C Á L C U L O I N T E G R A L

— Prof. ADRIANO CATTAI —

Apostila 03: Volume de Sólidos

(*Atualizada em 10 de setembro de 2014*)

NOME: ______________________________ DATA: ___/___/_____

> "Não há ciência que fale das harmonias da natureza com mais clareza do que a matemática"
> (Paulo Carus)

Sumário

1 Introdução

Muito origado por lerem estas notas de aula e por contribuirem nas possíveis correções de digitação e na apresentação das ideias básicas para introdução dos conteúdos que pretendemos estudar na disciplina Cálculo. Elas foram organizadas a partir dos livros indicados na bibiografia, direcionadas à disciplina de Cálculo da UNEB e da UFBA. Nunca esqueçam que:

✓ Esta apostila **não** substitui o livro e **jamais** deverá ser tratado como único texto para seus estudos;

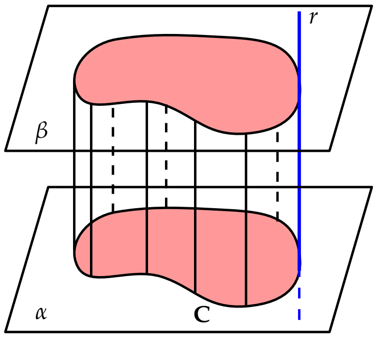
✓ Esta apostila é nosso "ponto de partida" ou nossa orientação na sequência dos conteúdos que são conversados em nossas "saborosas" aulas de Cálculo;

✓ Prestem bem atenção com a notação utilizada. A matemática possui uma linguagem própria, por isso, curta-a!

2 Volume do Cilindro Reto

Veremos, inicialmente, a definição de volume do cilindro reto. Para tanto, tomemos um plano α e uma região R deste plano com área $A(R)$, limitada por uma curva fechada C, como na figura abaixo.

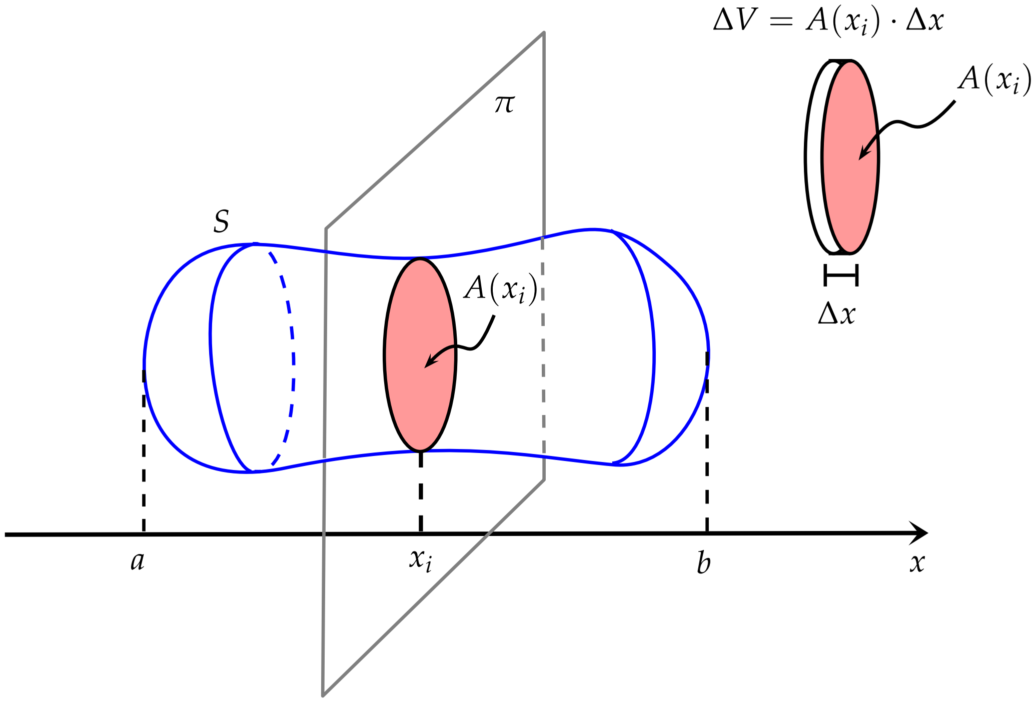
Consideremos uma reta r perpendicular ao plano α e tomemos a superfície cilíndrica tal que C seja sua diretriz e r uma geratriz (isto é, obtida pela reunião de todas as retas paralelas a r passando por algum ponto de C).



Consideremos um plano β, paralelo a α. A região do espaço limitada pela superfície cilíndrica e pelos dois planos é um *cilindro* de base R e altura h, sendo h a distância entre os dois planos. Assim, o volume do cilindro é, $V = A(R) \cdot h$.

3 Volume do Sólido por Secção Transversal

Consideremos um sólido S ao longo do eixo-x, como mostra figura abaixo.



Para cada x_i, em que $a \leq x_i \leq b$, um plano perpendicular ao eixo-x corta o sólido determinando no sólido uma *secção transversal* (*secção plana paralela*) de área $A(x_i)$. De $x = a$ até $x = b$, são determinadas as áreas de todas todas as secções transversais desse sólido, sendo $b - a$ o seu "comprimento".

Usaremos a ideia de Riemann para determinar uma fórmula, com integrais, capaz de determinar o volume de S.

Suponhamos que o intervalo $[a, b]$ seja subdividido em n sub-intervalos, todos de comprimento $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Se x_i é um ponto dessa subdivisão, determina-se um volume de uma secção "cilíndrica", de "base" com área $A(x_i)$ e "altura" Δx, assim:

$$\Delta V = A(x_i) \cdot \Delta x.$$

Uma aproximação do volume do sólido é dado pelo somatório desses vários volumes cilíndricos,

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta V = \sum_{i=1}^{n} A(x_i) \cdot \Delta x.$$

Quanto mais finas as fatias cilíndricas, mais próximo o somatório estará do volume do sólido. Para tanto basta tomar $n \to +\infty$, implicando $\Delta x \to 0$. Deste modo o volume do sólido é igual a

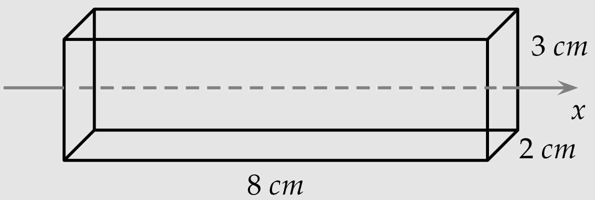
$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x.$$

Assim, diremos que $\mathrm{d}V = A(x)\,\mathrm{d}x$ é o *elemento infinitesimal de volume*, construído sob um ponto x, de um "cilindro" de área da base $A(x)$ e altura (espessura) "infinitesimal" $\mathrm{d}x$. Ao somar os infinitos elementos de volume, temos $V = \int_a^b \mathrm{d}V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$ é igual ao volume do sólido.

Observação 1
Note que, para se ter o volume do sólido, é necessário apenas conhecer a função $A(x)$ que, para cada x, determina a área de cada secção ao longo do eixo x.

Exemplo 1
Mostre que o volume de um paralelepípedo de dimensões 2 cm, 3 cm e 8 cm é 48 cm^3.

Solução: Considerando o sólido ao longo do eixo x, como na figura, cada cada secção transversal é um retângulo de área $A(x) = 2 \cdot 3 = 6$, $x \in [0, 8]$.

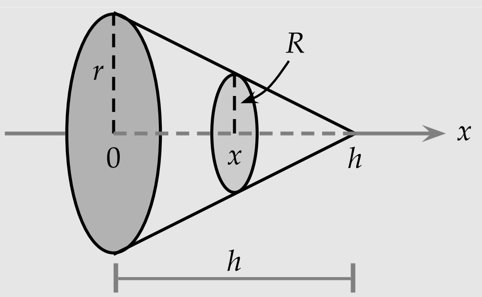


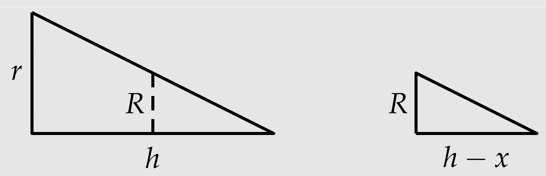
O elemento de volume é $\mathrm{d}V = 6\,\mathrm{d}x$. Logo,

$$V = \int_0^8 6\,\mathrm{d}x = 6x\Big|_0^8 = 6 \cdot 8 - 6 \cdot 0 = 48\ cm^3.$$

Exemplo 2
Mostre que o volume (a) do cone de altura h e raio da base r é dado por $\dfrac{\pi r^2 \cdot h}{3}$ e que (b) o de uma pirâmide, cuja base é um quadrado de lado ℓ, é $\dfrac{\ell^2 \cdot h}{3}$.

Solução: (a) Para todo $x \in [0, h]$ a secção plana é um círculo de R (variável) cuja área é dada por $A(x) = \pi \cdot R^2$. Precisamos obter R.





$$\frac{r}{R} = \frac{h}{h-x} \Rightarrow R = \frac{r(h-x)}{h}$$

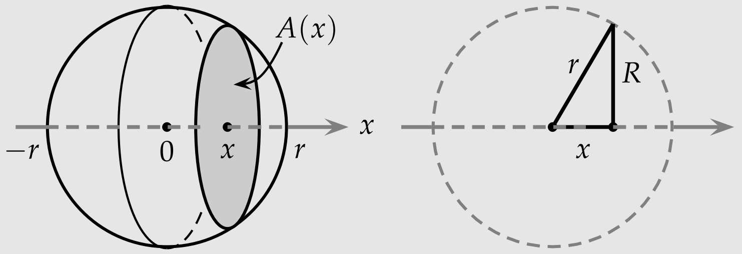
Por semelhança entre triângulos (fugura acima) temos que $R = \dfrac{r(h-x)}{h}$. Como $\mathrm{d}V = A(x)\,\mathrm{d}x$, temos

$$\mathrm{d}V = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot (h^2 - 2hx + x^2)\,\mathrm{d}x \ \Rightarrow\ V = \int_0^h \mathrm{d}V = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h h^2 - 2hx + x^2\,\mathrm{d}x.$$

Calculando esta integral (calcule!) obtém-se o desejado.
(b) Proceda como em (a), observando que a área da secção transversal agora será um quadrado.

Exemplo 3
Mostre que o volume da esfera de raio r é $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$.

Solução: De fato, para todo $x \in [-r, r]$ a secção plana é um círculo de R (variável) cuja área é dada por $A(x) = \pi \cdot R^2$. Precisamos obter R.

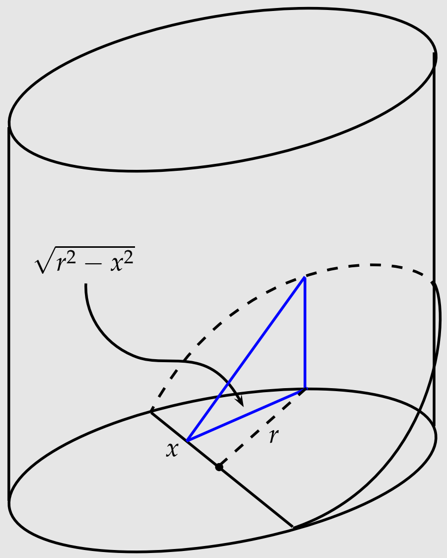


- $r^2 = R^2 + x^2 \Rightarrow R = \sqrt{r^2 - x^2}$
- $A(x) = \pi(r^2 - x^2)$
- $\mathrm{d}V = \pi(r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x$

Agora é só integrar, donde $V = \displaystyle\int_{-r}^{r} \mathrm{d}V = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = r^2 x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-r}^{r} = \ldots = \frac{4\pi r^3}{3}$.

Exemplo 4
Corta-se uma cunha a partir da base de um cilindro de raio r com um plano que passa por um diâmetro da base e é inclinado de um ângulo de $45°$ com relação à base. Determine o volume dessa cunha.

Solução: Consideremos o diâmetro em que o plano corta como eixo x. Para cada $x \in [-r, r]$, a secção transversal perpendicular ao diâmetro será um triângulo retângulo e isósceles (por que?) de catetos medindo $\sqrt{r^2 - x^2}$. Desta forma, a área de cada seção é dada por $A(x) = \dfrac{1}{2}(r^2 - x^2)$.



O elemento de volume é

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x, \quad -r \leq x \leq r.$$

Portanto, o volume é dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} r^2 - x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-r}^{r} \\ &= \ldots \\ &= \frac{2r^3}{3}. \end{aligned}$$

3.1 Questões

Fonte das questões: apostila de Joseph (DMAT-UFBA)

Q 1 Calcule o volume de um tronco de pirâmide, de altura h, cuja base é um quadrado de lado a e cujo topo é um quadrado de lado b.

Q 2 Calcule o volume de um sólido que tem base um círculo de raio r e cujas seções transversais a um diâmetro da mesma são triângulos equiláteros, todos situados em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e que têm como um dos seus lados cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro.

Q 3 Calcule o volume de um sólido que tem base um círculo de raio r e cujas seções transversais a um diâmetro da mesma são triângulos retângulos isósceles, todos situados em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e que têm como um dos seus catetos cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro.

Q 4 Calcule o volume de um sólido que tem base um círculo de raio r e cujas seções transversais a um diâmetro da mesma são triângulos retângulos isósceles, todos situados em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e que têm como hipotenusa cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro.

Q 5 Calcule o volume de um sólido que tem base um círculo de raio r e cujas seções transversais a um diâmetro da mesma são semi-elipses, todas situadas em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e que têm o eixo menor como cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro e a medida do eixo maior igual ao dobro da medida do eixo menor. (Aproveite, mostre que a área da elipse de semi-eixos maior a se semi-eixo menor b é igual a πab).

Q 6 Calcule o volume de um sólido que tem para base um círculo de raio r e cujas seções transversais a um diâmetro da mesma são semi-elipses, todas contidas em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e que têm o eixo menor como cordas da circunferência da base, perpendiculares a esse diâmetro e todas elas têm a mesma excentricidade e.

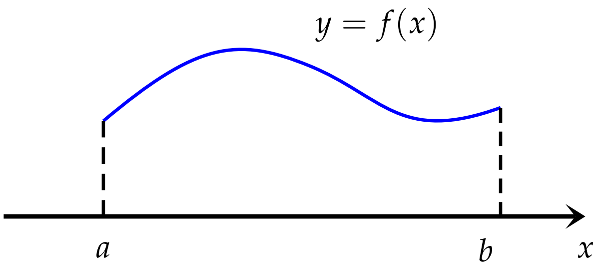
Q 7 Calcule o volume de um sólido que tem para base uma elipse de semi-eixo maior e menor a e b, respectivamente, e cujas seções transversais ao eixo menor são semi-círculos, todos situados em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e tendo para diâmetros cordas da elipse da base, perpendiculares ao eixo menor.

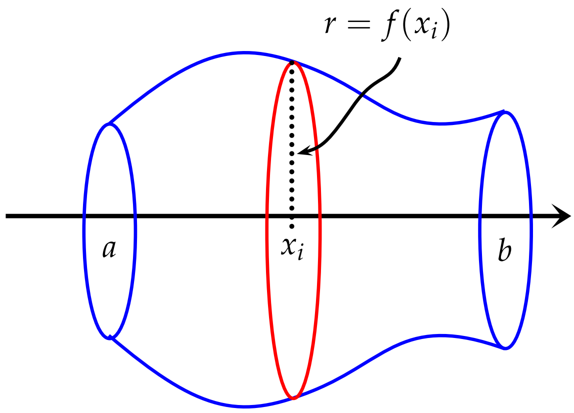
Q 8 Calcule o volume de um sólido que tem para base uma elipse de semi-eixo maior e menor a e b, respectivamente, e cujas seções transversais ao eixo maior são semi-círculos, todos situados em um mesmo semi-espaço em relação ao plano que a contem, e tendo para diâmetros cordas da elipse da base, perpendiculares ao eixo maior. (Observe que esse volume é menor do que o volume do item anterior).

Q 9 Calcule o volume do sólido de base $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 \leq x \leq 3 - 3y^2\}$ cujas seções por planos perpendiculares ao eixo x são quadrados com um lado apoiado em B.

4 Volume do Sólido de Revolução: Método do Disco e do Anel

Considere o sólido gerado pela rotação da curva $y = f(x)$ em torno do eixo x no intervalo $[a, b]$, como mostra a figura abaixo.





Vimos que o volume do sólido, por secção plana, é dado por

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x,$$

em que $\mathrm{d}V = A(x)\,\mathrm{d}x$ é o *elemento infinitesimal de volume*, construído sob um ponto x, de um "cilindro" de área da base $A(x)$ e altura (espessura) "infinitesimal" $\mathrm{d}x$.

Pelo método do disco, cada seção plana tem área igual a área de um círculo, cujo raio é dado pela distância da curva até o eixo de rotação que, neste caso, é igual a $f(x)$. Assim, $A(x) = \pi \cdot [f(x)]^2$ e o volume do sólido de revolução obtido pela rotação da curva $y = f(x)$, no intervalo $[a, b]$, é

$$V = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

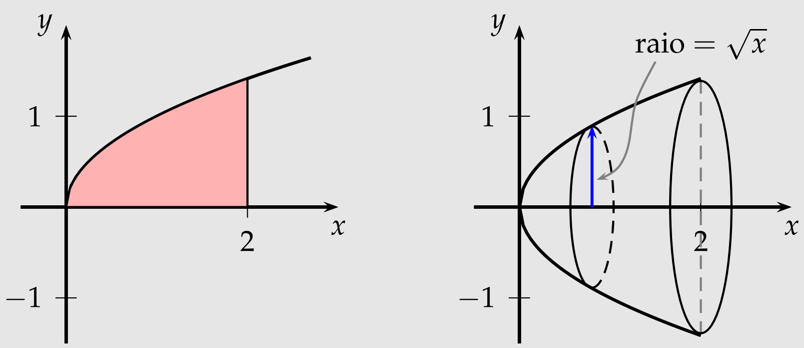
O elemento infinitésimo é dado por $\mathrm{d}V = \pi \cdot [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Exemplo 5

Seja R a região do plano delimitada pelo eixo x e pelo ramo de parábola $y = \sqrt{x}$, para $0 \leq x \leq 2$. Determine o volume do sólido obtido pela rotação de R, em torno do eixo x.

Solução: Para cada $x \in [0, 2]$, a seção transversal ao eixo x é um círculo gerado pela rotação do segmento vertical (raio) de comprimento $y = \sqrt{x}$. Assim, $A(x) = \pi \cdot (\sqrt{x})^2$ e o volume do sólido é igual a

$$V = \pi \int_0^2 x\,\mathrm{d}x = \pi \cdot x\Big|_0^2 = 2\pi.$$



Observação 2

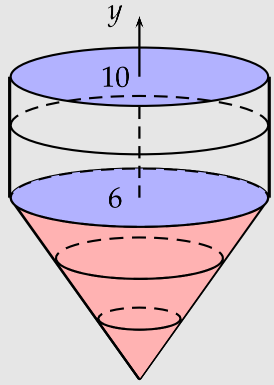
Se a região for girada em torno do eixo y ao invés do eixo x, teremos $V = \pi \displaystyle\int_c^d [f(y)]^2\,\mathrm{d}y$.

Exemplo 6

Um fazendeiro construiu um recipiente formado por um cilindro circular reto de raio 3 m e altura 4 m e por um cone de 6 m de altura. Determine a capacidade total de armazenagem do recipiente, em metros cúbicos.

Solução: Sendo V_1 o volume do cone e V_2 o do cilindro, o volume desejado será a soma deles, $V = V_1 + V_2$. A geratriz do cone é um reta de inclinação $\frac{6}{3} = 2$ e que passa pela origem. Logo a reta tem equação $y = 2x$ ou $x = f(y) = y/2$. Assim,

$$V_2 = \pi \int_0^6 \frac{y^2}{4}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{12} \cdot y^3\Big|_0^6 = \frac{\pi \cdot 6^3}{12} = 18\pi\ m^3.$$



Como o raio do cilindro é 3, vamos rotacionar a reta $x = g(y) = 3$, no intervalo $[6, 10]$ (pois $h = 4$). Daí, temos:

$$V_2 = \pi \int_6^{10} 3^2\,\mathrm{d}y = 9\pi y\Big|_6^{10} = 9\pi \cdot (10 - 6) = 36\pi\ m^3.$$

Portanto, $V = 36\pi + 18\pi\ m^3 = 52\pi\ m^3$.

Observação 3

Se a área de revolução é limitada por duas funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$, tal que $f(x) > g(x)$, para todo $x \in [a, b]$, então teremos o elemento de volume um anel dado por:

$$\mathrm{d}V = \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x - \pi[g(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

de forma que o volume é dado por

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

Note que o vão interno é descontado pela subtração dos dois volumes.

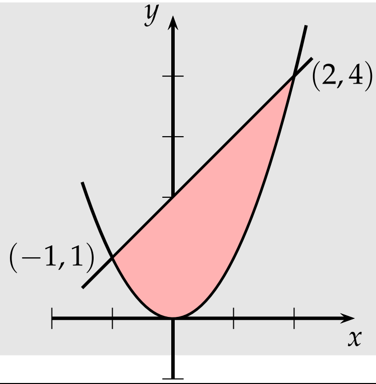
Exemplo 7

Determinar o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$.

Solução: Precisamos identificar a região para determinar o intervalo de integração. Igualando as funções,

$$x^2 = x + 2,$$

encontraremos os valores de x que possuem ordenadas iguais (interseção das curvas). Esses valores são $x = -1$ e $x = 2$, os pontos são $(-1, 1)$ e $(2, 4)$, como mostra figura ao lado.



Adotando $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x^2$, temos:

$$V = \pi \int_{-1}^{2} [x+2]^2 - [x^2]^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{2} x^2 + 4x + 4 - x^4 \, dx = \dots$$

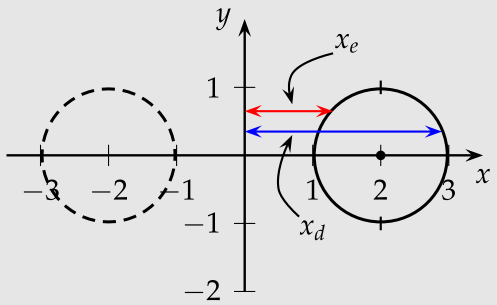
Exemplo 8

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ em torno do eixo y.

Solução: Completando quadrado, temos:

$$x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 1,$$

isto é, circunfrência de raio 1 e centro em $(2, 0)$. Isolando x, temos $x = \pm\sqrt{1 - y^2} + 2$. Observe que o volume do sólido é formado pela diferença do volume obtido pela rotação da curva $x_d = \sqrt{1 - x^2} + 2$ (semicículo à direita) com o volume obtido pela rotação do semicírculo à esquerda $x_e = -\sqrt{1 - x^2} + 2$. Portanto, o volume será igual a $V = V_d - V_e$, calculado abaixo.



$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-y^2}+2\right)^2 - \left(-\sqrt{1-y^2}+2\right)^2 dy \\
&= 8\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\, dy \\
&= 8\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)} \cdot \cos(\theta)\, d\theta \\
&= 8\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta)\, d\theta = 4\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 + \cos(2\theta)\, d\theta \\
&= 4\pi \left(\theta + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) = ???
\end{aligned}$$

4.1 Questões

Q 10 Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x, da região R delimitada pelas curvas dadas em cada item.

(a) $y = x + 1$, $x = 0$, $x = 2$ e $y = 0$;

(b) $y = x^2$ e $y = x^3$;

(c) $y = x^3$, $x = -1$, $x = 1$ e $y = 0$;

(d) $y = \sqrt{x - 1}$, $x = 2$, $x = 5$ e $y = 0$;

(e) $y = x$ e $y = x^2$;

(f) $y = 1/x$, $x = 1$, $x = 2$ e $y = 0$;

(g) $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 2$ e $y = 0$;

(h) $y = \cos(x)$, $y = \operatorname{sen}(x)$, $x = 0$ e $x = \pi/4$.

Q 11 Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno da reta $y = 2$, da região R indicada abaixo:

(a) R: $y = 1 - x^2$, $y = 2$, $x = -2$ e $x = 2$;

(b) R: $y = 4$ e $2y = 7 - x$, $1 \leq x \leq 3$.

Q 12 Calcule o volume do sólido obrido pela rotação da região limitadas por $y = 2 + x/2$, $y = 1$, $x = 1$ e $x = 2$, em torno da reta $y = 1$.

Q 13 Seja R a região do plano limitado pelas curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x$. Dê a expressão em integrais (não é preciso calcular) que representa o volume do sólido obtido, nos seguintes casos:

(a) R gira em torno do eixo y; (b) R gira em torno da reta $x = -1$;

(c) R gira em torno da reta $y = 2$.

Q 14 Seja R a região do primeiro quadrante limitada por $y = 1 + x^2$ e pela reta $y = 2$. Dê a expressão em integrais que represente o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno de:

(a) Eixo x; (b) $y = 3$; (c) $x = -1$.

Q 15 Seja R a regiõa limitada pela hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$ e pelas retas $x = 2$ e $y = 2$.

(a) Encontre o volume do sólido obtido pela rptação de R em torno de $y = 2$;

(b) Dê a expressão da integral que permite calcular o volume gerado pela rotação de R em torno de:
(b1) $y = 0$; (b2) $y = 3$; (b3) $x = 0$; (b4) $x = 2$.

5 Volume do Sólido de Revolução: Invólucro Cilíndrico

Consultar ... ... a apostila de Joseph (UFBA):

https://twiki.ufba.br/twiki/pub/CalculoB/NotasDeAula/Aplicacao.pdf

Não deu tempo de digitar!

6 Referências

1. Diva Flemming – Cálculo B;
2. Eliana Patres / Joseph Yartey – DMAT/UFBA;
3. Humberto José Bortolossi – UFF/RJ;
4. James Stwart – Cálculo;
5. Louis Leithold – O Cálculo com Geometria Analítica;
6. Piskunov – Cálculo Diferencial e Integral.

7 Respostas das Questões

☺ **Q 1** $V = \dfrac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$.

☺ **Q 2** $V = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}r^3.$

☺ **Q 3** $V = \dfrac{8}{3}r^3.$

☺ **Q 4** $V = \dfrac{4}{3}r^3.$

☺ **Q 5** $V = \dfrac{4\pi}{3}r^3.$

☺ **Q 6** $V = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{1-e^2}}r^3.$

☺ **Q 7** $V = \dfrac{2\pi a^2 b}{3}.$

☺ **Q 8** $V = \dfrac{2\pi a b^2}{3}.$

☺ **Q 9** $V = 6.$

☺ **Q 10** (a) $26\pi/3$; (b) $2\pi/35$; (c) $2\pi/7$; (d) $15\pi/2$; (e) $2\pi/12$; (f) $\pi/2$; (g) $206\pi/15$; (h) $15\pi/2$.

☺ **Q 11** (a) Sólido maciço (sem oco), $raio = 2 - (1 - x^2) = 1 + x^2$, $-2 \leq x \leq 2$ e $V = \pi \displaystyle\int_{-2}^{2} (raio)^2\,\mathrm{d}x = 412\pi/15$; (b) Sólido maciço (sem oco), $raio = 4 - \left(\dfrac{7-x}{2}\right) = \dfrac{1+x}{2}$, $1 \leq x \leq 3$ e $V = \pi \displaystyle\int_{1}^{3} (raio)^2\,\mathrm{d}x = 14\pi/3$.

☺ **Q 12** Sólido maciço (sem oco), $raio = 2 + x/2 - 1 = 1 + x/2$, $1 \leq x \leq 2$ e $V = \pi \displaystyle\int_{1}^{2} (raio)^2\,\mathrm{d}x = 37\pi/12$.

☺ **Q 13** (a) $V = \pi \displaystyle\int_0^1 y^2 - y^4\,\mathrm{d}y$; (b) $V = \pi \displaystyle\int_0^1 (y+1)^2 - (y^2+1)^2\,\mathrm{d}y$; (c) $V = \pi \displaystyle\int_0^1 (2-x)^2 - \left(2 - \sqrt{x}\right)^2\,\mathrm{d}x$.

☺ **Q 14** (a) $V = \pi \displaystyle\int_1^2 y - 1\,\mathrm{d}y$; (b) $V = \pi \displaystyle\int_0^1 \left(2 - x^2\right)^2 - 1\,\mathrm{d}x$; (c) $V = \pi \displaystyle\int_1^2 \left(\sqrt{y-1} + 1\right)^2 - 1\,\mathrm{d}y$.

☺ **Q 15** (a) $15\pi/2 - 8\pi\ln(2)$; (b1) $V = \pi \displaystyle\int_{1/2}^{2} 4 - \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$; (b2) $V = \pi \displaystyle\int_{1/2}^{2} \left(3 - \frac{1}{x}\right)^2 - 1\,\mathrm{d}x$; (b3) $V = \pi \displaystyle\int_{1/2}^{2} 4 - \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y$; (b4) $V = \pi \displaystyle\int_{1/2}^{2} \left(2 - \frac{1}{y}\right)^2\,\mathrm{d}y$.

Texto composto em $\LaTeX\,2_\varepsilon$, Cattai, 10 de setembro de 2014