CÁLCULO INTEGRAL

— Prof. ADRIANO CATTAI —

Apostila 02: Integral Definida e Cálculo de Área

(*Atualizada em 6 de março de 2016*)

NOME: ______________________________ DATA: ____/____/______

> "Não há ciência que fale das harmonias da natureza com mais clareza do que a matemática"
> (Paulo Carus)

Sumário

1 Introdução

Muito origado por lerem estas notas de aula e por contribuirem nas correções de digitação e na apresentação das ideias básicas para a iniciação no Cálculo Integral. Elas foram organizadas a partir dos livros indicados na bibiografia, direcionadas às disciplinas de Cálculo da UNEB e da UFBA.

Tomem atenção aos seguintes fatos:

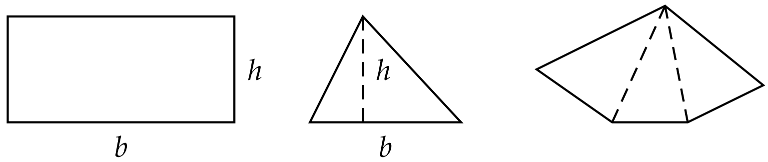
✓ Esta apostila **não** substitui o livro e **jamais** deverá ser tratado como único texto para seus estudos;

✓ Esta apostila é nosso "ponto de partida" ou nossa orientação na sequência dos conteúdos que são conversados em nossas "saborosas" aulas de Cálculo;

✓ Prestem bem atenção com a notação utilizada. A matemática possui uma linguagem própria!

Geometricamente, os fundamentais problemas do cálculo são o de encontrar a inclinação da **tangente** à uma curva e, a determinação da **área** de uma região limitada por curvas. A *derivada* está relacionada com a tangente e a *integral definida* com o cálculo de áreas de certas regiões do plano cartesiano.

A área de uma região limitada por retas é facilmente calculável empregando as fórmulas conhecidas. Por exemplo, a área de um retângulo é o produto do seu comprimento pela sua altura; a área de um triângulo é a metada do produto de uma base pela altura correspondente e a área de um polígono pode ser obtida decompondo-o em triângulos.



A integral de uma função foi criada originalmente para determinar a área sob uma curva no plano cartesiano aprofundando o conceito de que há uma soma de pequenos segmentos de área para cada ponto em uma curva. Delimitando uma seção da curva, através da adoção apropriada[1] de um intervalo, temos uma área definida, a qual chamamos de *integral definida*. Para o cálculo desta área, de regiões delimitadas por gráficos de funções, utilizamos a teoria de limite para somar infinitos termos.

Antes de detalhar o processo para encontrar a referida área faz-se necessário a observação de conceitos que serão úteis para seu desenvolvimento, o próximo tópico abordará a somatória, um procedimento que facilitará o estudo das somas sucessivas que propomos analisar.

2 Notação Sigma para Somas

A definição da integral definida utiliza a soma de muitos termos. Assim, para expressar tais somas, introduzimos a notação grega, cujo símbolo é $\sum$ que corresponde à letra S para significar "*a soma de todos os termos*". Por exemplo, em vez de escrever $1+2+3+4+5+6$ podemos escrever $\sum_{i=1}^{6} i$, tomando a convenção de que i assume valores de 1 até 6. Mais geralmente, temos:

$$\sum_{i=k}^{n} F(i) = F(k) + F(k+1) + F(k+2) + F(k+3) + \ldots + F(n).$$

em que k e n são números inteiros com $k \leq n$. O número k é o *limite inferior da soma* e, n o *limite superior da soma*. O i é denominado *índice da soma*.

Algus exemplos de utilização do sigma para somas:

(a) Soma dos n primeiros números naturais: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+4+5+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$;

(b) Soma dos n primeiros quadrados dos naturais: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1+4+9+16+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(c) Soma dos n primeiros cubos dos naturais: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1+8+27+64+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

[1] De tal modo que a função seja contínua neste intervalo e seu gráfico fique todo acima (ou todo abaixo) do eixo x.

(d) Soma dos n primeiros naturais à quarta potência:

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1 + 16 + 81 + 256 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30};$$

(e) Soma dos n primeiros números naturais pares: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2i = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n = n(n+1);$

(f) Soma dos n primeiros números naturais ímpares: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2n - 1 = n^2.$

Algumas propriedados de um somatório que, mais adiante, justificarão as propriedades da integral definida, são:

(i) $\displaystyle\sum_{i=i}^{n} c = \underbrace{c + c + \ldots + c}_{n \text{ vezes}} = n \cdot c;$

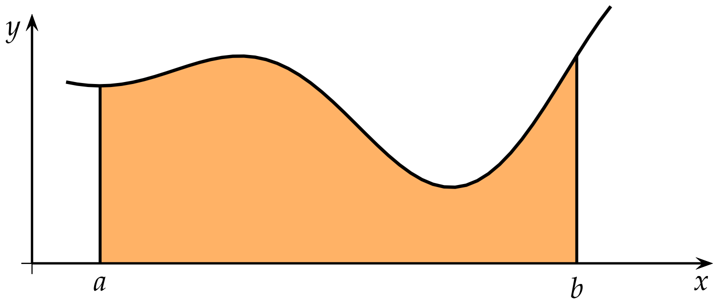
(ii) $\displaystyle\sum_{i=i}^{n} c \cdot F(i) \pm G(i) = c \cdot \sum_{i=i}^{n} F(i) \pm \sum_{i=i}^{n} G(i);$

(iii) $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} F(i) = \sum_{i=k}^{m} F(i) + \sum_{i=m+1}^{n} F(i)$, para $k < m < n$;

(iv) $\displaystyle\left|\sum_{i=k}^{n} F(i)\right| \leq \sum_{i=k}^{n} |F(i)|.$

3 A Integral de Riemann

O conceito de integral definida está ligado à necessidade de encontrar a área de regiões limitadas por curvas e, especialmente, limitadas por gráficos de funções. Aqui, estamos interessados no processo de integração chamado *a Integral de Riemann*. Para essa finalidade, consideramos uma região R em um plano coordenado, delimitada por duas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pelo gráfico de uma função f contínua e não negativa no intervalo fechado $[a, b]$, conforme a figura abaixo.

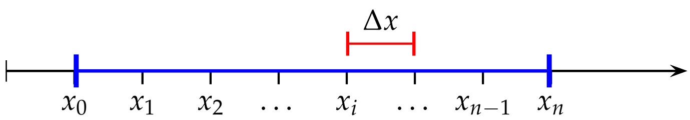


Como $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$, o gráfico de f não tem parte alguma abaixo do eixo x. Seja $A(R)$ a área desta região, a qual queremos definir.

Para chegarmos a esta definição, vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_i, x_{i+1}], \ldots, [x_{n-1}, x_n],$$

em que $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ são elementos de $[a, b]$ com $a = x_0$, $b = x_n$ e n um inteiro positivo arbitrário.



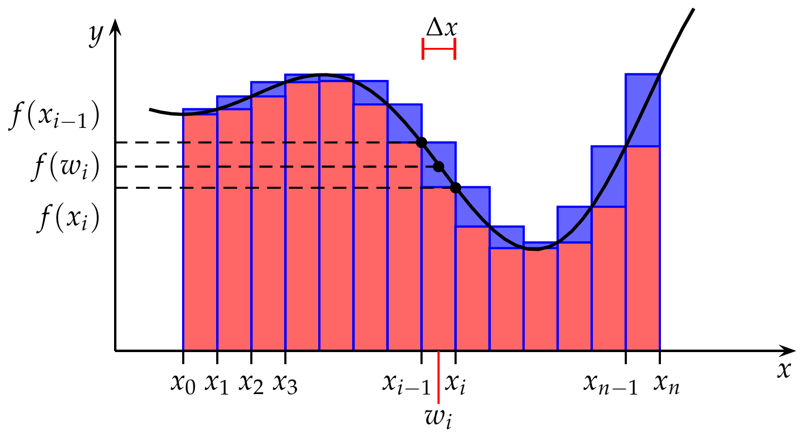
O Conjunto P de todos esses subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n$, é chamado uma *Partição do intervalo* $[a, b]$. Em que $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ denota o comprimento de i-ésimo subintervalo. Se $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, então temos uma *partição regular*, ou seja, cada subintervalo tem o mesmo comprimento. Note que

$$x_0 = a, \;\; x_1 = a + \Delta x, \;\; x_2 = a + 2\Delta x, \;\; x_3 = a + 3\Delta x, \ldots, x_i = a + i\Delta x, \ldots, \;\; x_n = a + n\Delta x = b.$$

Considerando esta partição do intervalo $[a, b]$, vamos dividir a região R em muitos retângulos de igual largura Δx de duas formas:

(i) cada retângulo esteja completamente inscrito no gráfico de f e intercepte o gráfico em pelo menos um ponto, conforme ilustrtação abaixo na cor avermelhada;

(ii) cada retângulo não esteja completamente inscrito no gráfico de f, e intercepte o gráfico em pelo menos um ponto, conforme ilustrtação abaixo na cor azulada.



Note que a soma de todos os rêngulos inscritos é um número menor do que a área da região R e que a soma dos outros ultrapassa o valor da área de R. Claramente vemos que a área desejada está entre esse dois valores, ou seja,

$$S_{\text{inf}} \leq A(R) \leq S_{\text{sup}}$$

em que S_{inf} denota a *Soma Inferior* e S_{sup} a *Soma Superior*. Vejamos como definir esta área.

Escolhemos um ponto em cada subintervalo da partição P. Seja w_1 o ponto escolhido em $[x_0, x_1]$, tal que $x_0 \leq w_1 \leq x_1$ e, w_2 o ponto escolhido em $[x_1, x_2]$, tal que $x_1 \leq w_2 \leq x_2$ e, assim sucessivamente de modo que w_i seja o ponto escolhido em $[x_{i-1}, x_i]$ de tal sorte que $x_{i-1} \leq w_i \leq x_i$. Como f é contínua em $[a, b]$, então f é contínua em cada subintervalo. Pelo teorema do valor intermediário, garantimos a exitência de $f(w_i)$, para cada w_i. Deste modo, para cada i, construímos um retângulo de largura Δx e altura $f(w_i)$, em que $f(x_{i-1}) \leq f(w_i) \leq f(x_i)$ ou, o contrário conforme o crecimento/descrecimento de f. Indicando a área de cada i-ésimo retângulo por $A(R_i) = f(w_i) \cdot \Delta x$ temos:

Se n for muito grande ou equivalentemente Δx muito pequeno, então a soma de todas as áreas dos retângulos deve aproximar-se da área da região R. Assim o cálculo aproximado da área da região R é:

$$A(R) \approx \sum_{i=0}^{n} A(R_i) = \sum_{i=1}^{n} f(w_i) \cdot \Delta x.$$

Logo, $S_{inf} \leq \displaystyle\sum_{i=0}^{n} A(R_i) \leq S_{sup}$.

Definição 1 (Soma de Riemann)

A soma $\sum_{i=0}^{n} f(w_i) \cdot \Delta x$ é denominada *Soma de Riemann* f no intervalo $[a, b]$.

A integral definida é obtida quando fazemos os retângulos tão pequenos que poderemos considerar suas bases quase nulas, para isso tomamos o limite com $n \to +\infty$ ou, equivalentemente, $\Delta x \to 0$. Deste modo

$$\lim_{n\to+\infty} S_{\inf} \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} A(R_i) \leq \lim_{n\to+\infty} S_{\sup}.$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{\inf} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{\sup}$, pelo teorema do sanduíche, temos a seguinte definição:

Definição 2 (A Integral Definida)

Seja f uma função contínua (ou secionalmente contínua) definida em um intervalo fechado $[a, b]$. A *integral definida* de f desde a a b denotada por $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ é

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(w_i) \cdot \Delta x$$

desde que este limite exista. Se o limite existe, diremos que f é *integrável* em $[a, b]$.

Observação 1

(i) O processo de determinar o limite na definição anterior é chamado *cálculo da integral definida*;

(ii) Na notação $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ os números a e b são os limites de integração; onde a é o limite inferior e b é o limite superior. $f(x)$ é chamado integrando, e o símbolo dx, que sucede $f(x)$, está associado ao incremento Δx;

(iii) Na notação da integral definida pode-se usar outras letras que não seja x. Isto é, se f é integrável em $[a, b]$, então

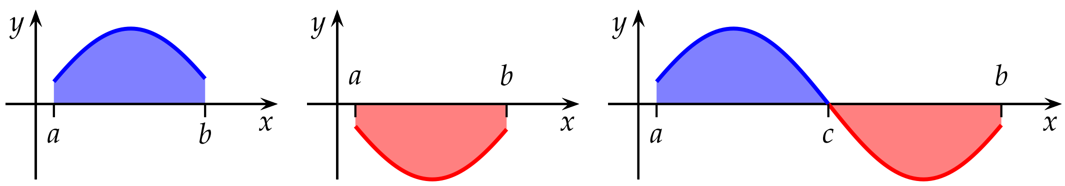
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \ldots$$

Por essa razão a letra x na definição da integral definida, é chamada de *variável muda*.

(iv) O valor de uma integral definida é um número, e não uma família de antiderivadas como ocorria com a integral indefinida. Este número poderá ser positivo, negativo ou nulo.

- ◇ positivo quando f for não negativa;
- ◇ negativo quando f for não positiva;
- ◇ nulo quando a "porção" não negativa for igual à "porção" não positiva.

Veja ilustrações abaixo:



Perceba com esta observação que a integral definida não nos dá, necessariamente, o valor da área. Para que a integral seja a área é necessário que f não assuma valor negativo algum ou, quando assumir, basta multiplicar por -1. Vejamos a seguinte definição:

Definição 3 (Área da região sob o gráfico de uma função)

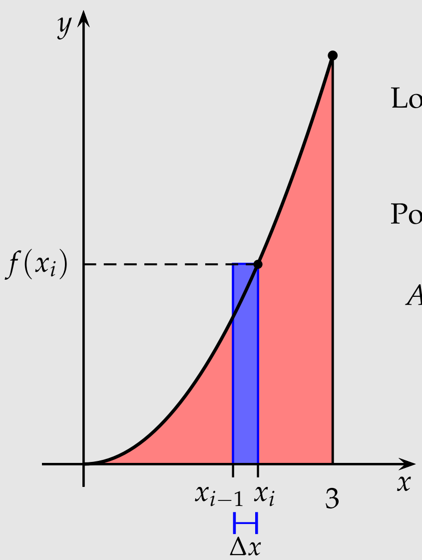
Seja f uma função contínua (ou secionalmente contínua) definida num intervalo fechado $[a, b]$ e R a região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$. Então a medida da área de R é dada por:

$$A(R) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x & \text{se } f(x) \geq 0, \forall\, x \in [a, b]; \\ \left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| & \text{se } f(x) \leq 0, \forall\, x \in [a, b]; \\ \displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \left|\displaystyle\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| & \text{se } f(x) \geq 0, \forall\, x \in [a, c] \text{ e } f(x) \leq 0, \forall\, x \in [c, b], a < c < b. \end{cases}$$

Exemplo 1

Determinar a área da região limitada pela curva $y = x^2$, o eixo x e a reta $x = 3$.

Solução: A figura mostra o i-ésimo retângulo. Aplicando a definição de área, dividimos o intervalo $[0, 3]$ em n subintervalos temos:



$$\Delta x = \frac{3}{n}, \quad x_i = i \cdot \Delta x = \frac{3i}{n} \quad \text{e } f(x_i) = \frac{9i^2}{n^2}.$$

Logo,

$$f(x_i) \cdot \Delta x = \frac{9i^2}{n^2} \cdot \frac{3}{n} = \frac{27}{n^3} \cdot i^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A(R) &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{27}{n^3} \cdot i^2 = \lim_{n \to +\infty} \frac{27}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \lim_{n \to +\infty} \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{9}{2} \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} \\ &= \frac{9}{2} \cdot \lim_{n \to +\infty} 2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n}^{2} = \frac{9}{2}(2 - 0 + 0) \\ &= 9. \end{aligned}$$

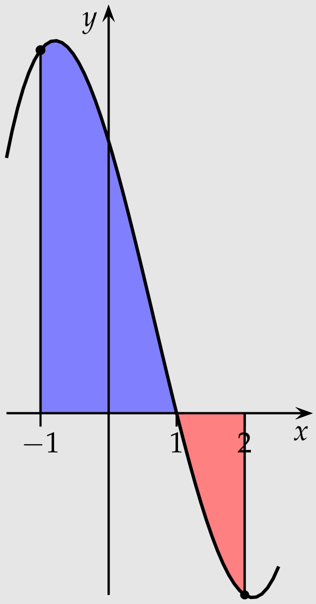
Observação 2

(i) Neste exemplo, f é não negativa no intervalo $[0, 3]$. Assim, o cálculo que acabamos de fazer é justamente o da integral definida, ou seja, $\displaystyle\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = 9$;

(ii) Note que $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ é uma primitiva para $f(x) = x^2$ e que $F(3) - F(0) = \dfrac{3^3}{3} - \dfrac{0^3}{3} = 9$. Coincidência ou não? Claro que não! Este fato deve-se ao Teorema Fundamental do Cálculo, que veremos já já!

Exemplo 2
Dê a expressão em integrais que determina a área da região limitada pelo gráfico de função $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ e o eixo x, no intervalo $[-1, 2]$.

Solução:



Iremos expressar a área em integrais e, ao mesmo tempo, exibir como obter o valor desta área. Não se assuste. Essa técnica de calcular veremos mais adiante quando falarnmos do Teorema Fundamental do Cálculo. Por hora, concentre-se apenas em identificar a região e a integral.

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_{-1}^{1} x^3 - 2x^2 - 5x + 6\,\mathrm{d}x + \left| \int_{1}^{2} x^3 - 2x^2 - 5x + 6\,\mathrm{d}x \right| \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x \Big|_{-1}^{1} + \left| \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x \Big|_{1}^{2} \right| \\ &= \frac{32}{3} + \left| \frac{-29}{12} \right| = \frac{157}{12}. \end{aligned}$$

4 Propriedades de Integral Definida

(P1) **Limites de Integração Iguais**: $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

Isso é óbvio pois o intervalo $[a, a]$ é degenerado com $\Delta x = \dfrac{a-a}{n} = 0.$

(P2) **Limites de Integração Invertidos**: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$

Se o intervalo de integração for $[b, a]$, então $\Delta x = \dfrac{a-b}{n} = -\dfrac{b-a}{n}$, que é fator determinante do sinal.

(P3) **Fator (constante) do Integrando**: $\displaystyle\int_a^b c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Pois, $\displaystyle\int_a^b c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} c \cdot f(w_i)\Delta x = c \cdot \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x.$

(P4) **Adição**: $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

Pois, $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(w_i) + g(w_i)\Delta x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x + \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} g(w_i)\Delta x.$

Podemos estender a um número finito de funções $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ integráveis em $[a, b]$.

(P5) **Seções Complementares**: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, em que $a < c < b$.

Particionando os intervalos $[a,c]$ e $[c,b]$, em k e n subintervalos, respectivamente, temos $\Delta x = \dfrac{c-a}{k}$ e $\Delta x = \dfrac{b-c}{n}$. Portanto,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty}\sum_{i=1}^{k} f(w_i)\Delta x + \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=k+1}^{n} f(w_i)\Delta x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(P6) **Média ou Valor Médio de uma Função**: $\overline{f(c)} = \dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$, em que $a<c<b$.

Particionando o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos, tomemos os $n+1$ pontos

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_i < x_{n-1} < x_n$$

e seus $n+1$ valores funcionais

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_i), f(x_{n-1}), f(x_n).$$

Assim, a média aritmética destes valores é

$$\overline{f} = \frac{f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots+f(x_i)+f(x_{n-1})+f(x_n)}{n+1}.$$

Dái, tomando o limite com $n\to+\infty$, temos a propriedade.

Essa propriedade nos permite calcular o valor de médio de um conjunto contínuo de pontos, tal como uma imagem de uma função contínua definida em um intervalo.

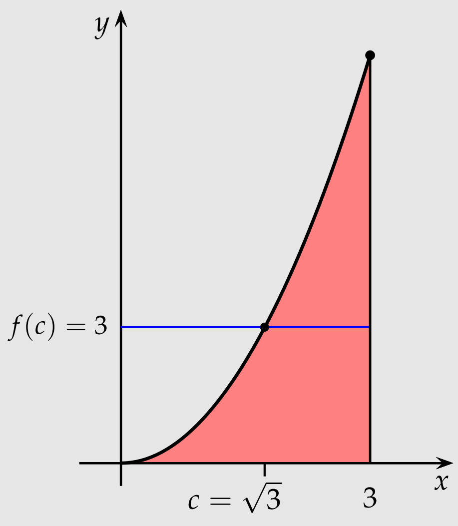
Exemplo 3

(a) Determine o valor médio da função $f(x)=x^2$, no intervalo $[0,3]$;

(b) A lei representativa da temperatura (em graus Celsius) em uma casa, que servirá de galeria, durante um dia é dada por $T = 27 + 5\,\mathrm{sen}\left[\dfrac{\pi(7-8)}{10}\right]$, em que t é o tempo em horas, com $t=0$ representando meia-noite. Para a elaboração do projeto de climatização da galeria, pede-se determinar a temperatura média diária.

Solução:

(a)



O valor médio de f em $[0,3]$, é dado por

$$\overline{f(c)} = \frac{1}{3-0}\cdot\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = 3,$$

pois já calculamos $\displaystyle\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = 9$.

Resolvendo a equação $x^2 = 3$, no intervalo $[0,3]$, temos o ponto onde ocorre, que é em $x=\sqrt{3}$.

A interpretação geométrica para tal fato é que, supondo f positiva, existe um retângulo de altura $f(c)$ que possui a mesma área compreendida entre o gráfico de f e o eixo x, com x variando de a até b. Assim, a área da região é a mesma que o produto de $b-a$ por $f(c)$. Neste exemplo, temos $A(R) = (3-0)\cdot 3 = 9$.

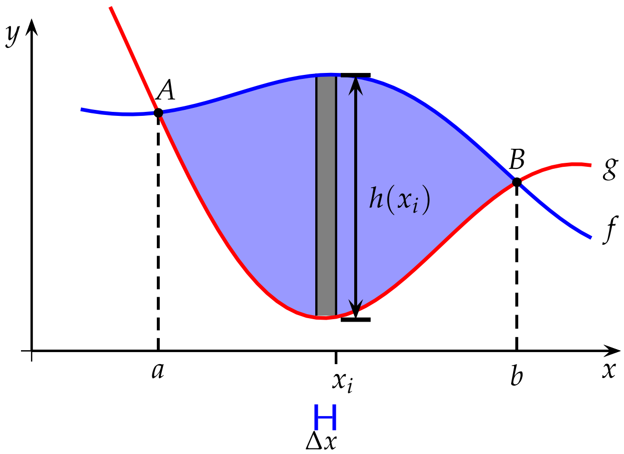
(b) O valor médio de T em num dia, é dado por

$$\overline{T(c)} = \frac{1}{24-0} \cdot \int_0^{24} 27 + 5\,\text{sen}\left[\frac{\pi(7-8)}{10}\right] \mathrm{d}t = \text{ cadê o TFC? } = 26,3°C.$$

5 Área entre Curvas

5.1 O caso em que a função é da forma $y = f(x)$

Considere duas funções f e g tais que o gráfico de f esteja sempre acima do gráfico da g para valores de x entre a e b. Uma região Rx é uma região que está compreendida entre os gráficos das duas equações da forma $y = f(x)$ e $y = g(x)$, conforme figura abaixo.



Para cada $x_i \in [a, b]$, consideramos o i-ésimo retângulo de base Δx e altura $h(x_i) = f(x_i) - g(x_i)$, que representa a distância vertical entre os gráficos de f e g. A área deste retângulo é dado por $[f(x_i) - g(x_i)] \cdot \Delta x$. Se subdividirmos o intervalo $[a, b]$ em vários sub-intervalos de comprimento Δx, e sobre cada um deles construírmos i-esimos retêngulos como descrito, teremos a área entre as duas curvas, compreendida entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, dada aproximadamente por

$$A(Rx) \approx \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)] \cdot \Delta x.$$

Portanto, a área entre as duas curvas, compreendida entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, será dada pelo limite de tais somas integrais (de Riemann), quando $\Delta x \to 0$, ou seja, será dada por

$$A(Rx) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)] \cdot \Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x.$$

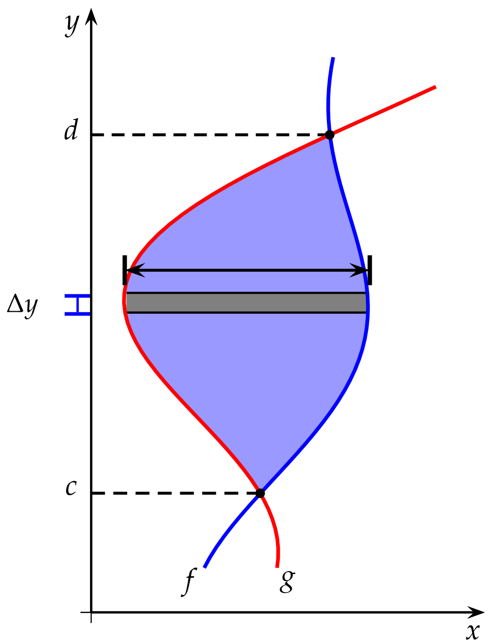
Indicando a unidade de área (ou elemento infinitesimal de área) por $\mathrm{d}A = [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$, temos que $A = \displaystyle\int_a^b \mathrm{d}A$.

Diretrizes para achar a área de uma região Rx:

1. Esboçar a região limitada por $y = f(x)$, por $y = g(x)$ e as fronteiras direita e esquerda;
2. Determinar o menor valor $x = a$ e o maior valor $x = b$ entre os pontos (x, y) da região Rx;
3. Desenhar um retângulo vertical típico, designando a sua largura por $\mathrm{d}x$;
4. Expresse a área do retângulo como $\mathrm{d}A = [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$, com $f(x) \geq g(x)$;
5. Calcular $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}A$.

5.2 O caso em que a função é da forma $x = f(y)$

Considerando a equação da forma $x = f(y)$, contínua em $[c, d]$, estaremos na verdade invertendo os papéis de x e y, admitindo y como a variável de integração. Ou seja, y como variável independente e x a variável dependente. Uma região Ry é uma região que está compreendida entre os gráficos de duas equações da forma $x = f(y)$ e $x = g(y)$, com f e g contínuas e $f(y) \geq g(y)$ para todo y em $[c, d]$, onde c e d são respectivamente a menor e a maior coordenada y dos pontos da região. A figura abaixo ilustra tal região.



Observe que, para qualquer y, $f(y) - g(y)$ representa a distância horizontal entre os gráficos de f e g, conforme figura ao lado.

Dessa forma a área da região Ry, que é a área entre as duas curvas, compreendida entre as retas horizontais $y = c$ e $y = d$, será dada pela integral

$$A(Ry) = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,\mathrm{d}y.$$

Indicando a unidade de área (ou elemento infinitesimal de área) por $\mathrm{d}A = [f(y) - g(y)]\,\mathrm{d}y$, temos que $A = \displaystyle\int_c^d \mathrm{d}A$.

Diretrizes para achar a área de uma região Ry:

1. Esboçar a região limitada por $x = f(y)$, por $x = g(y)$ e as fronteiras acima e abaixo;
2. Determinar o menor valor $y = c$ e o maior valor $y = d$ entre os pontos (x, y) da região Ry;
3. Desenhar um retângulo horizontal típico, designando a sua altura por $\mathrm{d}y$;
4. Expresse a área do retângulo como $\mathrm{d}A = [f(y) - g(y)]\,\mathrm{d}y$, com $f(x) \geq g(x)$;
5. Calcular $\displaystyle\int_c^d \mathrm{d}A$.

5.3 Área da região limitada por mais de duas curvas

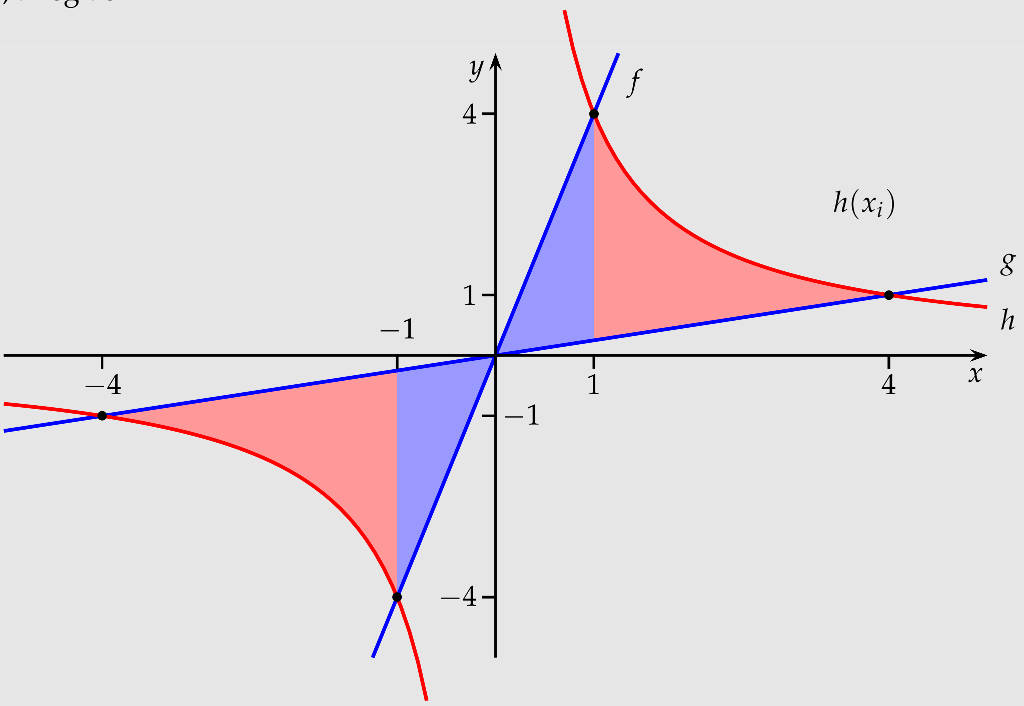
Neste caso, em que a região é limitada por mais de duas funções, podemos obter a área da região fazendo decomposições em áreas limitadas por duas funções e retas paralelas ao eixo-y, se a região for Rx, (ou eixo-x, se a região for Ry), como ilustra o seguinte exemplo a seguir.

Exemplo 4
Dê a expressão em integrais que determina a área da região R limitada pelas curvas $xy = 4$, $y = 4x$ e $x = 4y$.

Solução: Considerando $f(x) = 4x$, $g(x) = \dfrac{x}{4}$ e $h(x) = \dfrac{4}{x}$, as interseseções entre as curvas f e g, f e h, e g e h são obtidas igualando as funções, duas a duas, como segue:

$$4x = \frac{x}{4};\quad 4x = \frac{4}{x} \quad \text{e} \quad \frac{x}{4} = \frac{4}{x} \Longrightarrow 15x = 0;\quad x^2 = 1 \quad \text{e} \quad x^2 = 16.$$

As soluções são $x = 0$, $x = \pm 1$ e $x = \pm 4$, respectivamente. A seguir o esboço gráfico destas funções e, portanto, a região R.



Da figura, temos:

$$A(Rx) = \int_{-4}^{-1} \frac{x}{4} - \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \frac{x}{4} - 4x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 4x - \frac{x}{4}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{4} \frac{4}{x} - \frac{x}{4}\,\mathrm{d}x.$$

Ou, por conta da simetria, podemos também escrever:

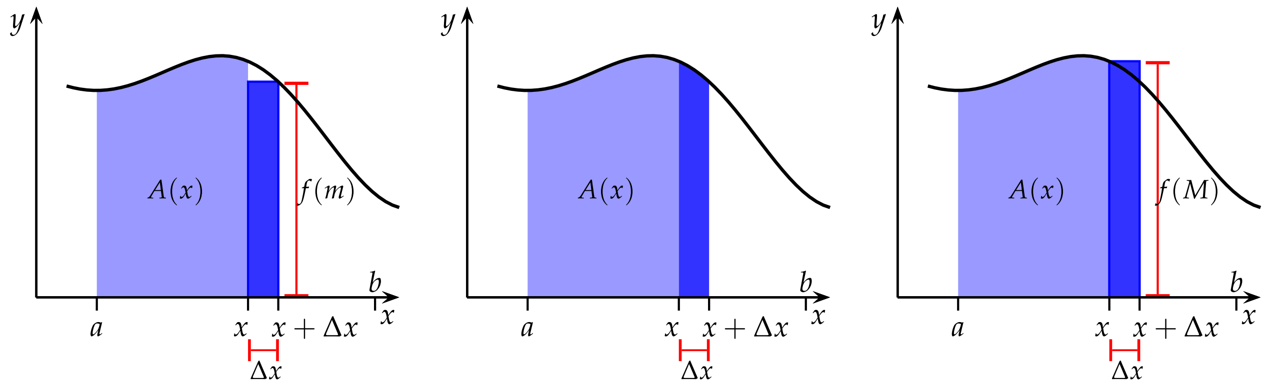
$$A(Rx) = 2 \cdot \left[\int_{0}^{1} 4x - \frac{x}{4}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{4} \frac{4}{x} - \frac{x}{4}\,\mathrm{d}x \right].$$

6 Teorema Fundamental do Cálculo

O TFC - Teorema Fundamental do Cálculo - foi estabelecido independentemente por Sir Isaac **NEWTON** (1642-1727) na Inglaterra e por Gottfried Wilhelm **LEIBNIZ** (1646-1716) na Alemanha. Este teorema estabelece uma conexão surpreendente entre as integrais indefinidas e as integrais definidas. Esta conexão é dada por uma fórmula, também conhecida como *fórmula de Newton-Leibniz*.

Vamos fazer uma dedução geométrica desta fantástica fórmula.

Considere a função $A(x)$, que denota a área da região limitada pel gráfico de f, acima do eixo x entre os números a ex. Para descobrir a relação entre A e f, considere que x aumentada por uma quantidade Δx. Isto aumenta a área em ΔA. Sejam $f(m)$ e $f(M)$ os valores mínimos e máximos de f no intervalo $[x, x+\Delta x]$, como mostram asfiguras abaixo.



Conforme indicado nas figuras acima, podemos escrever a seguintes desigualdades:

$$f(m)\cdot\Delta x \leq \Delta A \leq f(M)\cdot\Delta x \Longrightarrow f(m) \leq \frac{\Delta A}{\Delta x} \leq f(M).$$

Tomando limite com $\Delta x \to 0$, temos:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(m) \leq \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x\to 0} f(M) \Longrightarrow f(x) \leq A'(x) \leq f(x).$$

Assim, temos que $f(x) = A'(x)$. Ou, em outros termos, sendo $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$, vemos que a $A(x) = F(x) + K$. Como $A(a) = 0$, seque que $K = -F(a)$. Então, $A(x) = F(x) - F(a)$, implicando que,

$$A(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

E, adotamos a seguinte notação:

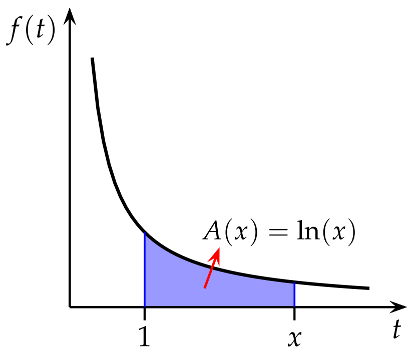
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Assim, podemos enunciar o Teorema Fundamental do Cálculo, o qual dividiremos em dois teoremas: o *Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo* e o *Segundo Teorema Fundamental do Cálculo*. O primeiro dá a derivada da função F definida com uma integral definida tendo um limite superior variável, ou seja, $F'(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right] = f(x)$. Já o segundo teorema, o mais famoso, estabelece uma conexão surpreendente entre as integrais indefinidas e as integrais definidas. Esta conexão é a fórmula também conhecida como *fórmula de Newton-Leibniz*.

Teorema 1 (O Teorema Fundamental do Cálculo)

(i) Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e seja x qualquer número neste intervalo. Se F for uma função $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, então $F'(x) = f(x)$;

(ii) Se f uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e seja F uma primitiva de f. Então, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.



Exemplo 5

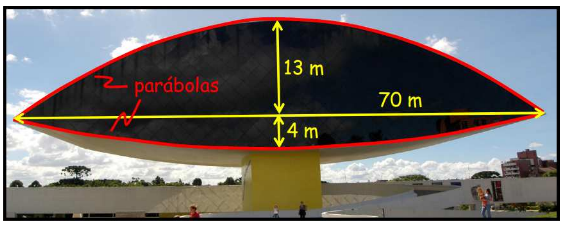
Podemos definimos a *função logaritmo natural* como sendo uma área. De fato, para $x > 1$, temos

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

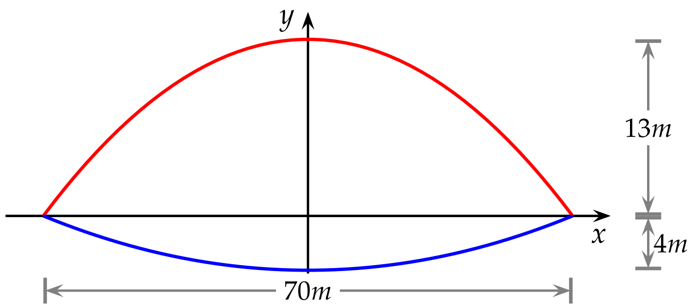
Veja que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right] = \dfrac{1}{x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln(x)]$.

Exemplo 6 (do Prof. Eduardo N. Lages – UFAL)

Tanto para o cálculo da carga térmica solar quanto para o estudo da iluminação natural do Museu Oscar Niemeyer (Curitiba/PR), precisa-se conhecer a área da superfície envidraçada da fachada lateral. Tem-se conhecimento das dimensões principais da fachada e de que as curvas limitantes são parábolas.



http://www.museuoscarniemeyer.org.br



Por simplicidade, colocaremos o eixo coordenado y coincidindo com o eixo de simetria das parábolas e o eixo coordenado x de tal modo que os números ± 35 sejam as raízes de ambas as parábolas, conforme figura acima. Assim, com estas considereações, podemos dizer que $f(x) = 13 + a_f \cdot x^2$, em que $a_f < 0$ e que $g(x) = -4 + a_g \cdot x^2$, em que $a_g > 0$ são as equações destas parábolas. Agora, como $f(35) = g(35) = 0$, temos:

$$f(35) = 13 + a_f \cdot 35^2 = 0 \Longrightarrow a_f = -\frac{13}{1.225} \quad \text{e} \quad g(35) = -4 + a_g \cdot 35^2 = 0 \Longrightarrow a_g = \frac{4}{1.225}.$$

Portanto, $f(x) = 13 - \dfrac{13}{1.225} \cdot x^2$ e $g(x) = -4 + \dfrac{4}{1.225} \cdot x^2$ são as equações das parábolas. A unidade de área é $\mathrm{d}A = [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ e a área da superfície envidraçada da fachada lateral é

$$A(Rx) = \int_{-35}^{35} \mathrm{d}A = 2 \cdot \int_0^{35} 13 - \frac{13}{1.225} \cdot x^2 - \left[-4 + \frac{4}{1.225} \cdot x^2\right] \mathrm{d}x = \ ☺ \ = \frac{2.380}{3} \approx 793,33\ m^2.$$

Exemplo 7 (Deslocamento e Espaço Percorrido)
Definimos o *deslocamento* do objeto, entre os instantes $t = a$ e $t = b$, como sendo

$$s(b) - s(a) = \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t,$$

enquanto que o *espaço percorrido* pelo objeto entre os instantes $t = a$ e $t = b$ é obtido através da

$$\int_a^b |v(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Assim, se uma partícula desloca-se sobre um eixo horizontal com velocidade $v(t) = t^2 - 2t - 3$ com $t \geq 0$, vamos determinar o espaço percorrido entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$, bem como o deslocamento da partícula. O deslocamento é

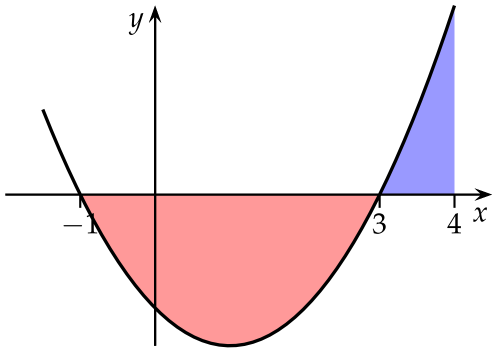
$$s(4) - s(0) = \int_0^4 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^4 t^2 - 2t - 3\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - t^2 - 3t\Big|_0^4 = \frac{64}{3} - 16 - 12 - (0) = -\frac{20}{3}.$$

Como o deslocamento teve um resultado negativo significa que o objeto andou mais em sentido contrário ao do referencial do que no mesmo sentido.

Por outro lado, como

$$\begin{cases} t^2 - 2t - 3 < 0 & \text{se } 0 < x < 3; \\ t^2 - 2t - 3 > 0 & \text{se } 3 < x < 4, \end{cases}$$

então o espaço percorrido é dado por:



$$\int_0^4 |v(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^4 \left|t^2 - 2t - 3\right|\,\mathrm{d}t = \int_0^3 -\left(t^2 - 2t - 3\right)\,\mathrm{d}t + \int_3^4 t^2 - 2t - 3\,\mathrm{d}t = \ldots = \frac{34}{3}.$$

7 Wolfram | Alpha

O Wolfram | Alpha é um mecanismo de conhecimento computacional desenvolvido por Stephen Wolfram e sua empresa Wolfram Research. Excelente ferramenta que se demonstra como uma verdadeira fonte dinâmica de conhecimento.

Acesse pelo endereço http://www.wolframalpha.com/ ou baixe seu aplicativo para iOS ou Android.

Alguns comandos úteis para integrais:

1. Digitando "**int f(x)**" ele exibirá a família de primitivas de $f(x)$;
2. Digitando "**int f(x), x=a..b**" ele exibirá o valor da integral definida $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$;
3. Digitando "**f(x)=g(x)**" ele exibirá o conjunto solução desta equação, além de da visualização gráfica, auxiliando na identificação e cálculo da área de regiões limitadas por funções.

8 Referências

1. Diva Flemming – Cálculo A;
2. Eliana Patres – DMAT/UFBA;
3. Humberto José Bortolossi – UFF/RJ;
4. James Stwart – Cálculo;
5. Louis Leithold – O Cálculo com Geometria Analítica;
6. Piskunov – Cálculo Diferencial e Integral.

Texto composto em LaTeX 2_ε, Cattai, 6 de março de 2016