LISTA DE EXERCÍCIOS

ÁLGEBRA LINEAR

Prof. ADRIANO CATTAI

ac

05

Somos o que repetidamente fazemos. A excelência portanto, não é um feito, mas um hábito. *Aristóteles*

Transformação Linear: autovalores e autovetores

(*Atualizada em 24 de julho de 2016*)

NOME: ______________________________ DATA: ____/____/______

Q 1 Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x,y,z) = (2x+y-z, x+2y)$ e as bases $\beta_1 = \{(1,0,0);(2,-1,0);(0,1,1)\}$ e $\beta_2 = \{(-1,1);(0,1)\}$. Determine as matrizes $A = [T]$ e $B = [T]_{\beta_2}^{\beta_1}$. Determine $T(v)$ a partir de sua lei e por suas matrizes, em que $v = (1,2,3)$.

Q 2 Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x,y) = (2x-y, x+3y, -2y)$ e as bases $\beta_1 = \{(-1,1);(2,1)\}$ e $\beta_2 = \{(0,0,1);(0,1,-1);(1,1,0)\}$. Determine as matrizes $[T]_{\beta_2}^{\beta_1}$ e $[T]_{\beta}^{\beta_1}$, em que β é a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

Q 3 Sabendo que a matriz de uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, nas bases $\beta_1 = \{(-1,1);(1,0)\}$ e $\beta_2 = \{(1,1,-1);(2,1,0);(3,0,1)\}$, é $[T]_{\beta_2}^{\beta_1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, encontre a expressão de $T(x,y)$ e a matriz $[T]$.

Q 4 Seja $[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ a matriz canônica de uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Determine v, em que $T(v) = (2,4,-2)$.

Q 5 Verifique, utilizando a definição, se os vetores dados são autovetores dos seguintes operadores lineares:

(a) $v = (-2,1)$, $[T] = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $v = (-2,1,3)$, $[T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Q 6 Determine os autovalores e os autovetores, portanto os auto-espaços, dos seguintes operadores lineares:

(a) $T(x,y) = (x+2y, -x+4y)$;
(b) $T(x,y) = (2x+2y, x+3y)$;
(c) $T(x,y) = (5x-y, x+3y)$;
(d) $T(x,y) = (y,-x)$;
(e) $T(x,y,z) = (x+y+z, 2y+z, 2y+3z)$;
(f) $T(x,y,z,w) = (x, x+y, x+y+z, x+y+z+w)$.

Q 7 Na questão anterior, decida se os operadoradores são diagonalizáveis, ou seja, o espaço V possui uma base de autovetores. Escreva sua forma diagonal.

Q 8 Os vetores $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (2,-1)$ são autovetores de um operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, associados a $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$, respectivamente. Determine a imagem do vetor $v = (4,1)$ por esse operador.

Q 9 Determine o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujos autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ associados aos autovetores $v_1 = (1,-1)$ e $v_2 = (0,1)$, respectivamente.

Q 10 Determine o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujos autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$ associados aos autovetores $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (-1,0)$, respectivamente.

Q 11 Se $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$ são autovalores de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, associados aos autovetores $u = (2,1)$ e $v = (-1,3)$, respectivamente, determine $T(3u - v)$.

Q 12 Considere um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(u) = u$ e $T(v) = \frac{1}{2}v$. Determine $T(3,7)$ se $u = (0,2)$ e $v = (2,6)$.

Créditos

As questões presentes nesta lista são oriundas das listas do professor Álfaro Fernandes Serafim (UFRB), das listas do DMAT/UFBA e de alguns livros indicados na bibliografia. Elas foram digitadas pelo bolsista de extensão (2015) Moab Guimrães do curso de Engenharia e organizadas por mim, Adriano Cattai.

Respostas dos Exercícios

✉ Identificando algum erro nas respostas apresentadas, ficarei muito grato com sua coleboração enviando seu comentário para acattai@uneb.br ou, preferencialmente, me informe pessoalmente.

☺ **Q 1** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$; $T(v) = (2+2-3, 1+4) = (1,5)$; $T(v) = A \cdot v = (1,5)$; $T(v) = [T]_{\beta_2}^{\beta_1} \cdot [v]_{\beta_1} = [u]_{\beta_2} = (-1,6)_{\beta_2} = -1 \cdot (-1,1) + 6 \cdot (0,1) = (1,5)$.

☺ **Q 2** $[T]_{\beta_2}^{\beta_1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$; $[T]_{\beta}^{\beta_1} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

☺ **Q 3** $T(x,y) = (8x + 18y, 6x + 11y, -2x - 4y)$ e $[T] = \begin{bmatrix} 8 & 18 \\ 6 & 11 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$.

☺ **Q 4** $v = (2,0)$.

☺ **Q 5** (a) Sim; (b) Não.

☺ **Q 6** (a) $\lambda_1 = 3, v_1 = (1,1), \lambda_2 = 2, v_2 = (2,1), V_1 = [(1,1)], V_2 = [(2,1)]$; (b) $\lambda_1 = 1, v_1 = (-2,1), \lambda_2 = 4, v_2 = (1,1), V_1 = [(-2,1)], V_2 = [(1,1)]$; (c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 4, v_1 = (1,1), V_1 = [(1,1)]$; (d) Não existem; (e) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, v_1 + v_2 = (1,0,0) + (0,1,-1), \lambda_3 = 4, v_3 = (1,1,2), V_{1;2} = [(1,0,0),(0,1,-1)], V_3 = [(1,1,2)]$; (f) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$

☺ **Q 7** Todos, com exceção do item (d) por não possuir autovalores.

☺ **Q 8** $(8,11)$.

☺ **Q 9** $T(x,y) = (x, 2x + 3y)$.

☺ **Q 10** $T(x,y) = (-2x + \frac{5}{2}y, 3y)$.

☺ **Q 11** $(26,6)$.

☺ **Q 12** $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Material escrito em LaTeX 2_ε, Cattai, 24 de julho de 2016