LISTA DE EXERCÍCIOS

ÁLGEBRA LINEAR

Prof. ADRIANO CATTAI

04

Somos o que repetidamente fazemos. A excelência portanto, não é um feito, mas um hábito. *Aristóteles*

Transformação Linear: definição, núcleo e imagem

(*Atualizada em 24 de julho de 2016*)

NOME: ______________________ DATA: ____/____/______

Q 1 Verifique quais das seguintes aplicações são lineares:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x, y)$;

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x, y) = x \cdot y$;

(c) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = |x|$;

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (2x, 3y - z)$;

(e) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = \text{sen}(x)$;

(f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x + y, x, y)$;

(g) $T : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ definida por $T(x, y) = \begin{pmatrix} x - y & 0 \\ 1 & 2y - 3x \end{pmatrix}$;

(h) $T : P_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definida por $T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{pmatrix} a + b & b \\ -c & 2c + d \end{pmatrix}$.

Q 2 Na questão anterior, determine o núcleo e a imagem das transformações lineares, exibindo suas bases e suas dimensões. Decida qual é injetiva e/ou sobrejetiva.

Q 3 Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Mostre que o núcleo de T é um subespaço vetorial de V e que a imagem de T é um subespaço vetorial de W.

Q 4 Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a \cdot x$, $\forall\, a \in \mathbb{R}^*$, é a única função elementar, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que é transformação linear.

Q 5 Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operador linear dado por $T(x, y) = (2x - y, -8x + 4y)$.

(a) Qual(is) dos vetores $u_1 = (5, 10)$, $u_2 = (3, 2)$ e $u_3 = (1, 1)$ estão em $\ker(T)$?

(b) Qual(is) dos vetores $v_1 = (1, -4)$, $v_2 = (5, 0)$ e $v_3 = (-3, 12)$ estão em $\text{Im}(T)$?

Q 6 Em cada item, é dado a imagem de n vetores de V^n, da transformação linear $T : V^n \to W^m$. Verifique que esse vetores (os que foram transformados) formam uma base de V e, em seguida, escreva um vetor qualquer de V como combinação dos vetores dessa base para obter a lei da transformação linear T.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 2) = (3, -1, 5)$ e $T(0, 1) = (2, 1, -4)$;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 2, 1) = (1, 2, 3)$, $T(0, 1, 0) = (2, 1, 5)$ e $T(0, 4, 1) = (0, 3, 2)$;

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(3, 2, 1) = (1, 1)$, $T(0, 1, 0) = (0, -2)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0)$;

(e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, -2) = (0, 1, 0)$.

Q 7 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z, 3x + z)$, determine:

(a) Uma base para o núcleo de T e, portanto, sua dimensão;

(b) Uma base para a imagem de T e, portanto, sua dimensão;

(c) Se T é injetiva;

(d) Se T é sobrejetiva.

Q 8 Verifique se as transformações lineares $T_1(x,y) = (x-y, y-x, 2x-y)$ e $T_2(x,y,z) = (x+y+z, x-y-z)$ são injetoras.

Q 9 Determine uma transformação linear:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja imagem seja gerada por $\{(1,2,3);(4,5,6)\}$;

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\ker(T) = [(1,0,0);(0,2,0)]$, $\mathrm{Im}(T) = [(2,4)]$ e $\beta = \{(1,0,0);(0,2,0);(0,0,1)\}$ seja a base do $\mathbb{R}^3$;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Im}(T) = [(1,1,2);(2,1,0)]$;

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, tal que $\ker(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = x-y\}$ e $T(0,0,1) = (0,0,0,1)$.

Q 10 Verifique se a transformação linear T é um isomorfismo.

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,2,1) = (1,2,3)$, $T(0,1,0) = (2,1,5)$ e $T(0,4,1) = (0,3,2)$;

(b) $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(xt^2 + yt + z) = (x,y,z)$;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $T(x,y,x) = 2xt^2 + (4x-y)t + 2x + 3y - z$;

(d) $T : \mathbb{R}^4 \to M_2(\mathbb{R})$ tal que $T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $T(e_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (x-y, x-y)$.

Q 11 Use o Teorema do Núcleo e da Imagem para justificar porque não existe uma transformação linear:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que seja sobrejetiva;

(b) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ que seja injejetiva;

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\dim(\ker(T)) = \dim(\mathrm{Im}(T))$.

Créditos

As questões presentes nesta lista são oriundas das listas do professor Álfaro Fernandes Serafim (UFRB), das listas do DMAT/UFBA e de alguns livros indicados na bibliografia. Elas foram digitadas pelo bolsista de extensão (2015) Moab Guimrães do curso de Engenharia e organizadas por mim, Adriano Cattai.

Respostas dos Exercícios

✉ Identificando algum erro nas respostas apresentadas, ficarei muito grato com sua coleboração enviando seu comentário para acattai@uneb.br ou, preferencialmente, me informe pessoalmente.

☺ **Q 1** (a), (d), (f), (h).

☺ **Q 4** Uma parte do exercício é verificar que $f(x) = a \cdot x$ é TL. A outra, mais extensa, é listar as funções elementares e justificar qual item na definição de TL a função não atende, por exemplo, $f(x) = ax + b$ $(b \neq 0)$ não leva nulo no nulo.

☺ **Q 5** (a) u_1; (b) v_1 e v_3.

☺ **Q 6** (a) $T(x,y) = (-x+2y, -3x+y, 13x-4y)$; (b) $T(x,y,z) = (2x+y, y-z)$; (c) $T(x,y,z) = (5x+2y-8z, x+y-z, 11x+5y-18z)$; (d) $T(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{3}, \dfrac{5x-6y}{3}\right)$; (e) $T(x,y) = \left(3x, \dfrac{5x-y}{2}, x\right)$.

☺ **Q 7** (a) $\beta_{\ker(T)} = \{(-1,1,3)\}$, $\dim(\ker(T)) = 1$; (b) $\beta_{\mathrm{Im}(T)} = \{(1,2,3);(1,-1,0)\}$, $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$; (c) T não é injetiva, pois $\ker(T) \neq \{0\}$, equivalentemente, $\dim(\ker(T)) \neq 0$; (d) T não é sobrejetiva, pois $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(W)$, visto que $\mathrm{Im}(T) \subset W$.

☺ **Q 8** T_1 é e T_2 não, pois $\ker(T_2) = [(0,1,-1)] \neq \{(0,0,0)\}$.

☺ **Q 9** (a) $T(x,y) = (x+4y, 2x+5y, 3x+6y)$; (b) $T(x,y,z) = (2z, 4z)$; (c) $T(x,y,z) = (x+2y, x+y, 2x)$; (d) $T(x,y,z) = (0,0,0,z-x+y)$.

☺ **Q 10** São: (a), (b) e (c); Não são: (d) pois $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$ e (e) pois $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$.

Material escrito em $\LaTeX\,2_\varepsilon$, Cattai, 24 de julho de 2016