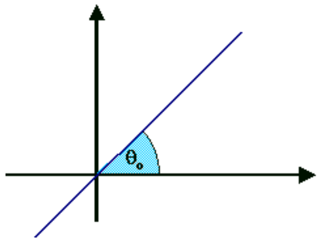
Universidade Federal da Bahia -- UFBA

Departamento de Matemática – Cálculo B – Prof. Adriano Cattai

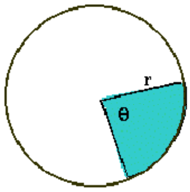
Cálculo de áreas de figuras planas (*coordenadas polares*) de Prof. Eliana Prates

Consideremos o círculo de raio r_o e centro na origem tem equação polar $r = r_o$, e a reta que passa pela origem e faz um ângulo θ_o com o sentido positivo do eixo OX, de equação polar $\theta = \theta_o$, como figura abaixo.





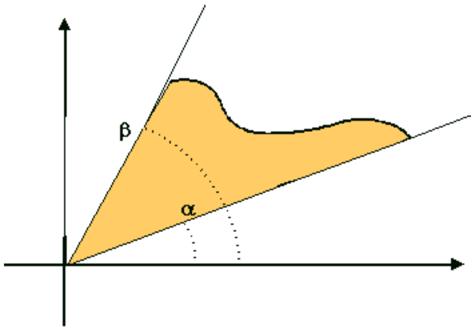
A área de um setor circular de raio r e ângulo central θ é igual a $A = \dfrac{\theta \cdot r^2}{2}$.



Proposição 1:

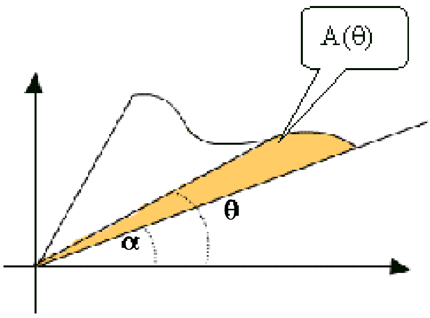
Seja $r = r(\theta)$ a equação polar de uma curva para $\alpha \le \theta \le \beta$, tal que $\beta - \alpha \le 2\pi$ e $r \ge 0$. A área da região do plano limitada pelas retas de equações polares $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e a curva $r = r(\theta)$ é igual a

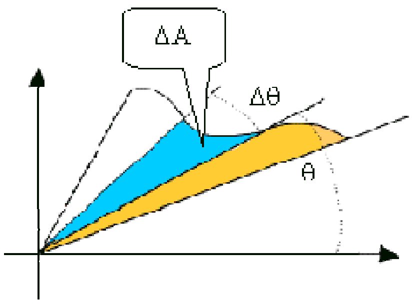
$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta.$$



Demonstração.

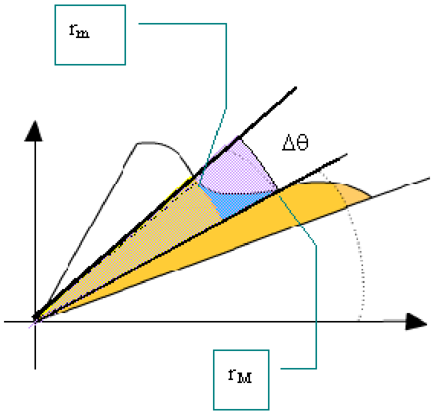
Para todo θ tal que $\alpha \le \theta \le \beta$, seja $A(\theta)$ a área como indicada na figura abaixo. Vamos calcular $\dfrac{dA}{d\theta}$





$$\frac{dA}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{A(\theta + \Delta\theta) - A(\theta)}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta\theta}$$

Para $\Delta\theta > 0$, tomando-se no intervalo $[\theta, \theta + \Delta\theta]$, r_M e r_m o maior e o menor raio, as áreas dos setores circulares com ângulo central $\Delta\theta$ e esses raios são



$$A_M = \frac{r_M^2(\Delta\theta)}{2} \text{ e } A_m = \frac{r_m^2(\Delta\theta)}{2} \text{ e temos}$$

$$A_M = \frac{r_M^2(\Delta\theta)}{2} \leq \Delta A \leq \frac{r_m^2(\Delta\theta)}{2} = A_m \text{ logo}$$

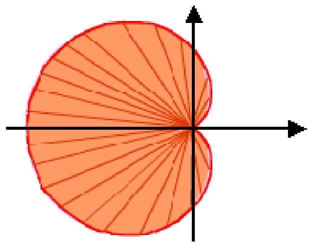
$$\frac{r_M^2}{2} \leq \frac{\Delta A}{\Delta\theta} \leq \frac{r_m^2}{2}$$

Como $\lim\limits_{\Delta\theta \to 0} \frac{r_M^2}{2} = \frac{r^2}{2} = \lim\limits_{\Delta\theta \to 0} \frac{r_m^2}{2}$ então $\frac{dA}{d\theta} = \lim\limits_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta\theta} = \frac{r^2}{2}$.

Para $\Delta\theta < 0$ segue de modo análogo.

Pelo teorema fundamental do cálculo $A = A(\beta) - A(\alpha) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta$ c.q.d.

Exemplo 3: Calcular a área limitada pela cardióide $r(\theta) = a(1 - \cos(\theta))$



$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2.(1 - \cos\theta)^2 d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta =$$

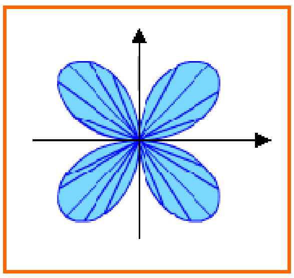
$$= \frac{1}{2}a^2 \left([\theta]_0^{2\pi} - 2[\text{sen}(\theta)]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\theta)) d\theta \right) =$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \left(2\pi + \frac{1}{2}[\theta]_0^{2\pi} + \frac{1}{4}[\text{sen}(2\theta)]_0^{2\pi} \right) = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

Observação 1: São equações de cardióide: $r(\theta) = a(1 \pm \cos(\theta))$ e $r(\theta) = a(1 \pm \text{sen}(\theta))$

Exemplo 4: Calcular a área limitada pelas pétalas da rosácea $r = a\,\text{sen}(2\theta)$, $a>0$.

Trata-se de uma rosácea de 4 pétalas. Devido a simetria das pétalas, basta calcular a área de uma delas e multiplicar por 4.



$$A = 4.\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} a^2 \text{sen}^2(2\theta) d\theta = 2a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(4\theta)) d\theta =$$

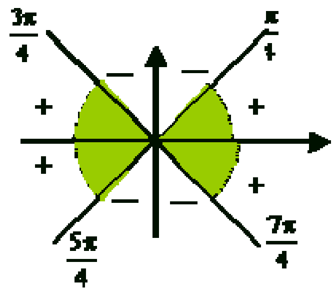
$$= 2a^2 \left([\theta]_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}[\text{sen}(4\theta)]_0^{\pi/2} \right) = 2a^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = a^2.\pi.$$

Observação 2: São equações de rosáceas:

r = a.cos(nθ) e r = a. sen(nθ), para n =1, 2, 3..., que possuem

- ✓ 2n pétalas , se n é par
- ✓ n pétalas se n é ímpar
- ✓

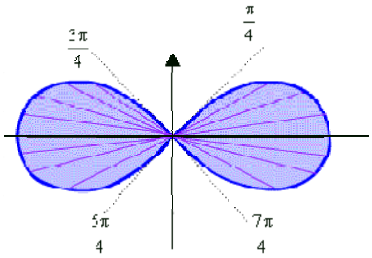
Exemplo 5: Calcular a área limitada pela lemniscata $r^2 = 4.\cos(2\theta)$.



Como θ deve ser tal que cos(2θ) >0, então, na 1ª volta,

$$\theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \cup [\frac{7\pi}{4}, 2\pi]$$

Devido a simetria dos semi-laços, basta calcular a área de uma deles e multiplicar por 4.



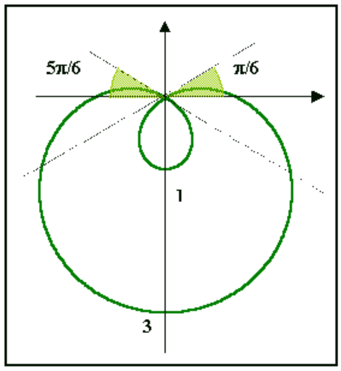
$$A = 4.\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 4\cos(2\theta)d\theta = 4.\left[\operatorname{sen}(2\theta)\right]_0^{\pi/4} =$$

$$4.\left[\operatorname{sen}(\pi/2) - \operatorname{sen}(0)\right] = 4$$

Observação 3: São equações de lemniscata:

$r^2 = a.\cos(2\theta)$ e $r^2 = a.\operatorname{sen}(2\theta)$

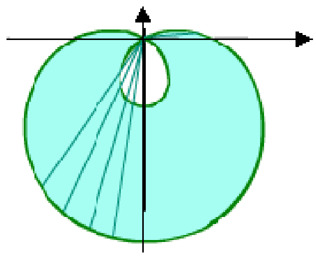
Exemplo 7: Esboce a limaçon (com laço) de equação polar r = a.(1 – 2sen(θ)) e determine uma expressão em integrais que represente a área da região do plano que se encontra no interior da curva e fora do laço.



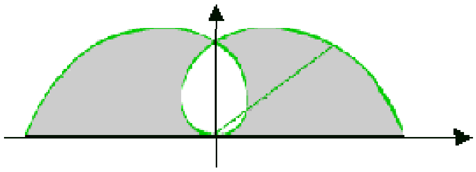
$$A = 2\frac{1}{2}a^2\left(\int_0^{\pi/6}(1-2\operatorname{sen}\theta)^2 d\theta + \int_{\pi}^{3\pi/2}(1-2\operatorname{sen}\theta)^2 d\theta - \int_{\pi/6}^{\pi/2}(1-2\operatorname{sen}\theta)^2 d\theta\right)$$

Observação 4: São equações de limaçons:

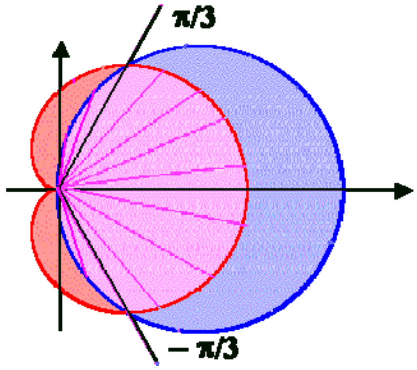
r = a ± b.cos(θ) e r = a ± b.sen(θ) que possuem laço se |a| < |b|



Exemplo 8: Determine uma expressão em integrais que represente a área da região do plano sombreada na figura ao lado onde temos o arco da espiral de Arquimedes de equação polar r = θ ; -π ≤ θ ≤ π . $A = 2\frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} \theta^2 d\theta - \int_{0}^{\pi/2} \theta^2 d\theta\right)$



Exemplo 9: Determine uma expressão em integrais que represente a área da região do plano interior a ambas as curvas de equações polares r =1 + cos(θ) e r = 3cos(θ)



r =1 + cos(θ) é equação de uma cardióide e r = 3cos(θ) é equação de um círculo.

Obtendo a interseção das duas curvas :

3cos(θ) = 1 + cos(θ) ⇒ cos(θ) = 1/2 ⇒

θ = ± π/3 + 2kπ

$$A = 2\frac{1}{2}\left(\int_{0}^{\pi/3} (1+\cos(\theta))^2 d\theta + \int_{\pi/3}^{\pi/2} 9.\cos^2(\theta) d\theta\right)$$