CÁLCULO INTEGRAL

— Prof. ADRIANO CATTAI —

Apostila 01: Integral Indefinida e Técnicas de Integração

(*Atualizada em 6 de março de 2016*)

NOME: ______________________________ DATA: ____/____/______

> "Não há ciência que fale das harmonias da natureza com mais clareza do que a matemática"
> (Paulo Carus)

Sumário

1 Introdução

Muito origado por lerem estas notas de aula e por contribuirem nas possíveis correções de digitação e na apresentação das dos conteúdos que estudaremos. Elas foram organizadas a partir dos livros indicados na bibiografia, direcionadas às disciplinas Cálculo I e Cálculo II, do Departamento de Ciências Exatas e da Terra, Campus I, UNEB.

É bom tomar nota dos seguintes fatos:

✓ Esta apostila **não** substitui o livro e **jamais** deverá ser tratado como único texto para seus estudos;

✓ Esta apostila é nosso "ponto de partida" ou nossa orientação na sequência dos contéudos que são conversados em nossas "saborosas" aulas de Cálculo;

✓ Prestem bem atenção com a notação utilizada. A matemática possui uma linguagem própria!

Sintetisando outros textos, o **Cálculo Diferencial e Integral**, também chamado de **Cálculo Infinitesimal**, ou simplesmente **Cálculo**, é um ramo importante da Matemática, desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria, que se dedica ao estudo de taxas de variação de grandezas (como a inclinação de uma reta) e a acumulação de quantidades (como a área debaixo de uma curva ou o volume de um sólido). De toda Matemática que estudamos na escola, o Cálculo é fundamentalmente diferente. Ele é a matemática dos movimentos contínuos e suas variações. Onde há movimento ou crescimento e onde forças variáveis agem produzindo aceleração, o Cálculo é a matemática a ser empregada. Antes dele a Matemática se restringia essencialmente a padrões estáticos: **contagem**, **medição** e **descrição de forma**.

O Cálculo ajuda em vários conceitos e definições desde a matemática, química, ciências econômicas, ciências biológicas, física clássica e até a física moderna. É uma importante ferramenta que **não** vivemos sem ele.

Com a introdução de técnicas para lidar com movimentos e variações, podemos estudar: deslocamento de planetas e de corpos; funcionamento de maquinas; fluxo de líquidos; expansão de gases; forças físicas, como o magnetismo e a eletricidade; corpos em queda livre na Terra; crescimento de plantas e animais; disseminação de epidemias; flutuação de lucros, etc.

Aprender cálculo é um processo que não ocorre na primeira tentativa. Seja paciente e perseverante, faça perguntas, discuta ideias e trabalhe com seus colegas. Procure ajuda o mais rápido que precisar. A recompensa de aprender Cálculo é muito gratificante, tanto intelectualmente como profissional.

O estudante de cálculo deve ter um conhecimento em certas áreas da Matemática, como funções, geometria e trigonometria, pois são a base do Cálculo. O Cálculo estuda basicamente as **funções**, a partir de 3 operações-base: **Limites**, **Derivadas** e **Integrais**.

2 Integração

O Cálculo Diferencial lida com o problema de se determinar a taxa de variação de uma quantidade com relação a outra. Iniciaremos o estudo de uma outra parte do cálculo, conhecida como *Cálculo Integral*. Aqui estamos interessados precisamente no problema oposto:

> *Se conhecemos a taxa de variação de uma quantidade em relação a outra, podemos determinar a relação entre essas quantidades?*

A ferramenta principal utilizada no estudo do cálculo integral é a antiderivada de uma função, e desenvolvemos **técnicas** para a antiderivação, ou integração, como é chamado o processo de encontrar a antiderivada ou integral indefinida. A derivada foi motivada por problemas de determinação do coeficiente angular de uma reta tangente e definição de velocidade. A integral definida, como veremos mais adiante, surge de modo natural quando consideramos o problema da determinação da área de uma região curvilínea. Esta é, entretanto, apenas uma das aplicações.

Veremos que o conceito de integral, que é formado totalmente independente do conceito de derivada, guarda com este uma relação muito importante. Esta relação entre os dois conceitos foi estabelecida por Newton e Leibniz no século XVII, sendo hoje conhecida como o Teorema Fundamental do Cálculo.

3 Antidiferenciação: A Integral Indefinida

No Cálculo Diferencial, *a partir de uma função f (primitiva), determinamos sua derivada f'*. Estudaremos agora o processo inverso:

> *Obter uma função (primitiva) a partir de sua derivada.*

Este processo recebe o nome de *antidiferenciação* ou *integração indefinida*.

Definição 1
Dizemos que uma função F é uma *antiderivada* ou *primitiva* da função f, num intervalo I, se

$$F'(x) = f(x), \quad \forall\, x \in I.$$

Exemplo 1
A função $F_1(x) = x^2$ é uma antiderivada (ou primitiva) de $f(x) = 2x$, pois $F_1'(x) = 2x$. Do mesmo modo, $F_2(x) = x^2 + 1$ é outra primitiva de f, pois $F_2'(x) = 2x$. Note aqui que, $f(x)$ possui uma infinidade de primitivas, a saber, $F(x) = x^2 + K$. De fato,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^2 + K] = [x^2 + K]' = [x^2]' + [K]' = 2x + 0 = 2x.$$

Assim, afirmamos que, se f possui uma primitiva, então f possui uma infinidade de primitivas. Este primitivas são diferentes, uma da outra, por uma constante. Resumimos nos seguintes teoremas.

Teorema 1
Sejam F e G duas antiderivadas de f num intervalo I. Então $G(x) = F(x) + K$ para alguma constante arbitrária K e para todo x em I.

Prova: Seja H a função definida em I por $H(x) = G(x) - F(x)$. Então, para todo x em I temos que $H'(x) = G'(x) - F'(x)$. Mas, por hipótese, $G'(x) = F'(x)$ para todo x em I, logo $H'(x) = 0$ para todo x em I. Portanto H é uma função constante, digamos $H(x) = K$, assim $G(x) = F(x) + K$, para todo x em I.

Teorema 2
Se F é uma antiderivada particular de f num intervalo I, então toda antiderivada de f, em I, será da forma $F(x) + K$, em que K é uma constante arbitrária. Todas as antiderivadas de f em I poderão ser obtidas atribuindo-se certos valores a K.

Prova: Seja G uma antiderivada de f em I. Então $G'(x) = f(x)$, $\forall\ x \in I$. Como F é uma antiderivada particular de f em I, então $F'(x) = f(x)$, $\forall\ x \in I$. Segue portanto que $G'(x) = F'(x)$, $\forall\ x \in I$. Logo, pelo teorema anterior, existe uma constante K, tal que $G(x) = F(x) + K$, $\forall\ x \in I$. Como G representa qualquer antiderivada de f em I, segue que toda antiderivada de f pode ser obtida de $F(x) + K$, onde K é uma constante arbitrária.

Definição 2 (A Integral Indefinida)
O processo de se determinar todas as antiderivadas de uma função é chamado de *antidiferenciação* ou *integração*. Usamos o símbolo $\int$, chamado *símbolo de integração* (ou *sinal da integral*), para indicar que a operação de integração deve ser executada sobre uma função f. Assim

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + K$$

nos diz que a *integral indefinida* de f é a família de funções dada por $F(x) + K$, onde $F'(x) = f(x)$. A função f a ser integrada é chamada de *integrando*, a constante K é chamada de *constante de integração* e $\mathrm{d}x$ é o diferencial que indica qual a variável de integração e, também, de derivação.

Observação 1
A expressão $\mathrm{d}x$ que segue ao integrando $f(x)$ lembra-nos de que a operação é executada com respeito a x. Se a variável independente é t, escrevemos $\int f(t)dt$. Neste caso, dizemos que tanto t quanto x são variáveis mudas.

Exemplo 2

$$\begin{array}{llll}
\text{(a)}\ \displaystyle\int 3x^2\,\mathrm{d}x = x^3 + K & \text{pois} & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^3 + K] & = 3x^2; \\
\text{(b)}\ \displaystyle\int \cos(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{sen}(t) + K & \text{pois} & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{sen}(t) + K] & = \cos(t); \\
\text{(c)}\ \displaystyle\int e^u\,\mathrm{d}u = e^u + K & \text{pois} & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}[e^u + K] & = e^u; \\
\text{(d)}\ \displaystyle\int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \ln(z) + K & \text{pois} & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[\ln(z) + K] & = \dfrac{1}{z}.
\end{array}$$

O seguinte teorema estabelece que diferenciação e integração indefinida são processos inversos porque, de certo modo, um desfaz o outro.

Teorema 3

$$\begin{array}{lll}
\text{(i)}\ \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)]\,\mathrm{d}x = f(x) + K & \text{ou} & \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + K; \\
\text{(ii)}\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\right] = f(x) & \text{ou} & \left[\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = f(x).
\end{array}$$

Prova: A verificação para (i) é óbvia, basta derivar o lado direito. Para verificar (ii), suponha que F é uma antiderivada de f, ou seja, $F' = f$. Assim,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[F(x) + K\Big] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[F(x)\Big] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(K) = f(x) + 0 = f(x).$$

3.1 Regras Básicas de Integração

A partir da igualdade $\int f'(x)\,dx = f(x) + K$, vemos que qualquer fórmula de derivada nos fornece uma fórmula correspondente de integral indefinida, que chamamos de *integral imediata*.

Derivada $f'(x)$	Integral Indefinida $\int f'(x)\,dx = f(x) + K$
$[x]' = 1$	$\int dx = x + K$
$\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]' = x^n$	$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + K$
$[\ln(x)]' = \dfrac{1}{x}$	$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + K$
$[a^x]' = a^x \cdot \ln a$	$\int a^x\,dx = \dfrac{1}{\ln a} \cdot a^x + K$
$[e^x]' = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + K$

Observação 2
A fórmula na 3ª linha, é chamada de regra da potência para integral indefinida, sempre que $n \neq -1$. Como se vê no exemplo a seguir, frequentemente é preciso modificar a forma de um integrando para aplicar a regra da potência, por exemplo.

Exemplo 3

(a) $\displaystyle\int x^3 \cdot x^2\,dx = \int x^5\,dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + K = \frac{1}{6}x^6 + K;$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + K = -\frac{1}{x} + K;$

(c) $\displaystyle\int \sqrt[3]{y}\,dy = \int y^{\frac{1}{3}}\,dy = \frac{y^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + K = \frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}} + K;$

(d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{tg}(z)}{\sec(z)}\,dz = \int \cos(z) \cdot \frac{\mathrm{sen}(z)}{\cos(z)}\,dz = \int \mathrm{sen}(z)\,dz = -\cos(z) + K;$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(u) \cdot \mathrm{cotg}(u)}\,du = \int \sec(u) \cdot \mathrm{tg}\,u\,du = \sec(u) + K.$

Prosseguindo, como na tabela anterior, temos as seguintes integrais imediatas:

Tabela de Integrais Imediatas

1. $\displaystyle\int 1\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + K;$
2. $\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K,\ \ n \neq -1;$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + K;$
4. $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + K,\ \ 0 < a \neq 1;$
5. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + K;$
6. $\displaystyle\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen}(x) + K;$
7. $\displaystyle\int \sec^2(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg}(x) + K;$
8. $\displaystyle\int \operatorname{cossec}^2(x)\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg}(x) + K;$
9. $\displaystyle\int \sec(x)\cdot\operatorname{tg}(x)\,\mathrm{d}x = \sec(x) + K;$
10. $\displaystyle\int \operatorname{cossec}(x)\cdot\operatorname{cotg}(x)\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cossec}(x) + K;$
11. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen}(x) + K;$
12. $\displaystyle\int \frac{-\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos(x) + K;$
13. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x) + K;$
14. $\displaystyle\int \frac{-\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arccotg}(x) + K;$
15. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec}(x) + K;$
16. $\displaystyle\int \frac{-\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccossec}(x) + K;$

Observação 3
À medida que avançamos, novas integrais serão apresentadas e utilizadas na detrerminação de outras. Precisaremos, claro, de algumas técnicas (ou métodos) para este avanço. Sempre que um exemplo (integrais) contiver o símbolo ★, ele deverá receber uma atenção especial. Veremos estas integrais como *integrais semi-imediatas*.

3.2 Propriedades Operatórias da Integral Indefinida

Resumimos no seguinte teorema, de fácil verificação.

Teorema 4
Sejam f e g duas funções com primitivas num intervalo I e $c \neq 0$ uma constante qualquer, então

(i) $\displaystyle\int c\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c\cdot\int f(x)\,\mathrm{d}x;$ (ii) $\displaystyle\int \Big(f(x)\pm g(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x;$

Prova:

(i) Seja $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$. Então, $c\cdot F(x)$ é uma primitiva de $c\cdot f(x)$, pois

$$(c\cdot F(x))' = c\cdot F'(x) = c\cdot f(x).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int c\cdot f(x)\,\mathrm{d}x &= c\cdot F(x) + K = c\cdot F(x) + c\cdot K_1,\ \ (c\cdot K_1 = K)\\ &= c\cdot(F(x)+K_1)\\ &= c\cdot\int f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(ii) Sejam $F(x)$ e $G(x)$ duas primitivas quaisquer das funções $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente. Então, $F(x)\pm G(x)$ é uma primitiva da função $f(x)\pm g(x)$, pois

$$\Big(F(x)\pm G(x)\Big)' = F'(x)\pm G'(x) = f(x)\pm g(x).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int \Big(f(x) \pm g(x)\Big)\,\mathrm{d}x &= \Big(F(x) \pm G(x)\Big) + K \\
&= \Big(F(x) \pm G(x)\Big) + K_1 + K_2, \quad (K_1 + K_2 = K) \\
&= \Big(F(x) + K_1\Big) \pm \Big(G(x) + K_2\Big) \\
&= \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Este último teorema estabelece que:

- ◇ Para determinar uma antiderivada de uma constante vezes uma função, achamos primeiro uma antiderivada da função, multiplicando-a, em seguida, pela constante;
- ◇ Para determinar uma antiderivada da soma (ou subtração) de duas funções, achamos primeiro a antiderivada de cada uma das funções separadamente e então, somamos (ou subtraimos) o resultado.

O teorema seguinte, de prova análoga, estende para um número qualquer, finito, de funções.

Teorema 5
Se $f_1, f_2, \ldots, f_n$ estão definidas num intervalo, então

$$\int c_1 \cdot f_1(x) \pm c_2 \cdot f_2(x) \pm \cdots \pm c_n \cdot f_n(x)\,\mathrm{d}x = c_1 \cdot \int f_1(x)\,\mathrm{d}x \pm c_2 \cdot \int f_2(x)\,\mathrm{d}x \pm \cdots \pm c_n \cdot \int f_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

em que $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são constantes.

Observação 4
Não há uma propriedade análoga para o produto entre funções, ou seja,

$$\int f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x \neq \int f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$

como ilustra o próximo exemplo.

Exemplo 4
Como $\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + K_1$ e $\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + K_2$. Então, supondo que seja válido

$$\int f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

teremos:

$$\begin{aligned}
\int x^2\,\mathrm{d}x &= \int x \cdot x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x \cdot \int x\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + K_2\right) \cdot \left(\frac{x^2}{2} + K_2\right) = \frac{x^4}{4} + K_2 \cdot x^2 + K_2^2 \\
&= \text{um polinômio de grau 4.}
\end{aligned}$$

Um absurdo, pois $\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + K$ tem grau 3.

Exemplo 5
Vejamos algumas integrais indefinidas.

(a) $\displaystyle \int (5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x + 7)\,\mathrm{d}x = 5\int x^4\,\mathrm{d}x - 8\int x^3\,\mathrm{d}x + 9\int x^2\,\mathrm{d}x - 2\int x\,\mathrm{d}x + \int 7\,\mathrm{d}x$
$= 5\cdot\frac{1}{5}x^5 - 8\cdot\frac{1}{4}x^4 + 9\cdot\frac{3}{3}x^3 - 2\cdot\frac{1}{2}x^2 + 7x + K$
$= x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 7x + K.$

(b) $\displaystyle \int \sqrt{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}}\left(x + x^{-1}\right)\mathrm{d}x = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x + \int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$
$\displaystyle = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + K = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + K.$

(c) $\displaystyle \int \frac{2x^3+1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2x^3}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int \frac{2x^3}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int x\,\mathrm{d}x + \int x^{-2}\,\mathrm{d}x$
$\displaystyle = 2\cdot\frac{1}{2}x^2 + \frac{x^{-1}}{-1} + K = x^2 - \frac{1}{x} + K.$

(d) $\displaystyle \int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
$= x - \operatorname{arctg}(x) + K.$

(e) $\displaystyle \int 3\sec(x)\cdot\operatorname{tg}(x) - 5\operatorname{cossec}^2(x)\,\mathrm{d}x = 3\int \sec(x)\cdot\operatorname{tg}(x)\,\mathrm{d}x - 5\int \operatorname{cossec}^2(x)\,\mathrm{d}x$
$= 3\sec(x) - 5(-\operatorname{cotg}(x)) + K$
$= 3\sec(x) + 5\operatorname{cotg}(x) + K.$

(f) $\displaystyle \int \frac{2\operatorname{cotg}(x) - 3\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}(x)}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\cdot\operatorname{cotg}(x)\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}(x)}\,\mathrm{d}x$
$\displaystyle = 2\int \operatorname{cossec}(x)\cdot\operatorname{cotg}(x)\,\mathrm{d}x - 3\int \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x$
$= 2(-\operatorname{cossec}(x)) - 3(-\cos(x)) + K = 3\cos(x) - 2\operatorname{cossec}(x) + K.$

(g) $\displaystyle \int \operatorname{tg}^2(x) + \operatorname{cotg}^2(x) + 4\,\mathrm{d}x = \int \sec^2 - 1 + \operatorname{cossec}^2(x) - 1 + 4\,\mathrm{d}x$
$\displaystyle = \int \sec^2(x)\,\mathrm{d}x + \int \operatorname{cossec}^2(x)\,\mathrm{d}x + 2\int \mathrm{d}x$
$= \operatorname{tg}(x) - \operatorname{cotg}(x) + 2x + K.$

As identidades trigonométricas são frequentemente usadas quando calculamos integrais envolvendo funções trigonométricas. As identidades fundamentais a seguir são cruciais.

$$\operatorname{cossec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)},\quad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)},\quad \operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)},\quad \operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)},$$

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1,\quad \operatorname{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x),\quad \operatorname{cotg}^2(x) + 1 = \operatorname{cossec}^2(x).$$

3.3 Equações Diferenciais: uma Visão Muito, Muito, Simples

Uma *equação diferencial* é uma um equação que envolve uma função e suas derivadas, cuja maior derivada envolvida indicará a ordem da equação. Uma função f é *solução* de uma equação diferencial se f e suas derivadas verificam a equação. *Resolver* uma equação diferencial significa achar todas as suas soluções. Em alguns casos, além da equação diferencial, podemos conhecer certos valores de f, chamados *condições iniciais*.

As integrais indefinidas são úteis para a resolução de certas equações diferenciais, porque, dada uma derivada $f'(x)$, podemos integrá-la e usar o Teorema 4 para obter uma equação envolvendo a função incógnita f:

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + K.$$

Dada uma condição inicial para f, é possível determinar $f(x)$ explicitamente.

Vamos considerar a subclasse de equações diferenciais que podem ser resolvidas pelo processo de integração direta. Para tanto, basta "arrumar" a equação $y' = f(x,y)$ (ou $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$) até ficar da forma $M(x)\,\mathrm{d}x = N(y)\,\mathrm{d}y$, ou seja, com as variáveis, e seus respectivos diferenciais, separadas pelo sinal de iguadade. Estas equações são conhecidas como *Equações Diferenciais Separáveis*.

Exemplo 6
A equação diferencial $y' = 2x\sqrt{y-1}$ é equivalente a $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x\sqrt{y-1}$. Assim, separando as variáveis temos:

$$\frac{1}{\sqrt{y-1}}\,\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{y-1}}\,\mathrm{d}y = \int 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow 2\sqrt{y-1} + K_1 = x^2 + K_2 \Rightarrow 2\sqrt{y-1} = x^2 + K_2 - K_1.$$

Como $K_2 - K_1 = K$, uma constante, isolando y, temos que $y(x) = \dfrac{(x^2+k)^2}{4} + 1$ é solução da equação $y' = 2x\sqrt{y-1}$. (Verifique!)

Exemplo 7
Resolva a equação diferencial $y' = 6x^2 + x - 5$ sujeita à condição inicial $y(0) = 2$.

Solução: Escrevendo $y' = \dfrac{dy}{\mathrm{d}x}$, temos $\dfrac{dy}{\mathrm{d}x} = 6x^2 + x - 5$ e $dy = (6x^2 + x - 5)\,\mathrm{d}x$. Portanto,

$$y = \int dy = \int (6x^2 + x - 5)\,\mathrm{d}x = 2x^3 + \frac{x^2}{2} - 5x + K.$$

A condição inicial $y(0) = 2$, diz que para $x = 0$ temos $y = 2$, assim $y(0) = 0 + 0 - 0 + K = 2$, ou seja $K = 2$. Logo a solução da equação diferencial dada, com a condição inicial $y(0) = 2$, é

$$y = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + 2.$$

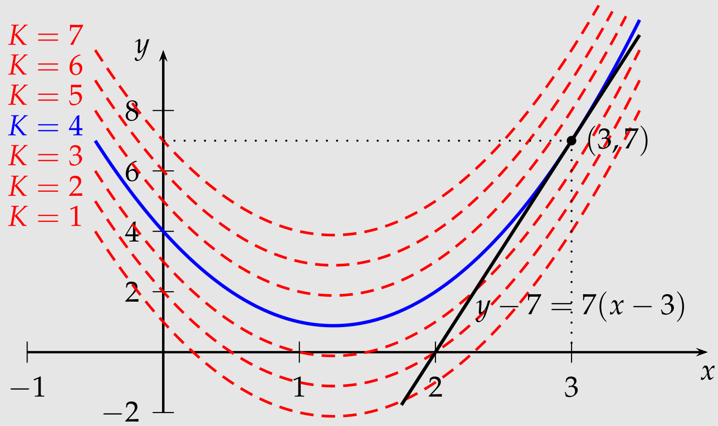
Exemplo 8
Em qualquer ponto (x,y) de uma determinada curva, a reta tangente tem uma inclinação igual a $4x - 5$. Se a curva contém o ponto $(3,7)$, ache sua equação.

Solução: Como a inclinação da reta tangente e uma curva em qualquer ponto (x,y) é o valor da derivada nesse ponto, temos $\dfrac{dy}{\mathrm{d}x} = 4x - 5$, e então

$$y = \int dy = \int (4x - 5)\,\mathrm{d}x = 2x^2 - 5x + K.$$

A equação $y = 2x^2 - 5x + K$ representa uma família de curvas. Como queremos determinar uma certa curva dessa família que contenha o ponto $(3,7)$, a substituição x por 3 e y por 7, obtém-se

$K = 4$, e portanto $y = 2x^2 - 5x + 4$ é a equação da curva pedida.



Exemplo 9
Uma equação da reta tangente t à curva C no ponto $(1,3)$ é $t : y = x + 2$. Se em qualquer ponto (x, y) da curva $y = f(x)$ se tem $y'' = 6x$, encontrar uma equação para esta curva.

Solução: Pela equação da reta tangente à curva no ponto $(1,3)$, temos que a sua inclinação neste ponto é $m_t(1) = 1$ (que é o coeficiente angular da reta t). Então, temos que $y'(1) = 1$.

De $y'' = 6x$, lembrando que $y'' = \dfrac{dy'}{\mathrm{d}x}$, ou ainda $dy' = y''\,\mathrm{d}x = 6x\,\mathrm{d}x$, integrando em relação à x, obtemos:

$$y' = \int dy' = \int 6x\,\mathrm{d}x = 6 \cdot \frac{x^2}{2} + K_1 = 3x^2 + K_1.$$

Como já temos $y'(1) = 1$, substituindo na igualdade acima, obtemos:

$$1 = 3 \cdot 1^2 + K_1 \Rightarrow K_1 = -2.$$

Daí, temos que $y' = 3x^2 - 2$. Como $y' = \dfrac{dy}{\mathrm{d}x}$, ou ainda $dy = y'dx$. Integrando, mais uma vez, em relação à x, temos:

$$y = \int dy = \int y'dx = \int (3x^2 - 2)\,\mathrm{d}x = \frac{3x^3}{3} - 2x + K_2 = x^3 - 2x + K_2.$$

Uma vez que o ponto $(1,3)$ pertence à curva, temos que $y = 3$ quando $x = 1$. Portanto, substituindo, temos:

$$3 = 1^3 - 2 \cdot 1 + K_2 \Rightarrow K_2 = 4.$$

Portanto, uma equação para a curva C é $y = x^3 - 2x + 4$.

A função $f(x) = e^x$ possui derivada $f'(x) = e^x$, ou seja, neste caso $f' = f$. O exemplo seguinte determina todas a funções cuja derivada resulta na própria função.

Exemplo 10
Determine todas as funções $y = f(x)$ tais que $y' = y$.

Solução: Escrevendo $y' = \dfrac{dy}{\mathrm{d}x}$, supondo $y' = y$, temos $\dfrac{dy}{\mathrm{d}x} = y$, donde $\dfrac{dy}{y} = \mathrm{d}x$. Integrando,

temos
$$\int \frac{1}{y} dy = \int \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln(y) = x + K_1.$$
Assim, $y = e^{x+K_1}$. Pondo $e^{K_1} = K$, temos $y = K \cdot e^x$. Como $K \in \mathbb{R}$, temos assim todas as funções tais que $y' = y$.

3.4 Interpretação Cinética

Do estudo da cinética sabemos que a posição de um ponto material em movimento, sobre uma curva $\mathcal{C}$ (trajetória) conhecida, pode ser determinada, em cada instante t, através de sua abscissa s, medida sobre a curva $\mathcal{C}$. A expressão que nos dá s em função de t é $s = s(t)$, e é chamada *equação horária*.

Sendo dado um instante t_0 e sendo t um instante diferente de t_0, chamamos *velocidade média* do ponto entre os instantes t_0 e t o quociente
$$v_m = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$
e chama–se *velocidade escalar* do ponto no instante t_0 o limite
$$v_{(t_0)} = \lim_{t \to t_0} v_m = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t_0).$$
Em outras palavras, a derivada da função $s = s(t)$ no ponto $t = t_0$ é igual à velocidade escalar do móvel no instante t_0.

Sabemos ainda que a velocidade v de um ponto material em movimento pode variar de instante para instante. A equação que nos dá v em função do tempo t é $v = v(t)$, e é chamada *equação da velocidade* do ponto. Chama–se a *aceleração média* do ponto entre os instantes t e t_0 o quociente
$$a_m = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$
e chama–se aceleração escalar do ponto no instante t_0 o limite:
$$a_{(t_0)} = \lim_{t \to t_0} a_m = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t_0).$$
Em outras palavras, a derivada da função $v = v(t)$ no ponto $t = t_0$ é igual à aceleração escalar do móvel no instante t_0.

Exemplo 11
Suponha que um ponto percorre uma curva obedecendo à equação horária $s = t^2 + t - 2$ (Unidades SI). No instante $t_0 = 2$ a velocidade é dada pela derivada s' no ponto 2, ou seja,
$$\begin{aligned} v_{(2)} &= s'(2) = \lim_{t \to 2} \frac{s(t) - s(2)}{t - 2} = \lim_{t \to 2} \frac{(t^2 + t - 2) - (2^2 + 2 - 2)}{t - 2} \\ &= \lim_{t \to 2} \frac{t^2 + t - 6}{t - 2} = \lim_{t \to 2} \frac{(t-2)(t+3)}{t - 2} = 5\ m/s. \end{aligned}$$

No entanto, podemos, por meio da integração indefinida, percorrer o caminho inverso,ou seja, dada a aceleração $a(t)$, temos $v(t) = \int a(t)\, \mathrm{d}t$, e então $s(t) = \int v(t)\, \mathrm{d}t$.

Exemplo 12 (Exercício da Física)
Mostre que para um movimento em uma reta com aceleração constante a, com velocidade inicial v_0 e deslocamento inicial s_0, o deslocamento do móvel após o instante t é dado por $s = s_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$.

Solução: Como temos que a aceleração $\left(v'(t) = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)$ do móvel é constante e igual a a, então temos que $v'(t) = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a$, onde a é constante. Pondo $v'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t$, por integração em t, obtemos:

$$v(t) = \int v'(t)\,\mathrm{d}t = \int a\,\mathrm{d}t = a \cdot t + K_1.$$

Como $a \cdot t = \Delta v = v - v_0$, da equação acima, concluímos que $K_1 = v_0$. Portanto, temos $v = a \cdot t + v_0$. Lembrando que $v(t) = \dfrac{ds}{\mathrm{d}t} = s'(t)$, substituindo na igualdade acima e por integração em t, obtemos

$$s(t) = \int ds = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int (a \cdot t + v_0)\,\mathrm{d}t = \frac{a \cdot t^2}{2} + v_0 t + K_2.$$

Lembrando que $v \cdot t = \Delta s = s - s_0$, comparando, concluímos que $K_2 = s_0$. Portanto, temos que $s = s_0 + v_0 \cdot t + \dfrac{1}{2}a \cdot t^2$.

Exemplo 13
Uma pedra é lançada verticalmente para cima de um ponto situado a 45 m acima do solo e com velocidade inicial de 30 m/s. Desprezando a resistência do ar, determine **(a)** a distância da pedra ao solo após t segundos; **(b)** o intervalo de tempo durante o qual a pedra sobre; e **(c)** o instante em que a pedra atinge o solo, e a velocidade nesse instante.

Solução: Primeiramente, notemos que o movimento da pedra pode ser representada por um ponto numa coordenada vertical com origem no solo e direção positiva para cima.

(a) A distância da pedra ao solo no instante t é $s(t)$ e as condições iniciais são $s(0) = 45$ e $v(0) = 30$. Como a velocidade é decrescente, $v'(t) < 0$, isto é, a aceleração é negativa. Logo, pelas observações descritas acima, $a(t) = v'(t) = -9,8$, e então

$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = \int -9,8\,\mathrm{d}t = -9,8t + K_1$$

Como $v(0) = 30$, temos que $K_1 = 30$, e conseqüentemente, $v(t) = \int -9,8\,\mathrm{d}t = -9,8t + 30$. Obtemos agora, $s(t)$ da seguinte forma:

$$s(t) = \int v(t)\;dt = \int (-9,8t + 30)\,\mathrm{d}t = -4,9t^2 + 30t + K_2$$

Como $s(0) = 45$, temos que $K_2 = 45$. E portanto a distância ao solo no instante t é dado por $s(t) = -4,9t^2 + 30t + 45$.

(b) A pedra subirá até que $v(t)$ até que $v(t) = 0$, isto é, $-9,8t + 30 = 0$, ou $t \approx 3$.

(c) A pedra atingirá o solo quando $s(t) = 0$, isto é, quando $-4,9t^2 + 30t + 45 = 0$. Donde $t = -1,24$ ou $t = 7,36$. Como t é não-negativo, temos que quando $t = 7,36s$ a pedra atingirá o solo, sob velocidade $v(7,36) = -9,8(7,36) + 30 \approx -42,13m/s$.

Exemplo 14

Um tanque tem o seu volume de água V, em m^3, dado em função da altura h da água no mesmo. Sendo conhecido que a taxa de variação de V em relação a h é $\pi(3h-2)$, e sabendo que quando a altura da água é $1m$, existem no tanque $3\pi\ m^3$ de água, determine o volume de água no tanque quando a altura for de $3m$.

Solução: A taxa de variação do volume V em relação a h é a derivada $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}$, assim, $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h} = \pi(3h-2)$. Escrevendo $\mathrm{d}V = \pi(3h-2)\,\mathrm{d}h$ e integrando em relação a h, temos

$$V(h) = \int \mathrm{d}V = \int \pi(3h-2)\,\mathrm{d}h = \pi\left(\frac{3h^2}{2} - 2h\right) + K.$$

Para $h = 1$, temos que o volume é $3\pi\ m^3$, ou seja $V(1) = 3\pi$. Portanto, obtemos

$$3\pi = \pi\left(\frac{3\cdot 1^2}{2} - 2\cdot 1\right) + K \Rightarrow K = \frac{7\pi}{2}.$$

Assim, a expressão do volume em função da altura h é dada por $V(h) = \pi\left(\dfrac{3h^2}{2} - 2h\right) + \dfrac{7\pi}{2} = \pi\left(\dfrac{3h^2}{2} - 2h + \dfrac{7}{2}\right)$. Logo, para $h = 3$, o volume é:

$$V = \pi\left(\frac{3\cdot 3^2}{2} - 2\cdot 3 + \frac{7}{2}\right) = 11\pi\ m^3.$$

3.5 Mudança de Variável na Integral Indefinida: Integração por substituição

As fórmulas para integrais indefinidas que estabelecemos até aqui têm objetivo limitado, por que não podemos usá-la diretamente para calcular integrais como

$$\int \cos(3x)\,\mathrm{d}x,\ \int \sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x \quad \text{ou} \quad \int \operatorname{tg}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Veremos um simples método, mas poderoso, para mudar a variável de integração de modo que essas integrais (e muitas outras) possam ser calculadas por meio de uma integral imediata. Esta técnica de integração decorre da regra da cadeia.

Suponhamos que conhecemos uma primitiva, F, para a função f (isto é, $F' = f$) e que g é uma função derivável. Denotando por h a função composta de F e g, então $h(x) = F\big(g(x)\big)$ e da fórmula $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[h(x)\right]\,\mathrm{d}x = h(x) + K$ temos

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[F\big(g(x)\big)\right]\,\mathrm{d}x = F\big(g(x)\big) + K.$$

Aplicando a regra da cadeia no integrando $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F(g(x))]$ e do fato que $F' = f$ obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F(g(x))] = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f((x)) \cdot g'(x)$$

e portanto

$$\int f((x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + K. \tag{1}$$

A fórmula (1) pode ser remodelada, adotando $u = g(x)$. Assim $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x)$ e logo $du = g'(x)\,\mathrm{d}x$. Então, podemos reescrever (1) da seguinte forma:

$$\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + K,$$

e portanto, se conhecemos uma primitiva da função f, conhecemos também uma primitiva para $(f \circ g) \cdot g'$ que é $F \circ g$.

Este método de calcular integrais indefinidas é conhecido como *Mudança de Variável* ou *Método da Substituição*, e resumimos da seguinte forma.

Teorema 6 (Regra da Cadeia para Antidiferenciação)
Se F é uma antiderivada de f, então

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + K.$$

Se $u = g(x)$ e $du = g'(x)\,\mathrm{d}x$, então

$$\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + K.$$

Exemplo 15
Determine as integrais indefinidas exibidas no começo desta seção.

(a) $\displaystyle\int \cos(3x)\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x$ (c) (★) $\displaystyle\int \mathrm{tg}(x)\,\mathrm{d}x$

Solução:

(a) Fazendo a substituição $u = 3x$ e $du = 3dx$, temos

$$\int \cos(3x)\,\mathrm{d}x = \int \cos(u)\,\frac{\mathrm{d}u}{3} = \frac{1}{3}\int \cos(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(u) + K = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(3x) + K$$

(b) Fazendo a substituição $u = 4x + 1$ e $du = 4dx$, temos

$$\int \sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{4} = \frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + K = \frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}} + K = \frac{1}{6}\sqrt{(4x+1)^3} + K$$

(c) Como $\mathrm{tg}(x) = \dfrac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}$, fazendo a mudança de variável $u = \cos(x)$ e $du = -\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{d}x$, temos

$$\int \mathrm{tg}(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln|u| + K = -\ln|\cos(x)| + K = \ln|\sec(x)| + K$$

Observação 5
Analogamente ao item (c) do exemplo acima, temos que

$$(\bigstar) \int \operatorname{cotg}(x)\,\mathrm{d}x = \ln|\operatorname{sen}(x)| + K$$

De fato, como $\operatorname{cotg}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$, façamos a substituição $u = \operatorname{sen}(x)$ e $du = \cos(x)\,\mathrm{d}x$, logo

$$\int \operatorname{cotg}(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + K = \ln|\operatorname{sen}(x)| + K.$$

Observação 6
Nem sempre é fácil decidir a substituição $u = g(x)$ necessária para transformar uma integral indefinida em uma forma que possa ser facilmente calculável. Às vezes é preciso tentar várias possibilidades diferentes até achar uma substituição adequada. Na maioria dos casos, nenhuma substituição simplificará propriamente o integrando. Vejamos algumas diretrizes.

Diretrizes para a substituição da variável:

1. Decidir por uma substituição favorável $u = g(x)$;
2. Calcular $du = g'(x)\,\mathrm{d}x$;
3. Com auxílio de 1. e 2., transformar a integral em uma forma que envolva apenas a variável u. Se qualquer parte do integrando resultante ainda contiver a variável x, usar uma substituição diferente em 1., ou outro método, caso a variável x persista em aparecer;
4. Calcular a integral obtida em 3., obtendo uma antiderivada envolvendo u;
5. Substituir u por $g(x)$ na antiderivada obtida na diretriz 4. O resultado deve conter apenas a variável x.

Exemplo 16
Calcular, com uma mudança de variável, as seguinte integrais (a) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$ e (b) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{3x-1}\,\mathrm{d}x$.

Solução:

(a) Fazendo $u = x^2$, temos que $du = 2x\,\mathrm{d}x$ donde $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}x$. Daí

$$\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int e^{x^2}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}e^u + K = \frac{1}{2}e^{x^2} + K.$$

(b) Fazendo $u = 3x-1$, temos que $du = 3dx$, donde $\dfrac{1}{3}\,\mathrm{d}x$, $x = \dfrac{u+1}{3}$ e $2x+5 = \dfrac{2}{3}(u+1)+5$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+5}{3x-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int \frac{\frac{2}{3}(u+1)+5}{u}\,\mathrm{d}u + K = \frac{1}{9}\int \frac{2u+17}{u}\,\mathrm{d}u + K \\
&= \frac{1}{9}\int 2\,\mathrm{d}u + \frac{1}{9}\int \frac{17}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{9}u + \frac{17}{9}\ln|u| + K \\
&= \frac{2}{9}(3x-1) + \frac{17}{9}\ln|3x-1| + K.
\end{aligned}$$

Observação 7
Na verdade, este último exemplo, é um caso particular de uma situação mais geral, que fica como exercício a sua verificação. Sejam a, b, c e d números reais, tal que $c \neq 0$, então

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{c^2}(cx+d) + \left(\frac{bc-ad}{c^2}\right)\ln|cx+d| + K.$$

Teorema 7
Se f é derivável com antiderivada F e se $n \neq -1$ é um número racional, então

(i) $\displaystyle\int [f(x)]^n f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + K$

(ii) ★ $\displaystyle\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + K,\ a \neq 0$

Prova: Basta fazer a mudança de variável $u = f(x)$ e $du = f'(x)\,\mathrm{d}x$ para (i), e $u = ax+b$ e $\dfrac{\mathrm{d}u}{a} = \mathrm{d}x$ para (ii).

Observação 8
O item (ii) do teorema acima, nos permite calcular uma quantidade grande de integrais, as quais denominamos integrais semi-imediatas. Veja ilustração no exemplo a seguir.

Exemplo 17
(a) $\displaystyle\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{sen}(2x)}{2} + K$; (b) $\displaystyle\int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x} + K$; (c) $\displaystyle\int e^{1+3x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{1+3x}}{3} + K.$

Exemplo 18
Calcule $\displaystyle\int \mathrm{tg}(x)\cdot\sec^2(x)\,\mathrm{d}x$ por dois métodos: (a) substituição $u = \mathrm{tg}(x)$, (b) substituição $u = \sec(x)$, e (c) compare as respostas entre (a) e (b).

Solução:

(a) Fazendo $u = \mathrm{tg}(x)$, temos que $du = \sec^2(x)\,\mathrm{d}x$, logo

$$\int \mathrm{tg}(x)\cdot\sec^2(x)\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}u = \frac{u^2}{2} + K = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2(x) + K.$$

(b) Fazendo $u = \sec(x)$, temos que $du = \sec(x)\cdot\mathrm{tg}(x)\,\mathrm{d}x$, logo

$$\int \mathrm{tg}(x)\cdot\sec^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \sec(x)\cdot\sec(x)\cdot\mathrm{tg}(x)\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}u = \frac{u^2}{2} + K = \frac{1}{2}\sec^2(x) + K.$$

(c) Como $\sec^2(x) = 1 + \mathrm{tg}^2(x)$, as funções definidas por $\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2(x)$ e $\frac{1}{2}\sec^2(x)$ diferem por uma constante, e assim sendo cada uma serve como antiderivada de $\mathrm{tg}(x)\cdot\sec^2(x)$, pois

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sec^2(x) + K &= \frac{1}{2}(\mathrm{tg}^2(x)+1) + K = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2(x) + \frac{1}{2} + K\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2(x) + K_1, \qquad \text{onde} \qquad K_1 = \frac{1}{2} + K.\end{aligned}$$

Algumas vezes é possível obter uma primitiva após efetuarmos a mudança de uma variável, mesmo não sendo tão explicito como no Teorema 6. Vejamos o seguinte exemplo como ilustração desse fato.

Exemplo 19
Calcule $\int x^2\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Solução:

1ª Forma. Fazendo $u = 1+x$, temos que $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ e $x = u-1$. Assim temos

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int (u-1)^2 u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \int u^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}u - 2\int u^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}u + \int u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - 2\cdot\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + K = \frac{2}{7}(1+x)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + K.\end{aligned}$$

2ª Forma. Fazendo $v = \sqrt{1+x}$, temos que $v^2 - 1 = x$ e $2v\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$. Então

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int (v^2-1)^2\cdot v\cdot 2v\,\mathrm{d}v = 2\int v^6\,\mathrm{d}v - 4\int v^4\,\mathrm{d}v + 2\int v^2\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{2}{7}v^7 - \frac{4}{5}v^5 + \frac{2}{3}v^3 + K = \frac{2}{7}(1+x)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + K.\end{aligned}$$

Exemplo 20 (★)
Obter fórmulas para (a) $\int \sec(x)\,\mathrm{d}x$ e (b) $\int \mathrm{cossec}(x)\,\mathrm{d}x$.

Solução:

(a) Multiplicando o numerador e o denominador por $\sec(x) + \mathrm{tg}(x)$, temos

$$\int \sec(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sec(x)(\sec(x)+\mathrm{tg}(x))}{\sec(x)+\mathrm{tg}(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sec^2(x)+\sec(x)\cdot\mathrm{tg}(x)}{\sec(x)+\mathrm{tg}(x)}\,\mathrm{d}x$$

e mudando de variável, $u = \sec(x)+\mathrm{tg}(x)$, temos $du = (\sec(x)\cdot\mathrm{tg}(x) + \sec^2(x))\,\mathrm{d}x$ obtém-se

$$\int \sec(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + K = \ln|\sec(x)+\mathrm{tg}(x)| + K.$$

(b) Multiplicando o numerador e o denominador por $\mathrm{cossec}(x) - \mathrm{cotg}(x)$, temos

$$\int \mathrm{cossec}(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{cossec}(x)(\mathrm{cossec}(x)-\mathrm{cotg}(x))}{\mathrm{cossec}(x)-\mathrm{cotg}(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{cossec}^2(x)-\mathrm{cossec}(x)\cdot\mathrm{cotg}(x)}{\mathrm{cossec}(x)-\mathrm{cotg}(x)}\,\mathrm{d}x$$

com $u = \mathrm{cossec}(x) - \mathrm{cotg}(x)$, temos $du = (-\mathrm{cossec}(x)\cdot\mathrm{cotg}(x) + \mathrm{cossec}^2(x))\,\mathrm{d}x$ obtém-se

$$\int \mathrm{cossec}(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + K = \ln|\mathrm{cossec}(x)-\mathrm{cotg}(x)| + K$$

Observação 9
Escrevendo $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{\cos(x)}{1-\operatorname{sen}^2(x)}$, podemos mudar a variável $u = \operatorname{sen}(x)$, donde $du = \cos(x)dx$ e, então, integramos a secante de outra maneira:

$$\int \sec(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos(x)}{1-\operatorname{sen}^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + K = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}\right| + K.$$

Agora, percebemos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}\right| &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\operatorname{sen}(x))(1+\operatorname{sen}(x))}{(1-\operatorname{sen}(x))(1+\operatorname{sen}(x))}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\operatorname{sen}(x))^2}{\cos^2(x)}\right| \\ &= \ln\left|\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right| = \ln|\sec(x)+\operatorname{tg}(x)|.\end{aligned}$$

Exemplo 21 (★)
Mostre, por uma mudança de variável, que:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + K;$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + K;$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right) + K;$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + K;$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + K;$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + K.$

Solução:

(a) Notemos primeiro que $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,\mathrm{d}x.$

Fazendo $u = \dfrac{x}{a}$, temos que $a\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ e logo

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{a}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = \operatorname{arcsen}(u) + K = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + K.$$

(b) Como $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x$, pondo $u = \dfrac{x}{a}$, temos que $a\cdot\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ e logo

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{a}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(u) + K = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + K.$$

(c) Como $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x\sqrt{a^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{x\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}}$, pela mudança de variável $u = \dfrac{x}{a}$, temos $x = a\cdot u$ donde $\mathrm{d}x = a\cdot\mathrm{d}u$, e logo

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{a}{au\sqrt{u^2-1}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}(u) + K = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right) + K.$$

(d) Como $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}\,\mathrm{d}x$, fazendo $u = x + \sqrt{x^2 \pm a^2}$, temos:

$$du = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2} + x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,\mathrm{d}x,$$

portanto

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + K = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + K.$$

(e) Como $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+a)(x-a)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+a)^2\dfrac{(x-a)}{(x+a)}}\,\mathrm{d}x$, fazendo $u = \dfrac{x-a}{x+a}$ e pela regra da derivada do quociente, temos que

$$du = \frac{1\cdot(x+a) - 1\cdot(x-a)}{(x+a)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2a}{(x+a)^2}\,\mathrm{d}x, \quad \text{donde,} \quad \frac{\mathrm{d}u}{2a} = \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^2}$$

e portanto $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{2a} = \frac{1}{2a}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2a}\ln|u| + K = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + K.$

(f) Idem (e).

4 Técnicas de Integração

Até aqui, estabelecemos fórmulas para o cálculo de integrais indefinidas a partir da fórmula

$$\int D_x[f(x)]\,\mathrm{d}x = f(x) + K$$

e pelo método da substituição de variável, que possibilita transformar uma integral em outra mais simples, que possa ser facilmente calculada.

Desenvolveremos então, outras maneiras de simplificar integrais, entre elas a integração por partes. Este poderoso dispositivo permite-nos obter integrais indefinidas de $\ln(x)$, $\operatorname{arctg}(x)$ e outras expressões transcendentes importantes. Desenvolveremos ainda, técnicas para simplificar integrais que contenham: potência de funções triogonométricas; radicais; expressões racionais e $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ e $\sqrt{x^2 - a^2}$.

Às vezes pode ser preferível fazer uso de uma tabela de integrais, em vez de efetuar uma integração complicada. Tabelas desse tipo pode-se encontrar em quase todos os livros de cálculo. Algumas vezes é necessário empregar técnica de integração para expressar o integrando na forma em que ele aparece na tabela, exigindo que reconheça qual técnica a ser empregada numa dada integral. Quase rodas as fórmulas nas tabelas de integrais, são desenvolvidas a partir das técnicas de integração, por essa razão, aconselhamos o uso das tabelas de integrais somente depois que você dominar a integração.

Na prática, não é sempre possível calcular uma integral indefinida, isto é, o integrando não tem uma antiderivada que possa ser expressa em termos das funções elementares. Exemplos de tais integrais são

$$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Assim, tome muito cuidado ao tentar resolver uma integral qualquer, pois ela pode ter vindo de uma lista de integrais com conteúdos mais avançados, como por exemplo a expansão em séries (conteúdo de Cálculo III).

Use, moderadamente, o mecanismo de conhecimento computacional Wolfram | Alpha para conferir seus cálculos ou até mesmo saber se uma função dada possui primitiva elementar. Para isso, ccesse http://www.wolframalpha.com/ (ou baixe seu aplicativo para iOS ou Android) e use o comando "**int f(x)**".

4.1 Integração por Partes

Da fórmula da derivada do produto de duas funções obtemos um método de integração muito útil, chamado *Integração por Partes*, que é estabelecido da seguinte forma.

Se f e g são duas funções diferenciáveis, então

$$D_x\big[f(x)\cdot g(x)\big] = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

ou equivalentemente

$$f(x)\cdot g'(x) = D_x\big[f(x)\cdot g(x)\big] - f'(x)\cdot g(x).$$

Integrando ambos os membros em relação a x, obtemos

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int D_x\big[f(x)\cdot g(x)\big]\,\mathrm{d}x - \int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

e escrevemos esta última equação da seguinte forma:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

que é chamada de fórmula de *Integração por Partes*. Esta fórmula pode ser simplificada fazendo

$$\begin{array}{rclcrcl} u &=& f(x) & \qquad & \mathrm{d}v &=& g'(x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &=& f'(x)\,\mathrm{d}x & \qquad & v &=& g(x) \end{array}$$

resultando na seguinte versão da fórmula de integração por partes

$$\int u\,\mathrm{d}v = u\cdot v - \int v\,\mathrm{d}u \tag{3}$$

Observe, que esta fórmula nos permite expressar uma integral indefinida em termos de outra que pode ser mais fácil de calcular, escolhendo adequadamente u e dv. O termo por partes é do fato que este processo separa o integrando em duas partes. É importante a escolha adequada de dv, que em geral fazemos representar a parte mais complicada do integrando que possa ser prontamente integrada, pois v será uma primitiva de dv.

Resumimos este processo de integração da seguinte forma:

Olhamos uma função h que queremos integrar, como o produto de duas funções, uma das quais é a derivada de uma função já conhecida, isto é,

$$h(x) = f(x) \cdot g'(x),$$

com g sendo uma função conhecida. Como vimos, temos que

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Esperamos, então, que nossa escolha para as funções f e g tenham sido boa de maneira que conheçamos uma primitiva para $g \cdot f'$.
Usando novas variáveis, u e v, podemos representar a igualdade acima de uma forma mais simples: fazendo

$$\begin{array}{rclcrcl} u & = & f(x) & \qquad & \mathrm{d}v & = & g'(x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u & = & f'(x)\,\mathrm{d}x & & v & = & g(x) \end{array}$$

e, portanto, nessas novas variáveis, a fórmula que obtivemos acima,

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$$

se reduz a resultando na seguinte versão da fórmula de integração por partes

$$\int u\,\mathrm{d}v = u \cdot v - \int v\,\mathrm{d}u.$$

A seguir, exemplos ilustrando este método de integração.

Exemplo 22
Calcular $\int x \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

Solução: Para determinar quais as substituições para u e dv, devemos ter em mente que para encontrar v precisamos saber integrar dv. Isso sugere que $u = \ln(x)$ e $dv = x\,\mathrm{d}x$. Então, $du = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ e $v = \dfrac{x^2}{2} + K_1$. Da fórmula (3), temos:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \ln(x)\left(\frac{x^2}{2} + K_1\right) - \int \left(\frac{x^2}{2} + K_1\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{x^2}{2}\ln(x) + K_1\ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x - K_1\int\frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x) + K_1\ln(x) - \frac{x^2}{4} - K_1\ln(x) + K_2 = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + K_2. \end{aligned}$$

Observação 10
Note que a primeira constante de integração K_1, não aparece na resposta final. K_1 foi usada somente para mostrar que todas as escolhas de v da forma $\frac{1}{2}x^2 + K_1$ produzem o mesmo resultado para $\int x \ln(x)\,\mathrm{d}x$. Essa situação vale em geral. De fato, se $v + K_1$ na fórmula (3), temos

$$\begin{aligned} \int u\,\mathrm{d}v &= u(v + K_1) - \int (v + K_1)\,\mathrm{d}u = uv + K_1u - \int v\,\mathrm{d}u - K_1\int \mathrm{d}u \\ &= uv + K_1u - \int v\,\mathrm{d}u - K_1u = uv - \int v\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Com esta observação, temos que é desnecessário escrevermos a constante de integração quando calculamos v a partir de dv.

Exemplo 23
Pelo método de integração por partes, calcule as seguintes integrais.

(a) $\displaystyle\int x \cdot \cos(x)\, \mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int (x^2+3x) \cdot \operatorname{sen}(x)\, \mathrm{d}x$; (c) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\, \mathrm{d}x$.

Solução:

(a) Seja $u = x$ e $dv = \cos(x)\, \mathrm{d}x$. Então $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ e $v = \operatorname{sen}(x)$. Pela fórmula (3)

$$\int x \cdot \cos(x)\, \mathrm{d}x = x \cdot \operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x)\, \mathrm{d}x = x \cdot \operatorname{sen}(x) + \cos(x) + K.$$

(b) Se $u = x^2 + 3x$ e $dv = \operatorname{sen}(x)\, \mathrm{d}x$, então $du = (2x+3)\, \mathrm{d}x$ e $v = -\cos(x)$. Pela fórmula (3):

$$\begin{aligned}\int (x^2+3x) \cdot \operatorname{sen}(x)\, \mathrm{d}x &= -(x^2+3x) \cdot \cos(x) - \int (-\cos(x))(2x+3)\, \mathrm{d}x \\ &= -(x^2+3x) \cdot \cos(x) + \int (2x+3) \cdot \cos(x)\, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Aplicando a integração por partes novamente, para a segunda integral, sendo

$$\begin{array}{rclcrcl} \overline{u} &=& 2x+3 & & d\overline{v} &=& \cos(x)\, \mathrm{d}x \\ d\overline{u} &=& 2\, \mathrm{d}x & & \overline{v} &=& \operatorname{sen}(x) \end{array}$$

temos:

$$\begin{aligned}\int (x^2+3x) \cdot \operatorname{sen}(x)\, \mathrm{d}x &= -(x^2+3x)\cos(x) + \Big((2x+3)\operatorname{sen}(x) - \int 2 \cdot \operatorname{sen}(x)\, \mathrm{d}x\Big) \\ &= -(x^2+3x) \cdot \cos(x) + (2x+3)\operatorname{sen}(x) + 2\cos(x)\, \mathrm{d}x + K \\ &= -(x^2+3x-2) \cdot \cos(x) + (2x+3) \cdot \operatorname{sen}(x) + K.\end{aligned}$$

(c) Fazendo $u = x^2$ e $dv = xe^{x^2}\, \mathrm{d}x$, temos $\mathrm{d}u = 2x\, \mathrm{d}x$ e $v = \dfrac{1}{2}e^{x^2}$, em que v foi obtido pelo método de mudança de variável. Portanto, da fórmula (3) temos

$$\int x^3 e^{x^2}\, \mathrm{d}x = x^2\left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right) - \int \left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right) 2x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + K.$$

Observação 11
De modo geral, as integrais

$$\int f(x) \cdot \cos(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{ou} \quad \int f(x) \cdot \operatorname{sen}(x)\, \mathrm{d}x$$

onde $f(x)$ é um polinômio, usamos a integração por partes, tomando

$$\left\{\begin{array}{rclcrcl} u &=& f(x) & & \mathrm{d}v &=& \cos(x)\, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &=& f'(x)\, \mathrm{d}x & & v &=& \operatorname{sen}(x) \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{rclcrcl} u &=& f(x) & & \mathrm{d}v &=& \operatorname{sen}(x)\, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &=& f'(x)\, \mathrm{d}x & & v &=& -\cos(x) \end{array}\right.$$

Exemplo 24
Pelo método de integração por partes, calcule as seguintes integrais.

(a) $\displaystyle\int x \cdot e^x \, \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int 2x \cdot \ln(x) \, \mathrm{d}x$.

Solução:

(a)

$$\left\{\begin{array}{rcl} u & = & x \\ du & = & dx \end{array}\right. \quad \begin{array}{rcl} \mathrm{d}v & = & e^x\,\mathrm{d}x \\ v & = & e^x \end{array} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \displaystyle\int x \cdot e^x \, \mathrm{d}x & = & x \cdot e^x - \displaystyle\int e^x \, \mathrm{d}x \\ & = & x \cdot e^x - e^x + K \\ & = & (x-1) \cdot e^x + K. \end{array}\right.$$

(b)

$$\left\{\begin{array}{rcl} u & = & \ln(x) \\ du & = & \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{array}\right. \quad \begin{array}{rcl} \mathrm{d}v & = & 2x\,\mathrm{d}x \\ v & = & x^2 \end{array} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \displaystyle\int 2x \cdot \ln(x) \, \mathrm{d}x & = & x^2 \cdot \ln(x) - \displaystyle\int x^2 \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \\ & = & x^2 \cdot \ln(x) - \displaystyle\int x \, \mathrm{d}x \\ & = & x^2 \cdot \ln(x) - \dfrac{x^2}{2} + K. \end{array}\right.$$

Observação 12
De modo geral, nas integrais da forma

$$\int f(x) \cdot a^x \, \mathrm{d}x \quad \text{ou} \quad \int f(x) \cdot \log_a(x) \, \mathrm{d}x$$

onde $f(x)$ é um polinômio e a é uma constante, usamos integração por partes, fazendo

$$\left\{\begin{array}{rcl} u & = & f(x) \\ du & = & f'(x)\,\mathrm{d}x \end{array}\right. \quad \begin{array}{rcl} \mathrm{d}v & = & a^x\,\mathrm{d}x \\ v & = & \dfrac{a^x}{\ln(a)} \end{array} \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{rcl} u & = & \log_a(x) \\ du & = & \frac{1}{x \cdot \ln a}\,\mathrm{d}x \end{array}\right. \quad \begin{array}{rcl} \mathrm{d}v & = & f(x)\,\mathrm{d}x \\ v & = & \text{primitiva de } f(x) \end{array}$$

Exemplo 25 (★)
Mostre pelo método de integração por partes as seguintes fórmulas:

(a) $\displaystyle\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - x + K$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + K$

(c) $\displaystyle\int e^{ax} \cdot \cos(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Big(b\,\mathrm{sen}(bx) + a\cos(bx)\Big) + K$

(d) $\displaystyle\int e^{ax} \cdot \mathrm{sen}(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Big(a\,\mathrm{sen}(bx) - b\cos(bx)\Big) + K$

Solução:

(a) Aplicando o método integração por partes, escrevemos:

$$\begin{aligned} u &= \ln(x) & \mathrm{d}v &= dx \\ \mathrm{d}u &= \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x & v &= x \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \ln(x)\,\mathrm{d}x &= x\cdot\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln(x) - \int \mathrm{d}x \\ &= x\cdot\ln(x) - x + K. \end{aligned}$$

(b) Novamente, pelo método de integração por partes, temos:

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{arctg}(x) & \mathrm{d}v &= dx \\ \mathrm{d}u &= \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x & v &= x \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg}(x)\,\mathrm{d}x &= x\cdot\operatorname{arctg}(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= x\cdot\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + K, \end{aligned}$$

em que $\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ foi obtida pela mudança de variável $u = 1+x^2$ e $du = 2x\,\mathrm{d}x$.

(c) Pela integração por partes, tem-se

$$\begin{aligned} u &= e^{ax} & \mathrm{d}v &= \cos(bx)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &= ae^{ax}\,\mathrm{d}x & v &= \frac{1}{b}\operatorname{sen}(bx) \end{aligned}$$

onde

$$\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b}e^{ax}\cdot\operatorname{sen}(bx) - \frac{a}{b}\int e^{ax}\cdot\operatorname{sen}(bx)\,\mathrm{d}x.$$

Note que no segundo membro temos uma integral semelhante, exceto em vez de $\cos(bx)$ temos $\operatorname{sen}(bx)$. Então, aplicando novamente o método de integração por partes, para esta integral temos

$$\begin{aligned} \overline{u} &= e^{ax} & d\overline{v} &= \operatorname{sen}(bx)\,\mathrm{d}x \\ d\overline{u} &= ae^{ax}\,\mathrm{d}x & \overline{v} &= -\frac{1}{b}\cos(bx) \end{aligned}$$

onde

$$\int e^{ax}\cdot\operatorname{sen}(bx)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{b}e^{ax}\cdot\cos(bx) + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,\mathrm{d}x.$$

Substituindo essa expressão na igualdade precedente, temos:

$$\begin{aligned} \int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{b}e^{ax}\cdot\operatorname{sen}(bx) - \frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cdot\cos(bx) + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{b}e^{ax}\cdot\operatorname{sen}(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cdot\cos(bx) - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Levando ao primeiro membro a integral do segundo membro, obtemos a seguinte igualdade:

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,\mathrm{d}x = e^{ax}\left(\frac{1}{b}\operatorname{sen}(bx)+\frac{a}{b^2}\cos(bx)\right)+K$$

e portanto, temos que

$$\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Big(b\operatorname{sen}(bx)+a\cos(bx)\Big)+K.$$

(d) Obtém-se de modo análogo ao item (c).

Exemplo 26 (★ Integração de Potência de Funções Trigonométricas: Fórmula de Redução)
A integração por partes pode às vezes ser usada para obter fórmulas de redução para integrais. Utilizamos tais fórmulas para escrever uma integral que envolve potências de uma expressão, em termos de integrais que envolvem potências inferiores da mesma expressão. Veremos como estabelecer uma fórmula de redução para as integrais de potências de funções trigonométricas, dos tipos:

$$\int \operatorname{sen}^n(x)\,\mathrm{d}x,\ \int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x,\ \int \operatorname{tg}^n(x)\,\mathrm{d}x,\ \int \operatorname{cotg}^n(x)\,\mathrm{d}x,\ \int \sec^n(x)\,\mathrm{d}x,\ \int \operatorname{cossec}^n(x)\,\mathrm{d}x$$

que são:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\cos(x)\cdot\operatorname{sen}^{n-1}(x)+\frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\operatorname{sen}(x)\cdot\cos^{n-1}(x)+\frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1}(x)-\int \operatorname{tg}^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^n(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1}\operatorname{cotg}^{n-1}x-\int \operatorname{cotg}^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int \sec^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}(x)\cdot\operatorname{tg}(x)+\frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int \operatorname{cossec}^n(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1}\operatorname{cossec}^{n-2}(x)\cdot\operatorname{cotg}(x)+\frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{cossec}^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x$

Solução: Detalharemos somente o item (a), uma vez que os demais são análogos.

(a) Pela integração por partes, fazemos

$$\begin{array}{rclcrcl} u &=& \operatorname{sen}^{n-1}(x) & \qquad & \mathrm{d}v &=& \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &=& (n-1)\operatorname{sen}^{n-2}(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x & & v &=& -\cos(x) \end{array}$$

e integrando, temos

$$\int \operatorname{sen}^n x\,\mathrm{d}x = -\cos(x)\cdot\operatorname{sen}^{n-1}(x)+(n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\cdot\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$$

como $\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$, escrevemos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^n x\,\mathrm{d}x &= -\cos(x)\cdot\operatorname{sen}^{n-1}(x) + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\cdot(1-\operatorname{sen}^2(x))\,\mathrm{d}x\\ &= -\cos(x)\cdot\operatorname{sen}^{n-1}(x) + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x - (n-1)\int \operatorname{sen}^n(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

conseqüentemente

$$\int \operatorname{sen}^n(x)\,\mathrm{d}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^n(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)\cdot\operatorname{sen}^{n-1}(x) + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x$$

onde o membro esquerdo se reduz a $n\int \operatorname{sen}^n(x)\,\mathrm{d}x$, e dividindo ambos os membros por n, obtemos

$$\int \operatorname{sen}^n(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\cos(x)\cdot\operatorname{sen}^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

É evidente que, mediante aplicações reiteradas da fórmula (4), calculamos $\int \operatorname{sen}^n(x)\,\mathrm{d}x$ para qualquer inteiro positivo n, pois essas reduções sucessivas terminam em $\int \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int \mathrm{d}x$, ambas imediatamente integráveis.

Exemplo 27
Use uma das fórmulas de redução apresentadas no exemplo anterior, para determinar a integral $\int \operatorname{sen}^4(x)\,\mathrm{d}x$.

Solução: Usaremos a fórmula dada no item (a), com $n = 4$. Assim

$$\int \operatorname{sen}^4(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\cos(x)\cdot\operatorname{sen}^3(x) + \frac{3}{4}\int \operatorname{sen}^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aplicando a fórmula (4), com $n = 2$, para a integral à direita, temos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2(x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2}x + K,\end{aligned}$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{4}\cos(x)\cdot\operatorname{sen}^3(x) + \frac{3}{4}\int \operatorname{sen}^2(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{4}\cos(x)\cdot\operatorname{sen}^3(x) + \frac{3}{4}\left[-\frac{1}{2}\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2}x + K\right]\\ &= -\frac{1}{4}\cos(x)\cdot\operatorname{sen}^3(x) - \frac{3}{8}\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(x) + \frac{3}{8}x + K_1\end{aligned}$$

onde $K_1 = \frac{3}{4}K$.

Observação 13
Mais adiante, com auxílio das identidades trigonométricas fundamentais, desenvolveremos outro

método para integrais envolvendo potências de funções trigonométricas, de uma forma mais geral, como por exemplo $\int \cos^n(x) \cdot \operatorname{sen}^m(x)\, dx$, onde n e m são inteiros quaisquer.

4.2 Integração Trigonométrica

Algumas integrais envolvendo funções trigonométricas podem ser resolvidas usando identidades trigonométricas e o método da substituição.

Na seção de Integração por Partes (seção 4.1, página 20), obtivemos fórmulas de redução para integrais de potências do Seno, Cosseno, Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante. Integrais desse tipo podem ser calculadas sem recorrer à integração por partes e/ou às fórmulas de redução. Conforme n (a potência inteira) seja par ou ímpar podemos usar as identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1, \;\; \operatorname{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x), \;\; \operatorname{cotg}^2(x) + 1 = \operatorname{cossec}^2(x),$$

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \;\; \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

e o método de substituição, como veremos.

4.2.1 Integração de Potências do Seno e do Cosseno

1º Caso: Consideremos as integrais do tipo $\int \operatorname{sen}^n(x)\, dx$ ou $\int \cos^n(x)\, dx$.

(a) Se n é *inteiro positivo ímpar* escrevemos:

$$\int \operatorname{sen}^n(x)\, dx = \int \operatorname{sen}^{n-1}(x) \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx \text{ ou } \int \cos^n(x)\, dx = \int \cos^{n-1}(x) \cdot \cos(x)\, dx$$

Como $n - 1$ é par, podemos utilizar a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ e o método de substituição, para obtermos uma fórmula fácil de integração, tal como nos exemplos abaixo.

Exemplo 28
Resolva a integral dada por $\int \operatorname{sen}^5(x)\, dx$.

Solução: De acordo com a sugestão acima, escrevemos

$$\int \operatorname{sen}^5(x)\, dx = \int \operatorname{sen}^4(x) \operatorname{sen}(x)\, dx = \int \left(\operatorname{sen}^2(x)\right)^2 \operatorname{sen}(x)\, dx = \int \left(1 - \cos^2(x)\right)^2 \operatorname{sen}(x)\, dx.$$

Fazendo $u = \cos(x)$,$du = -\operatorname{sen}(x)\, dx$, substituindo na identidade acima temos:

$$\int \operatorname{sen}^5(x)\, dx = -\int (1-u)^2\, du = -\int (1 - 2u^2 + u^4)\, du = -u + \frac{2u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + K,$$

e portanto $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5(x)\, dx = -\cos(x) + \frac{2\cos^3(x)}{3} - \frac{\cos^5(x)}{5} + K.$

Exemplo 29
Resolva a integral dada por $\int \cos^7(x)\, dx$.

Solução: Como $\int \cos^7(x)\,dx = \int \cos^6(x)\cdot\cos(x)\,dx = \int \left(1 - sen^2(x)\right)^3 \cdot \cos(x)\,dx$, pela substituição $u = \operatorname{sen}(x)$, $du = \cos(x)\,dx$, temos

$$\begin{aligned}
\int \cos^7(x)\,dx &= \int (1-u^2)^3\,du = \int \left(1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6\right) du \\
&= u - u^3 + \frac{3u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + K \\
&= \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}^3(x) + \frac{3\operatorname{sen}^5(x)}{5} - \frac{\operatorname{sen}^7(x)}{7} + K
\end{aligned}$$

(b) Se n é *inteiro positivo par*, então podemos aplicar a fórmula de ângulo metade para simplificar a integral, a saber:

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \quad \text{ou} \quad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Exemplo 30
Calcule $\int \cos^2(x)\,dx$.

Solução: $\int \cos^2(x)\,dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx = \ldots$

Exemplo 31
Calcule $\int \operatorname{sen}^4(x)\,dx$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4(x)\,dx &= \int \left(\operatorname{sen}^2(x)\right)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int 2\cos(2x)\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos(4x)}{2}\,dx \\
&= \ldots
\end{aligned}$$

2º Caso: Diretrizes para calcular $\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\,dx$.

(a) Se m é *ímpar*, escrevemos

$$\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\,dx = \int \operatorname{sen}^{m-1}(x)\operatorname{sen}(x)\cos^n(x)\,dx$$

e expressamos $\operatorname{sen}^{m-1}(x)$ em termos de $\cos(x)$ mediante a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$. E fazemos a substituição $u = \cos(x)$, $du = -\operatorname{sen}(x)\,dx$ e calculamos a integral.

(b) Se n é *ímpar*, escrevemos

$$\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\,dx = \int \operatorname{sen}^m(x)\cos^{n-1}(x)\cos(x)\,dx$$

e expressamos $\cos^{n-1}(x)$ em termos de $\operatorname{sen}(x)$ mediante a identidade trigonométrica $\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$. E fazemos a substituição $u = \operatorname{sen}(x)$, $du = \cos(x)\,dx$ e calculamos a integral.

(c) Se pelo menos um dos expoentes for ímpar, o procedimento é semelhante aos itens (a) e (b) acima.

(d) Se m e n são *pares* utilizamos fórmulas de ângulo metade para $\text{sen}^2(x)$ e $\cos^2(x)$, que são

$$\text{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \quad \text{e} \quad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

para reduzir os expoentes.

Exemplo 32
Determine (a) $\displaystyle\int \text{sen}^3(x)\cos^4(x)\,dx$ e (b) $\displaystyle\int \text{sen}^2(x)\cdot\cos^4(x)\,dx$.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}\int \text{sen}^3(x)\cos^4(x)\,dx &= \int \text{sen}^2(x)\cdot\text{sen}(x)\cdot\cos^4(x)\,dx\\ &= \int (1-\cos^2(x))\cdot\text{sen}(x)\cdot\cos^4(x)\,dx\\ &= \int \text{sen}(x)\cdot\cos^4(x)\,dx - \int \text{sen}(x)\cdot\cos^6(x)\,dx\end{aligned}$$

Fazendo $u=\cos(x)$, temos $du = -\text{sen}(x)\,dx$ e então

$$\begin{aligned}\int \text{sen}^3(x)\cos^4(x)\,dx &= \int \text{sen}(x)\cdot\cos^4(x)\,dx - \int \text{sen}(x)\cdot\cos^6(x)\,dx\\ &= -\int u^4du + \int u^6du = -\frac{u^5}{5}+\frac{u^7}{7}+K\\ &= -\frac{\cos^5(x)}{5}+\frac{\cos^7(x)}{7}+K\end{aligned}$$

(b)

$$\int \text{sen}^2(x)\cdot\cos^4(x)\,dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \ldots$$

4.2.2 Integração de Potências das demais Funções Trigonométricas

Veremos como resolver algumas integrais de potências da Tangente, da Cotangente, da Secante e da Cossecante. Primeiramente, relembremos algumas fórmulas envolvendo tangente, cotangente, secante e cossecante:

$$\int \text{tg}(x)\,dx = \ln|\sec(x)|+K \qquad \int \text{cotg}(x)\,dx = \ln|\text{sen}(x)|+K$$
$$\int \sec(x)\,dx = \ln|\sec(x)+\text{tg}(x)|+K \qquad \int \text{cossec}(x)\,dx = \ln|\text{cossec}(x)-\text{cotg}(x)|+K$$
$$\int \sec^2(x)\,dx = \text{tg}(x)+K \qquad \int \text{cossec}^2(x)\,dx = -\text{cotg}(x)+K$$
$$\int \sec(x)\,\text{tg}(x)\,dx = \sec(x)+K \qquad \int \text{cossec}(x)\,\text{cotg}(x)\,dx = -\text{cossec}(x)+K$$

Com essas fórmulas e as identidades trigonométricas

$$\operatorname{tg}^2(x)+1=\sec^2(x) \quad \text{ou} \quad \operatorname{cotg}^2(x)+1=\operatorname{cossec}^2(x)$$

podemos calcular integrais da forma

$$\int \operatorname{tg}^m(x)\sec^n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int \operatorname{cotg}^m(x)\operatorname{cossec}^n(x)\,\mathrm{d}x$$

em que m e n são inteiros não negativos.

1º Caso: Consideremos as integrais do tipo $\int \operatorname{tg}^n(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int \operatorname{cotg}^n(x)\,\mathrm{d}x$

Se n é *inteiro positivo* escrevemos:

$$\int \operatorname{tg}^n(x)\,\mathrm{d}x=\int \operatorname{tg}^{n-2}(x)\cdot \operatorname{tg}^2(x)\,\mathrm{d}x=\int \operatorname{tg}^{n-2}(x)\cdot\big(\sec^2(x)-1\big)\,\mathrm{d}x$$

e

$$\int \operatorname{cotg}^n(x)\,\mathrm{d}x=\int \operatorname{cotg}^{n-2}(x)\cdot \operatorname{cotg}^2(x)\,\mathrm{d}x=\int \operatorname{cotg}^{n-2}(x)\cdot\big(\operatorname{cossec}^2(x)-1\big)\,\mathrm{d}x.$$

Com o método de substituição, obtemos uma fórmula fácil de integração, tal como nos exemplos abaixo.

Exemplo 33
Determine (a) $\int \operatorname{tg}^3(x)\,\mathrm{d}x$ e (b) $\int \operatorname{cotg}^4(3x)\,\mathrm{d}x$.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^3(x)\,\mathrm{d}x &= \int \operatorname{tg}(x)\cdot\operatorname{tg}^2(x)\,\mathrm{d}x=\int \operatorname{tg}(x)\cdot\big(\sec^2(x)-1\big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int \operatorname{tg}(x)\cdot\sec^2(x)\,\mathrm{d}x-\int \operatorname{tg}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(x)+\ln|\cos(x)|+K\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \operatorname{cotg}^4(3x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int \operatorname{cotg}^4(u)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\int \operatorname{cotg}^2(u)\cdot\operatorname{cotg}^2(u)\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{3}\int \operatorname{cotg}^2(u)\cdot\big(\operatorname{cossec}^2(u)-1\big)\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{3}\int \operatorname{cotg}^2(u)\cdot\operatorname{cossec}^2(u)\,\mathrm{d}u-\frac{1}{3}\int \operatorname{cotg}^2(u)\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\big(-\operatorname{cotg}^3(u)\big)-\frac{1}{3}\int\big(\operatorname{cossec}^2(u)-1\big)\,\mathrm{d}u\\ &= -\frac{1}{9}\operatorname{cotg}^3(3x)+\frac{1}{3}\operatorname{cotg}(3x)+x+K\end{aligned}$$

2º Caso: Consideremos as integrais do tipo $\int \sec^n(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int \operatorname{cossec}^n(x)\,\mathrm{d}x$

(a) Se n é um *inteiro positivo par*, escrevemos

$$\begin{aligned}\int \sec^n(x)\,\mathrm{d}x &= \int \sec^{n-2}(x)\cdot\sec^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\sec^2(x)\right)^{\frac{n-2}{2}}\cdot\sec^2(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int \left(\operatorname{tg}^2(x)+1\right)^{\frac{n-2}{2}}\cdot\sec^2(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int \operatorname{cossec}^n(x)\,\mathrm{d}x &= \int \operatorname{cossec}^{n-2}(x)\cdot\operatorname{cossec}^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\operatorname{cossec}^2(x)\right)^{\frac{n-2}{2}}\cdot\operatorname{cossec}^2(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int \left(\operatorname{cotg}^2(x)+1\right)^{\frac{n-2}{2}}\cdot\operatorname{cossec}^2(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Com a substituição $u = \operatorname{tg}(x)$ (e $u = \operatorname{cotg}(x)$) obtemos uma fórmula fácil de integração.

Exemplo 34
Determine $\int \operatorname{cossec}^6(x)\,\mathrm{d}x$.

Solução:

$$\int \operatorname{cossec}^6(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\operatorname{cossec}^2(x)\right)^2\cdot\operatorname{cossec}^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\operatorname{cotg}^2(x)+1\right)^2\cdot\operatorname{cossec}^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Pela substituição $u = \operatorname{cotg}(x)$ e $-du = \operatorname{cossec}^2(x)\,\mathrm{d}x$, temos

$$\int \operatorname{cossec}^6(x)\,\mathrm{d}x = -\int \left(u^2+1\right)^2 du = \ldots$$

(b) Se n é *inteiro positivo impar*, utilizamos a integração por partes.

Exemplo 35
Determine $\int \sec^3(x)\,\mathrm{d}x$.

Solução: Integraremos por partes $\sec^3(x)$. Como $\int \sec^3(x)\,\mathrm{d}x = \int \sec(x)\cdot\sec^2(x)\,\mathrm{d}x$, podemos escolher $u = \sec(x)$ e $dv = \sec^2(x)\,\mathrm{d}x$. Assim, $du = \sec(x)\cdot\operatorname{tg}(x)\,\mathrm{d}x$ e $v = \operatorname{tg}(x)$. Logo,

$$\begin{aligned}\int \sec^3(x)\,\mathrm{d}x &= \sec(x)\cdot\operatorname{tg}(x) - \int \sec(x)\cdot\operatorname{tg}^2(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sec(x)\cdot\operatorname{tg}(x) - \int \sec(x)\cdot\left(\sec^2(x)-1\right)\mathrm{d}x\\ &= \sec(x)\cdot\operatorname{tg}(x) - \int \sec^3(x)\,\mathrm{d}x + \int \sec(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sec(x)\cdot\operatorname{tg}(x) + \ln|\sec(x)+\operatorname{tg}(x)| - \int \sec^3(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Portanto $2\int \sec^3(x)\,\mathrm{d}x = \sec(x)\cdot\operatorname{tg}(x) + \ln|\sec(x)+\operatorname{tg}(x)| + 2K$, e finalmente:

$$\int \sec^3(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec(x)\cdot\operatorname{tg}(x) + \frac{1}{2}\ln|\sec(x)+\operatorname{tg}(x)| + K.$$

3º Caso: Consideremos as integrais do tipo $\int \mathrm{tg}^m(x)\cdot\sec^n(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int \mathrm{cotg}^m(x)\cdot\mathrm{cossec}^n(x)\,\mathrm{d}x$

(a) Se m é *ímpar*, escrevemos a integral como

$$\int \mathrm{tg}^m(x)\cdot\sec^n(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{tg}^{m-1}(x)\cdot\sec^{n-1}\sec(x)\cdot\mathrm{tg}(x)\,\mathrm{d}x$$

e expressamos $\mathrm{tg}^{m-1}(x)$ em termos de $\sec(x)$ mediante a identidade trigonométrica $\mathrm{tg}^2(x) = \sec^2(x)-1$. E fazemos a substituição $u=\sec(x)$, $du=\sec(x)\cdot\mathrm{tg}(x)\,\mathrm{d}x$ e calculamos a integral.

(b) Se n é *ímpar*, escrevemos a integral como

$$\int \mathrm{tg}^m(x)\sec^n(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{tg}^m(x)\sec^{n-2}(x)\sec^2(x)\,\mathrm{d}x$$

e expressamos $\sec^{n-2}(x)$ em termos de $\mathrm{tg}(x)$ mediante a identidade trigonométrica $\sec^2(x) = 1+\mathrm{tg}^2(x)$. E fazemos a substituição $u=\mathrm{tg}(x)$, $du=\sec^2(x)\,\mathrm{d}x$ e calculamos a integral.

(c) (c) Se m é *par* e n é *impar* não há método padrão para o cálculo da integral. Essa pode ser resolvida por integração por partes.

Observação 14
De modo análogo são calculadas as integrais da forma $\int \mathrm{cotg}^m(x)\,\mathrm{cossec}^n(x)\,\mathrm{d}x$

Exemplo 36
Determine (a) $\int \mathrm{tg}^5(x)\sec^7(x)\,\mathrm{d}x$ e (b) $\int \mathrm{tg}^2(x)\sec^3(x)\,\mathrm{d}x$.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}\int \mathrm{tg}^5(x)\sec^7(x)\,\mathrm{d}x &= \int \mathrm{tg}^4(x)\cdot\sec^6(x)\cdot\sec(x)\cdot\mathrm{tg}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int \left(\sec^2(x)-1\right)^2\cdot\sec^6(x)\cdot\sec(x)\cdot\mathrm{tg}(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Com $u=\sec(x)$ temos $du=\sec(x)\cdot\mathrm{tg}(x)\,\mathrm{d}x$, e então

$$\int \mathrm{tg}^5(x)\sec^7(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(u^2-1\right)^2 u^6\,\mathrm{d}u = \ldots$$

(b)

$$\int \mathrm{tg}^2(x)\sec^3(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\sec^2(x)-1\right)\cdot\sec^3(x)\,\mathrm{d}x = \int \sec^5(x)\,\mathrm{d}x - \int \sec^3(x)\,\mathrm{d}x$$

Para calcular essas duas últimas integrais, usa-se integração por partes. FAÇA!

4.2.3 Integrais Envolvendo Produtos

As integrais trigonométricas que envolvem os produtos

$$\cos(mx)\cdot\cos(nx);\qquad \mathrm{sen}(mx)\cdot\mathrm{sen}(nx)\quad \text{ou}\quad \cos(mx)\cdot\mathrm{sen}(nx)$$

são facilmente resolvidas quando utilizamos as fórmulas de soma-produto, a saber:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(a)\cos(b) &= \dfrac{1}{2}\Big(\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)\Big); \\ \cos(a)\operatorname{sen}(b) &= \dfrac{1}{2}\Big(\operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(a-b)\Big); \\ \cos(a)\cos(b) &= \dfrac{1}{2}\Big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\Big); \\ \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) &= \dfrac{1}{2}\Big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\Big). \end{cases}$$

que são facilmente obtidas pelas fórmulas do seno e cosseno da soma,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen}(a)\cos(b)+\cos(a)\operatorname{sen}(b), \\ \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b)-\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b). \end{aligned}$$

Exemplo 37
Determine $\displaystyle\int \operatorname{sen}(3x)\cos(4x)\,\mathrm{d}x$.

Solução:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}(3x)\cos(4x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen}(3x+4x)+\operatorname{sen}(3x-4x))\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(7x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x = \ldots \end{aligned}$$

4.3 Integrais do tipo: $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$ e $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$

Faremos a discussão em 4 casos, que são:

Caso 1. $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$

Caso 2. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$

Caso 3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$

Caso 4. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$

Caso 1: $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$

Transformamos, primeiramente, o denominador pondo-o sob a forma de uma soma ou de uma diferença de quadrados, completando quadrado, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] = a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right], \text{ em que } \quad \Delta = b^2-4ac. \end{aligned}$$

Temos que $4a^2$ é sempre maior do que zero, no entanto precisamos olhar para $\Delta = b^2-4ac$. Então

(i) Se $\Delta < 0$, então $-\Delta > 0$, fazendo $k^2 = -\dfrac{\Delta}{4a^2}$ temos

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k^2\right]}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k^2}\,\mathrm{d}x.$$

Pela mudança de variável $u = x + \frac{b}{2a}$ e $du = \mathrm{d}x$, e pelo Exemplo (★) 21(b) temos

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u^2+k^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{k}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{k}\right) + C.$$

(ii) Se $\Delta > 0$, então $-\Delta < 0$, fazendo $k^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$ temos

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-k^2\right]}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-k^2}\,\mathrm{d}x.$$

Pela mudança de variável $u = x + \frac{b}{2a}$ e $du = \mathrm{d}x$, e pelo Exemplo (★) 21(e) temos

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u^2-k^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2k}\cdot \ln\left|\frac{u-k}{u+k}\right| + C.$$

(iii) Se $\Delta = 0$, então

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}\,\mathrm{d}x,$$

e pela mudança de variável $u = x + \frac{b}{2a}$ e $du = \mathrm{d}x$, temos

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{au} + C.$$

Exemplo 38

Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+8x+20}\,\mathrm{d}x.$

Solução: Notemos primeiramente que $2x^2+8x+20 = 2(x^2+4x+10)$. Assim

$$x^2+4x+10 = (x^2+4x+4)+10-4 = (x+2)^2+6,$$

e então

$$\int \frac{1}{2x^2+8x+10}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+2)^2+6}\,\mathrm{d}x.$$

Pela mudança de variável $u = x+2$ e $du = dx$ temos

$$\int \frac{1}{2x^2+8x+20}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+6}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{6}}\right) + K = \frac{1}{2\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + K.$$

Caso 2: $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$

Como

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = A\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x + B\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$$

precisamos calcular apenas a primeira integral do lado direito, visto que, acabamos de resolver integral do tipo da segunda.

Observe, que se $u = ax^2 + bx + c$ então $du = (2ax + b)\,\mathrm{d}x$. Assim

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2a}\int \frac{2ax+b-b}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x - \frac{b}{2a}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

A primeira integral do segundo membro, é facilmente calculada pela mudança de variável $u = ax^2 + bx + c$ e $du = (2ax + b)\,\mathrm{d}x$, deste modo

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + K_1 = \ln|ax^2+bx+c| + K_1.$$

Voltando à integral precedente, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x &= A\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x + B\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{A}{2a}\left[\ln|ax^2+bx+c| + K_1 - b\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x\right] + B\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\\ &= \frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx + K,\end{aligned}$$

em que, $K = \frac{A}{2a}K_1$.

Exemplo 39
Calcule a seguinte integral $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}\,\mathrm{d}x$.

Solução: Como

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{x^2-2x-5}\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{x^2-2x-5}\,\mathrm{d}x,$$

resolvendo a primeira integral do lado direito, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2-2x-5}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+2}{x^2-2x-5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x-5}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2-2x-5}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + \int \frac{1}{x^2-2x-5}\,\mathrm{d}x + K_1.\end{aligned}$$

Agora, como

$$\int \frac{1}{x^2-2x-5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x^2-2x+1)-1-5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-1)^2-6}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(x-1)-\sqrt{6}}{(x-1)+\sqrt{6}}\right| + K_2,$$

temos finalmente

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x}{x^2-2x-5}\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{x^2-2x-5}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + K_1 + 4\int \frac{1}{x^2-2x-5} \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + K_1 + \frac{4}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(x-1)-\sqrt{6}}{(x-1)+\sqrt{6}}\right| + 4K_2 \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + \frac{\sqrt{6}}{3}\ln\left|\frac{x-(1+\sqrt{6})}{x-1+\sqrt{6}}\right| + K,
\end{aligned}$$

em que $K = K_1 + 4K_2$.

Caso 3: $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$

Com ajuda da mudança de variável indicada no Caso 1, essa integral reduz a uma integral do tipo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 \pm k^2}}\,\mathrm{d}u, \text{ se } a > 0 \quad \text{ou} \quad \int \frac{1}{\sqrt{k^2-u^2}}\,\mathrm{d}u, \text{ se } a < 0$$

que são facilmente calculadas com auxílio das fórmulas dadas no Exemplo(★) 21(a) e (d).

Exemplo 40
Calcule a seguinte integral $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{\ln^2(x)+2\ln(x)+5}}\,dx$.

Solução: Pela mudança de variável $u = \ln(x)$ e $du = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, temos

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln^2(x)+2\ln(x)+5}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{u^2+2u+5}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{\sqrt{(u+1)^2+4}}\,\mathrm{d}u.$$

Novamente, mudando variável, agora, $t = u+1$ e $dt = \mathrm{d}u$, temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{(u+1)^2+4}}\,\mathrm{d}u &= \int \frac{1}{\sqrt{t^2+4}}\,\mathrm{d}t = \ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right| + K = \ln\left|(u+1)+\sqrt{(u+1)^2+4}\right| + K \\
&= \ln\left|\ln(x)+1+\sqrt{(\ln(x)+1)^2+4}\right| + K.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln^2(x)+2\ln(x)+5}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\ln(x)+1+\sqrt{(\ln(x)+1)^2+4}\right| + K$$

Caso 4: $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$

Calculamos integrais deste tipo, usando transformações análogas às consideradas no Caso 2, pois:
$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = A\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + B\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$
onde que a segunda integral do lado direito é justamente do caso imediatamente anterior a este. Então
$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx &= \frac{1}{2a}\int \frac{2ax+b-b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx\\ &= \frac{1}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx - \frac{b}{2a}\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx\end{aligned}$$
e assim,
$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + \left(B-\frac{b}{2a}\right)\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$$
Com a mudança de variável $u = ax^2+bx+c$ e $du = (2ax+b)\,dx$, calculamos
$$\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = 2\sqrt{u}+K_1 = 2\sqrt{ax^2+bx+c}+K_1.$$
Portanto,
$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(B-\frac{b}{2a}\right)\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + K,$$
em que $K = \dfrac{A}{a}K_1$.

Exemplo 41
Calcule $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\sqrt{2+\cos(x)-\cos^2(x)}}\,dx$.

Solução: Inicialmente, pela seguinte mudança de variável $u=\cos(x)$ e $du = -\operatorname{sen}(x)\,dx$, e do fato que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$, temos
$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\sqrt{2+\cos(x)-\cos^2(x)}}\,dx &= \int \frac{-2u}{\sqrt{2+u-u^2}}\,du = \int \frac{-2u+1-1}{\sqrt{2+u-u^2}}\,du\\ &= \int \frac{-2u+1}{\sqrt{2+u-u^2}}\,du - \int \frac{1}{\sqrt{2+u-u^2}}\,du.\end{aligned}$$
Para a primeira integral do lado direito, fazemos $t = 2+u-u^2$ e $dt = (-2u+1)\,du$, onde que
$$\begin{aligned}\int \frac{-2u+1}{\sqrt{2+u-u^2}}\,du &= \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2\sqrt{t}+K_1 = 2\sqrt{2+u-u^2}+K_1\\ &= 2\sqrt{2+\cos(x)-\cos^2(x)}+K_1.\end{aligned}$$
Para a segunda integral, escrevemos
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{2+u-u^2}}\,du &= \int \frac{1}{\sqrt{-(u^2-u-2)}}\,du = \int \frac{1}{\sqrt{-(u^2-u+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2)}}\,du\\ &= \int \frac{1}{\sqrt{-\left[\left(u-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]}}\,du = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(u-\frac{1}{2}\right)^2}}\,du,\end{aligned}$$

fazendo $v = u - \frac{1}{2}$ e $\mathrm{d}v = \mathrm{d}u$, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{2+u-u^2}}\,\mathrm{d}u &= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}-v^2}}\,\mathrm{d}v = \operatorname{arcsen}\left(\frac{v}{3/2}\right) + K_2 \\ &= \operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{3}v\right) + K_2 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{3}\left(u - \frac{1}{2}\right)\right) + K_2 \\ &= \operatorname{arcsen}\left(\frac{2\cos(x)-1}{3}\right) + K_2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\sqrt{2+\cos(x)-\cos^2(x)}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{-2u+1}{\sqrt{2+u-u^2}}\,du - \int \frac{1}{\sqrt{2+u-u^2}}\,\mathrm{d}u \\ &= 2\sqrt{2+\cos(x)-\cos^2(x)} + K - \operatorname{arcsen}\left(\frac{2\cos(x)-1}{3}\right) + K,\end{aligned}$$

em que $K = K_1 - K_2$.

4.4 Integrais de Funções Racionais

Definição 3
Uma *função racional* é uma função da forma $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ em que $p(x)$ e $q(x)$ são funções polinomiais. As funções racionais podem ser classificadas em próprias ou impróprias. Dizemos que uma função racional f é *própria* se $\mathrm{gr}(p) < \mathrm{gr}(q)$, caso contrário, isto é, se $\mathrm{gr}(p) \geq \mathrm{gr}(q)$ dizemos que f é *imprópria*.

Exemplo 42
São funções racionais próprias: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2x^3-3x^2+x-1}$ e $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2-3x+1}$. Enquanto que, as funções $h(x) = \dfrac{x^2-1}{1-x-3x^2}$ e $p(x) = \dfrac{x^3-8}{x^2+1}$ são funções racionais impróprias.

4.4.1 Integrais de Funções Racionais Impróprias

Seja $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ uma função racional imprópria. Assim, temos que $\mathrm{gr}(p) \geq \mathrm{gr}(q)$, e então podemos dividir $p(x)$ por $q(x)$ e obtermos um quociente $Q(x)$ e um resto $R(x)$, em que $\mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(q)$. Em símbolos, escrevemos:

$$p(x) = q(x) \cdot Q(x) + R(x).$$

Desta forma, procedemos da seguinte forma para o cálculo da integral:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{q(x)\cdot Q(x) + R(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{q(x)\cdot Q(x)}{q(x)} + \int \frac{R(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int Q(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{R(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Como $\mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(q)$, observemos o seguinte:

Observação 15
Para o cálculo da integral de uma função racional imprópria, dividindo-se o numerador pelo denominador, escreve-se a função como soma de uma função polinomial e uma função racional própria.

Exemplo 43
Calcule $\int \frac{2x^2+2x+1}{x^2+1}$.

Solução: Para obter a integral da função $f(x) = \frac{2x^2+2x+1}{x^2+1}$, dividimos os polinômios $p(x) = 2x^2+2x+1$ e $q(x) = x^2+1$, e escrevemos

$$p(x) = 2x^2+2x+1 = 2(x^2+1)+2x-1.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+2x+1}{x^2+1}\,dx &= \int \frac{2(x^2+1)+2x-1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{2(x^2+1)}{x^2+1} + dx \int \frac{2x-1}{x^2+1}\,dx \\ &= \int 2\,dx + \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= 2x + \ln(x^2+1) - \operatorname{arctg}(x) + K.\end{aligned}$$

Vimos assim, que o cálculo da integral de funções racionais resume-se em obter integrais para funções racionais próprias.

4.4.2 Integrais de Funções Racionais Próprias: Método da Decomposição em Frações Parciais

O *Método da Decomposição em Frações Parciais* consiste em escrever uma função racional própria como soma de frações parciais que dependem, principalmente, da fatoração do denominador da função racional em $\mathbb{R}$.

Seja $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ uma função racional própria, isto é, $\operatorname{gr}(p) < \operatorname{gr}(q)$, então

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = F_1 + F_2 + \ldots + F_r$$

em que cada F_k $(k = 1, \ldots r)$ tem uma das formas $\frac{A}{(ax+b)^n}$ ou $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$.

A soma $F_1 + F_2 + \ldots + F_r$ é a *decomposição em frações parciais* de $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ e F_k é uma fração parcial.

Exemplo 44
Se $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$ podemos expressar $\frac{2}{x^2-1}$ como $\frac{2}{(x+1)(x-1)}$, ou ainda $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$. A última expressão é a decomposição em frações parciais de $\frac{2}{x^2-1}$.

Desta forma, para obter $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$, integramos cada uma das frações que constituem a decomposição, obtendo

$$\int \frac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x-1| - \ln|x+1| + K = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + K.$$

Observação 16
Afirmamos que toda função racional possui uma decomposição em frações parciais. Uma demonstração deste fato, encontra-se no capítulo II do livro "Álgebra: Um Curso de Introdução" de Arnaldo Garcia e Yves Lequain, publicado pelo IMPA.

Diretrizes para a Decomposição em Soma de Frações Parciais

Seja $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ uma função racional própria. Veremos quatro casos, nos dois primeiros, $q(x)$ é decomposta em fatores lineares; e nos dois últimos, $q(x)$ é decomposta em fatores lineares e quadráticos.

(1) Os fatores de $q(x)$ são **todos lineares** e **nenhum repetido**, isto é,

$$q(x) = (a_1x+b_1)\cdot(a_2x+b_2)\cdot\ \cdots\ \cdot(a_nx+b_n)$$

em que não há fatores idênticos. Neste caso escrevemos:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n},$$

em que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são constantes reais a serem determinadas.

Exemplo 45
Seja $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3-x^2-2x}$, calcular $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Solução: Fatorando o denominador temos que $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3-x^2-2x} = \dfrac{x-1}{x(x-2)(x+1)}$. Desta forma,

$$\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1},$$

equivalentemente a $x-1 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$. Agora, eliminando os parênteses no segundo membro e agrupando os termos de mesmo grau, obtemos:

$$x-1 = (A+B+C)x^2 + (-A+B-2C)x - 2A$$

Temos assim, uma identidade de polinômios na variável x e sabemos que, para que isto ocorra, os coeficientes dos termos de mesmo grau nos dois membros devem ser iguais. Daí, temos o seguinte sistema nas incógnitas A, B e C:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} A & +B & +C & = & 0 \\ -A & +B & -2C & = & 1 \\ -2A & & & = & -1 \end{array}\right.$$

cuja solução é $A = \dfrac{1}{2}$, $B = \dfrac{1}{6}$ e $C = -\dfrac{2}{3}$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{2x} + \frac{2}{6(x-2)} - \frac{2}{3(x+1)}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{6}\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x - \frac{2}{3}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln|x+1| + K = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^3(x-2)}{(x+1)^4}\right| + K.\end{aligned}$$

Observação 17

Uma outra maneira de determinar as constantes A, B e C é, substituindo na identidade $x-1 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$, valores convenientes para x (neste caso, escolheríamos $x = 0$, $x = 2$ e $x = -1$), já que uma identidade é verdadeira para quaisquer valores de x para os quais ela exista. ***Verifique!***

Exemplo 46

Integrando por frações parciais, mostre que

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + K.$$

Solução: Escrevendo a fração do integrando como soma de frações parciais, temos:

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}.$$

Ou ainda, temos $1 = A(x+a) + B(x-a) = (A+B)x + Aa - Ba$. Da igualdade entre polinômios, temos o seguinte sistema, nas incógnitas A e B:

$$\begin{cases} A + B &= 0 \\ Aa - Ba &= 1 \end{cases}$$

donde, $a = \dfrac{1}{2a}$ e $B = -\dfrac{1}{2a}$. Portanto

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B}{x+a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x+a}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + K.\end{aligned}$$

Observação 18

Analogamente, mostra-se que

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + K.$$

(2) Os fatores de $q(x)$ são **todos lineares** e **alguns repetidos**. Suponha que $(a_i x + b_i)$ seja um fator repetido que se repete p vezes. Então, correspondendo a esse fator haverá a soma de p frações parciais

$$\frac{A_1}{a_i x + b_i} + \frac{A_2}{(a_i x + b_i)^2} + \cdots + \frac{A_{p-1}}{(a_i x + b_i)^{p-1}} + \frac{A_p}{(a_i x + b_i)^p}$$

em que $A_1, A_2, \ldots, A_p$ são constantes reais a serem determinadas.

Exemplo 47
Calcular a integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x^3+3x-1}{x^4-4x^2}\,\mathrm{d}x$.

Solução: Fatorando o denominador, obtemos $x^4-4x^2 = x^2(x+2)(x-2)$, de onde temos que -2 e 2 são raízes simples e 0 é raiz dupla deste polinômio. Assim, na decomposição do integrando em frações parciais, corresponderá a este fator uma soma de 2 frações parciais, com denominador x, com expoentes variando de 1 a 2. Deste modo, escrevemos integrando como segue:

$$\frac{x^3+3x-1}{x^4-4x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}.$$

Eliminando os denominadores temos

$$x^3+3x-1 = A_1x(x+2)(x-2) + A_2(x+2)(x-2) + Bx^2(x-2) + Cx^2(x+2).$$

Eliminando os parênteses e agrupando os termos de mesmo grau, obtemos:

$$x^3+3x-1 = (A_1+B+C)x^3 + (A_2-2B+2C)x^2 + (-4A_1)x - 4A_2.$$

Da igualdade polinomial acima, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A_1 & & +B & +C & = & 1 \\ & A_2 & -2B & +2C & = & 0 \\ -4A_1 & & & & = & 3 \\ & -4A_2 & & & = & -1 \end{cases}$$

cuja solução é $A_1 = -\frac{3}{4}$, $A_2 = \frac{1}{4}$, $B = \frac{15}{16}$ e $C = \frac{13}{16}$. Portanto,

$$\frac{x^3+3x-1}{x^4-4x^2} = \frac{-\frac{3}{4}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{15}{16}}{x+2} + \frac{\frac{13}{16}}{x-2}$$

Finalmente, temos a integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+3x-1}{x^4-4x^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{3}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \frac{15}{16}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+2} + \frac{13}{16}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-2} \\ &= -\frac{3}{4}\ln|x| + \frac{1}{4}\frac{x^{-1}}{(-1)} + \frac{15}{16}\ln|x+2| + \frac{13}{16}\ln|x-2| + K \\ &= -\frac{3}{4}\ln|x| - \frac{1}{4x} + \frac{15}{16}\ln|x+2| + \frac{13}{16}\ln|x-2| + K \end{aligned}$$

ou ainda, utilizando propriedades dos logaritmos,

$$\int \frac{x^3+3x-1}{x^4-4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{(x+2)^{15}(x-2)^{13}}{x^{12}}\right| - \frac{1}{4x} + K.$$

Exemplo 48
Calcular $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$, em que $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2(x-2)^3}$.

Solução: Note que dois fatores lineares se repetem: x duas vezes, e $x-2$ três vezes. Assim, a fração do integrando pode ser escrita como soma de frações parciais da seguinte forma:

$$\frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3} = \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_1}{x} + \frac{B_3}{(x-2)^3} + \frac{B_2}{(x-2)^2} + \frac{B_1}{x-2},$$

ou ainda, $x^3 - 1 = A_2(x-2)^3 + A_1 x(x-2)^3 + A_3 x^2 + B_2 x^2(x-2) + B_1 x^2 (x-2)^2$. Pela igualdade entre funções polinomiais temos que:

$$A_2 = \frac{1}{8},\ \ A_1 = \frac{3}{16},\ \ B_3 = \frac{7}{4},\ \ B_2 = \frac{5}{4}\ \text{ e }\ B_1 = -\frac{3}{116}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{8}\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{16}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{7}{4}\int \frac{1}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}x + \frac{5}{4}\int \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x - \frac{3}{116}\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{8x} + \frac{3}{16}\ln|x| - \frac{7}{8(x-2)^2} - \frac{5}{4(x-2)} - \frac{3}{116}\ln|x-2| + K.\end{aligned}$$

(3) Os fatores de $q(x)$ são **quadráticos irredutíveis**, e **nenhum fator quadrático é repetido**. Correspondendo ao fator quadrático $ax^2 + bx + c$ no denominador, temos uma fração parcial da forma:

$$\frac{Ax+b}{ax^2+bx+c}.$$

Exemplo 49
Calcular $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, em que $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)}$.

Solução: Primeiramente, $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$, $\forall\, x$, ou seja, o trinômio é irredutível. Assim, a fração do integrando pode ser escrita como soma de frações parciais da seguinte forma:

$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{C}{x-1},$$

ou ainda, $x^2 - 2x + 3 = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+2x+2)$. Desenvolvendo, e igualando os polinômios, obtemos:

$$A = \frac{9}{5},\ \ B = \frac{7}{5}\ \text{ e }\ C = -\frac{4}{5}.$$

Portanto,

$$\int \frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{5}\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x + \frac{7}{5}\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x - \frac{4}{5}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$$

Para integrar $\int \dfrac{x}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$, percebamos que a diferencial do denominador é $2(x+1)\,\mathrm{d}x$. Assim, se somarmos e subtrairmos 1 no numerador, obteremos

$$\frac{9}{5}\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{5}\left(\frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x\right).$$

Retornando a nossa integral, temos:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x &= \frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2(x+1)\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}-\frac{2}{5}\int\frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x-\frac{4}{5}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}\\ &= \frac{9}{10}\int\frac{2(x+1)\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}-\frac{2}{5}\int\frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x-\frac{4}{5}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}\\ &= \frac{9}{10}\ln|x^2+2x+2|-\frac{2}{5}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{4}{5}\ln|x-1|+K\\ &= \ln\frac{\sqrt[10]{(2x^2+2x+2)^9}}{\sqrt[5]{(x-1)^4}}-\frac{2}{5}\operatorname{arctg}(x+1)+K.\end{aligned}$$

(4) Os fatores de $q(x)$ são **quadráticos irredutíveis**, e alguns dos **fatores quadráticos são repetidos**. Se ax^2+bx+c for um fator quadrático no denominador que se repete p vezes, então correspondendo ao fator $(ax^2+bx+c)^p$, teremos a soma das p frações parciais:

$$\frac{A_px+B_p}{(ax^2+bx+c)^p}+\frac{A_{p-1}x+B_{p-1}}{(ax^2+bx+c)^{p-1}}+\cdots+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c},$$

em que $A_1, A_2, \ldots, A_p$ e $B_1, B_2, \ldots, B_p$ são constantes reais a serem determinadas.

Exemplo 50
Calcular $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, em que $f(x)=\dfrac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2}$.

Solução: Como x^2-4x+5 é um trinômio irredutível, a fração do integrando pode ser escrita como soma de frações parciais da seguinte forma:

$$\frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2}=\frac{C}{x}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2-4x+5)^2}+\frac{A_1x+B_1}{x^2-4x+5},$$

em que $A_1=\dfrac{2}{25}$, $A_2=-\dfrac{42}{25}$, $B_1=-\dfrac{8}{25}$, $B_2=\dfrac{13}{5}$ e $C=-\dfrac{2}{25}$.

$$\begin{aligned}\int\frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2}\,\mathrm{d}x &= \int\left(-\frac{2}{25}\cdot\frac{1}{x}+\frac{-\frac{42x}{25}+\frac{13}{5}}{(x^2-4x+5)^2}+\frac{\frac{2x}{25}-\frac{8}{25}}{x^2-4x+5}\right)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{2}{25}\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{25}\int\frac{-42x+65}{(x^2-4x+5)^2}\,\mathrm{d}x+\frac{2}{25}\int\frac{x-4}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x\\ &= \ldots \text{ continuar } \ldots\end{aligned}$$

4.5 Integrais de Expressões Racionais Contendo $\operatorname{sen}(x)$ e/ou $\cos(x)$

Se o integrando envolver uma função racional de $\operatorname{sen}(x)$ e/ou $\cos(x)$ ele poderá ser reduzido a uma fração racional de w pela substituição $w=\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Com as seguintes identidades trigonométricas $\operatorname{sen}(2\theta)=2\operatorname{sen}(\theta)\cdot\cos(\theta)$ e $\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)-1$, procedemos da seguinte maneira:

$\diamond$ $\operatorname{sen}(x) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\dfrac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = 2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\dfrac{1}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

$\diamond$ $\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \dfrac{2}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 = \dfrac{2}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Como $w = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, temos

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2w}{1+w^2} \quad \text{e} \quad \cos(x) = \frac{1-w^2}{1+w^2}$$

Além disso, $\dfrac{x}{2} = \operatorname{arctg}(w)$ e daí $dx = \dfrac{2}{1+w^2}\,dw$.

Resumimos estes resultados no seguinte teorema.

Teorema 8
Se um integrando é uma expressão racional em $\operatorname{sen}(x)$ e/ou $\cos(x)$, obteremos uma expressão racional em w mediante a seguinte substituição:

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2w}{1+w^2}\,,\ \cos(x) = \frac{1-w^2}{1+w^2}\,,\ dx = \frac{2}{1+w^2}\,dw$$

onde $w = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exemplo 51
Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}\,dx$.

Solução: Fazendo $w = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, pelas fórmulas dadas no teorema acima, temos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}\,dx &= \int \frac{\frac{2}{1+w^2}}{1+\frac{2w}{1+w^2}+\frac{1-w^2}{1+w^2}}\,dw = 2\int \frac{1}{1+w^2+2w+1-w^2}\,dw \\
&= 2\int \frac{1}{2+2w}\,dw = \int \frac{1}{1+w}\,dw \\
&= \ln|1+w| + K = \ln\left|1+\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + K
\end{aligned}$$

Observação 19
O teorema que acabamos de ver, pode ser usado para qualquer integrando que seja uma expressão racional em $\operatorname{sen}(x)$ e/ou $\cos(x)$; todavia, é importante considerar substituições mais simples, como o exemplo a seguir.

Exemplo 52
Calcular $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}\,dx$.

Solução: Poderíamos usar o teorema dado para transformar em uma expressão racional em w, no entanto, com a seguinte substituição $u = \text{sen}(x)$, $du = \cos(x)\,dx$, temos:

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\text{sen}^2(x)}\,dx = \int \frac{1}{1+u^2}\,du = \text{arctg}(u) + k = \text{arctg}\left(\text{sen}(x)\right) + K,$$

quem é uma resolução bem mais simples.

4.6 Integrais de Algumas Funções Irracionais

Não há uma regra geral para resolver integrais que envolvam funções irracionais. No entanto, veremos que muitas delas podem ser resolvidas com auxílio de outras técnicas de integração após termos efetuado uma simples mudança de variável (adequada). Considere o seguinte:

Se o integrando envolver potências fracionárias à variável x, então o integrando pode ser simplificado pela substituição

$$F(x) = w^n \text{ e } F'(x)\,dx = n \cdot w^{n-1}\,dw,$$

em que n é o menor denominador comum entre os denominadores dos expoentes.

Exemplo 53
Calcular $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Solução: Como os expoentes fracionários são $\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{1}{3}$, logo $n = \text{MMC}(2,3) = 6$. Fazendo $x = w^6$ e $dx = 6w^5\,dw$, temos:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{w^3\left(6w^5\right)}{1+w^2}\,dw = 6\int \frac{w^8}{w^2+1}\,dw.$$

Note que o integrando é uma fração imprópria, assim dividindo o numerador pelo denominador teremos:

$$\frac{w^8}{w^2+1} = w^6 - w^4 + w^2 - 1 + \frac{1}{w^2+1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx &= 6\int \frac{w^8}{w^2+1}\,dw = 6\int \left(w^6 - w^4 + w^2 - 1 + \frac{1}{w^2+1}\right) dw \\
&= 6\left(\frac{1}{7}w^7 - \frac{1}{5}w^5 + \frac{1}{3}w^3 - w + \text{arctg}(w)\right) + K = \cdots
\end{aligned}$$

Exemplo 54
Calcular $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,dx$.

Solução: Neste caso, $n = 3$. Assim, fazendo $x^2 + 4 = w^3$, temos que $x^2 = w^3 - 4$ e $x\,dx =$

$\dfrac{3}{2}w^2\,\mathrm{d}w$. Logo

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2+4}}x\,\mathrm{d}x = \int \frac{w^3-4}{w}\cdot\frac{3}{2}w^2\,\mathrm{d}w \\ &= \frac{3}{2}\int\left(w^4-4w\right)dw = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}w^5-2w^2\right)+K=\cdots\end{aligned}$$

Exemplo 55
Calcular $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-2x}{1+3x}}\,\mathrm{d}x$.

Solução: A substituição $w^2=\dfrac{1-2x}{1+3x}$ conduz a $x=\dfrac{1-w^2}{3w^2+2}$ e $\mathrm{d}x=-\dfrac{10w}{(3w^2+2)^2}\,\mathrm{d}w$. Logo

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{1-2x}{1+3x}}\,\mathrm{d}x &= -10\int\frac{w^2}{(3w^2+2)^2}\,\mathrm{d}w = -10\int\frac{w^2}{\left[3\left(w^2+\frac{2}{3}\right)\right]^2}\,\mathrm{d}w \\ &= -\frac{10}{9}\int w\cdot\frac{w}{\left(w^2+\frac{2}{3}\right)^2}\,\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

Integrando por partes, em que $u=w$ e $dv=\dfrac{w}{\left(w^2+\frac{2}{3}\right)^2}\,\mathrm{d}w$, ... "continuar"

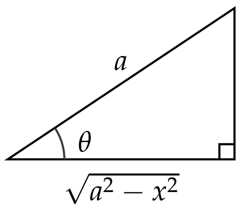
Exemplo 56
Calcular (a) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x^2}-1)}\,\mathrm{d}x$ e (b) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}+1}{4x+2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

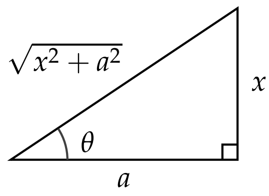
Solução: ♣ ♢ ♡ ♠

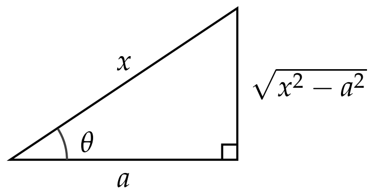
4.7 Integrais por Substituição Trigonométrica

As substituições trigonométricas nos permitem substituir os binômios a^2-x^2, a^2+x^2 e x^2-a^2 pelo quadrado de um único termo e, portanto, transformar várias integrais que contêm raízes quadradas em integrais que podemos calcular diretamente.

As substituições mais comuns são $x=a\ \mathrm{sen}(\theta)$, $x=a\ \mathrm{tg}(\theta)$ e $x=a\ \sec(\theta)$, $a\in\mathbb{R}$. Elas podem ser visualizadas nos seguintes triângulos retângulos:







$$\begin{aligned} x &= a\ \mathrm{sen}(\theta) \\ \sqrt{a^2-x^2} &= a|\cos(\theta)| \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= a\ \mathrm{tg}(\theta) \\ \sqrt{a^2+x^2} &= a|\sec(\theta)| \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= a\ \sec(\theta) \\ \sqrt{x^2-a^2} &= a|\mathrm{tg}(\theta)| \end{aligned}$$

1. Com $x = a\ \mathrm{sen}(\theta)$, temos $\mathrm{d}x = a \cdot \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ e
$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) = a^2\left(1 - \mathrm{sen}^2(\theta)\right) = a^2\cos^2(\theta).$$
2. Com $x = a\ \mathrm{tg}(\theta)$, temos $\mathrm{d}x = a \cdot \sec^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ e
$$a^2 + x^2 = a^2 + a^2\,\mathrm{tg}^2(\theta) = a^2\left(1 + \mathrm{tg}^2(\theta)\right) = a^2\sec^2(\theta).$$
3. Com $x = a\ \sec(\theta)$, temos $\mathrm{d}x = a\ \sec(\theta)\,\mathrm{tg}(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ e
$$x^2 - a^2 = a^2\sec^2(\theta) - a^2 = a^2\left(\sec^2(\theta) - 1\right) = a^2\,\mathrm{tg}^2(\theta).$$

Resumimos assim:

Substituição Trigonométrica					
1.	$x = a\ \mathrm{sen}(\theta)$	substitui	$a^2 - x^2$	por	$a^2\cos^2(\theta)$
2.	$x = a\ \mathrm{tg}(\theta)$	substitui	$a^2 + x^2$	por	$a^2\sec^2(\theta)$
3.	$x = a\ \sec(\theta)$	substitui	$x^2 - a^2$	por	$a^2\,\mathrm{tg}^2(\theta)$

Quando fazemos uma substituição, queremos que a mesma seja revertida de maneira que possamos voltar para a variável original posteriormente. Por exemplo, se $x = a\ \mathrm{sen}(\theta)$, queremos poder estabelecer que $\theta = \mathrm{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)$ após a integração ter ocorrido. Se $x = a\ \mathrm{tg}(\theta)$, queremos poder estabelecer que $\theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$ no final, o mesmo valendo para $x = a\ \sec(\theta)$.

Para a reversibilidade precisamos que θ esteja no contradomínio da função trigonométrica inversa correspondente, vejamos:

Reversibilidade na Substituição Trigonométrica							
1.	$x = a\ \mathrm{sen}(\theta)$	exige	$\theta = \mathrm{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)$	com	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	logo	$\cos(\theta) \geq 0$
2.	$x = a\ \mathrm{tg}(\theta)$	exige	$\theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$	com	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	logo	$\sec(\theta) \geq 0$
3.	$x = a\ \sec(\theta)$	exige	$\theta = \mathrm{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right)$	com	$\begin{cases} 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, & \frac{x}{a} \geq 1 \\ \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi, & \frac{x}{a} \leq -1 \end{cases}$	logo	$\mathrm{tg}(\theta) \geq 0$

Nestas condições, quando o integrando contiver expressões do tipo $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ ou $\sqrt{x^2 - a^2}$, em que $a \in \mathbb{R}_+$, em geral é possível efetuar a integração através de uma substituição trigonométrica. Que levará a uma integral envolvendo funções trigonométricas.

Exemplo 57

Aplicando uma substituição trigonométrica conveniente, calcular as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x;$ (b) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+5}\,\mathrm{d}x;$ (c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-9}}.$

Solução:

(a) Temos no integrando uma expressão do tipo $\sqrt{a^2-x^2}$, onde $a=3$. Assim, fazemos $x = 3\,\mathrm{sen}(\theta)$, donde $\mathrm{d}x = 3\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ e, então:

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\,\mathrm{sen}^2(\theta)} = 3\sqrt{\cos^2(\theta)} = 3\cos(\theta).$$

Substituindo na integral, obtemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{3\cos(\theta)}{9\,\mathrm{sen}^2(\theta)}3\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{9\cos^2(\theta)}{9\,\mathrm{sen}^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int \mathrm{cotg}^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int [\mathrm{cossec}^2(\theta)-1]\,\mathrm{d}\theta = \int \mathrm{cossec}^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta - \int \mathrm{d}\theta = -\,\mathrm{cotg}(\theta) - \theta + C\end{aligned}$$

Para voltarmos à variável original x, usamos as relações trigonométricas e as funções trigonométricas inversas. De $x = 3\,\mathrm{sen}(\theta)$, obtemos diretamente $\mathrm{sen}(\theta) = \dfrac{x}{3}$ e $\theta = \mathrm{arcsen}\left(\dfrac{x}{3}\right)$. Além disso, de $\sqrt{9-x^2} = 3\cos(\theta)$, temos também que $\cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{3}$. Daí, temos $\mathrm{cotg}(\theta) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. Portanto, voltando à integral, temos, finalmente,

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \mathrm{arcsen}(x/3) + C.$$

(b) O integrando envolve uma expressão da forma $\sqrt{a^2+x^2}$, em que $a=\sqrt{5}$. Então, devemos fazer $x = \sqrt{5}\,\mathrm{tg}(\theta)$, de onde se tem $\mathrm{d}x = \sqrt{5}\sec^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ e então:

$$\sqrt{x^2+5} = \sqrt{(\sqrt{5}\,\mathrm{tg}(\theta))^2+5} = \sqrt{5\,\mathrm{tg}^2(\theta)+5} = \sqrt{5(\mathrm{tg}^2(\theta)+1)} = \sqrt{5\sec^2(\theta)} = \sqrt{5}\sec(\theta).$$

Aplicando as substituições na integral, temos:

$$\int \sqrt{x^2+5}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{5}\sec(\theta)\sqrt{5}\sec^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int 5\sec^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 5\int \sec^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Aproveitando o cálculo da integral $\int \sec^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta$, já feito anteriormente, temos:

$$\int \sqrt{x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}[\mathrm{tg}(\theta)\sec(\theta) + \ln|\,\mathrm{tg}(\theta)+\sec(\theta)|] + C.$$

Agora, para dar a resposta em função de x, utilizemos as relações trigonométricas e as expressões das substituições. De $x = \sqrt{5}\,\mathrm{tg}(\theta)$, vem $\mathrm{tg}(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{5}}$ e, de $\sqrt{x^2+5} = \sqrt{5}\sec(\theta)$, obtemos $\sec(\theta) = \dfrac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}$. Substituindo na expressão encontrada para a integral, temos, finalmente,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+5}\,\mathrm{d}x &= \frac{5}{2}\Big(\frac{x}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}} + \ln\Big|\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}\Big|\Big)+C\\ &= \frac{5}{2}\Big(\frac{x\sqrt{x^2+5}}{5} + \ln\Big|\frac{x+\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}\Big|\Big)+C\end{aligned}$$

Poderíamos, ainda, escrever $\int \sqrt{x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\big(\frac{x\sqrt{x^2+5}}{5} + \ln|x+\sqrt{x^2+5}| - \ln\sqrt{5}\big)+C$ e pondo $-\frac{5}{2}\ln\sqrt{5}+C$ igual a uma outra constante C_1, teríamos, então

$$\int \sqrt{x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+5}| + C_1.$$

(c) O integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{x^2-a^2}$, onde $a=3$. Devemos então fazer, de onde temos de imediato que $\mathrm{d}x = 3\operatorname{tg}(\theta)\sec(\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Então:

$$\begin{aligned}x^3\sqrt{x^2-9} &= (3\sec(\theta))^3\sqrt{(3\sec\theta)^2-9} = 27\sec^3(\theta)\sqrt{9\sec^2(\theta)-9}\\ &= 27\sec^3(\theta)\sqrt{9(\sec^2(\theta)-1)} = 27\sec^3(\theta)\sqrt{9\operatorname{tg}^2(\theta)} = 27\sec^3(\theta)3\operatorname{tg}(\theta)\end{aligned}$$

Aplicando a integral, temos:

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-9}} &= \int\frac{3\operatorname{tg}(\theta)\sec(\theta)\ \mathrm{d}\theta}{27\sec^3(\theta)3\operatorname{tg}(\theta)} = \frac{1}{27}\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sec^2(\theta)} = \frac{1}{27}\int\cos^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{27}\int\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\ \mathrm{d}\theta = \frac{1}{27}\cdot\frac{1}{2}\left[\int \mathrm{d}\theta + \int\cos(2\theta)\ \mathrm{d}\theta\right]\\ &= \frac{1}{54}\left[\theta+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta)\right] = \frac{1}{54}[\theta+\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)]\end{aligned}$$

Agora, voltemos à variável x. De $x = 3\sec(\theta)$, temos que $\sec(\theta) = \frac{x}{3}$ e daí $\theta = \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right)$. Além disso, de $\sec(\theta) = \frac{x}{3}$, temos $\cos(\theta) = \frac{3}{x}$ e, juntamente com $x^3\sqrt{x^2-9} = 27\sec^3(\theta)3\operatorname{tg}(\theta)$, concluímos (usando $\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta}$) que $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$. Segue que,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{54}\left[\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\cdot\frac{3}{x}\right]+C = \frac{1}{54}\left[\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{3\sqrt{x^2-9}}{x^2}\right]+C$$

Exemplo 58
Calcular as seguintes integras por substituição trigonométrica.

(a) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{x^6}\,\mathrm{d}x$

Solução:

(a) $x = 4\,\text{sen}(\theta)$, ...

(b) $x = 2\,\text{tg}(\theta)$, ...

(c) $x = 3\sec(\theta)$, ...

(d) $x = \text{sen}(\theta)$, ...

5 Wolfram | Alpha

O Wolfram | Alpha é um mecanismo de conhecimento computacional desenvolvido por Stephen Wolfram e sua empresa Wolfram Research. Excelente ferramenta que se demonstra como uma verdadeira fonte dinâmica de conhecimento.

Acesse pelo endereço http://www.wolframalpha.com/ ou baixe seu aplicativo para iOS ou Android.

Com o comando "**int f(x)**" o Wolfram | Alpha exibirá a família de primitivas de $f(x)$ e com o comando "**diff f(x)**" ele exibirá a derivada de $f(x)$.

6 Referências

1. Diva Flemming – Cálculo A;
2. Eliana Patres – DMAT/UFBA;
3. Humberto José Bortolossi – UFF/RJ;
4. James Stwart – Cálculo;
5. Louis Leithold – O Cálculo com Geometria Analítica;
6. Piskunov – Cálculo Diferencial e Integral.

Texto composto em $\LaTeX\,2_\varepsilon$, Cattai, 6 de março de 2016