LISTA DE EXERCÍCIOS

ÁLGEBRA LINEAR

Prof. ADRIANO CATTAI

03

Somos o que repetidamente fazemos. A excelência portanto, não é um feito, mas um hábito. *Aristóteles*

Dependência Linear, Base e Coordenadas

(*Atualizada em 24 de julho de 2016*)

NOME: ______________________________ DATA: ____/____/______

Q 1 Verifique se os conjuntos abaixo são LI ou LD.

(a) $\{(1,-1,3);(5,2,4);(4,1,7)\}$; (b) $\{(1,2,-3,1);(2,3,-7,1);(1,4,1,5);(0,3,5,5)\}$;

(c) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$;

(d) $\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}\right\}$.

Q 2 Determine k de modo que o conjunto $\{(1,0,k);(1,1,k);(1,k,k^2)\}$ seja LI.

Q 3 Sejam os vetores de $M_2(\mathbb{R})$, dados a seguir:

$$v_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ v_2=\begin{bmatrix} 2 & x \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ v_3=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ y & 2 \end{bmatrix},\ v_4=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2y & z \end{bmatrix}.$$

Determine, se possível, as constantes x, y e z para que cada item seja verdadeiro:

(a) $\{v_1,v_4\}$ LI; (b) $\{v_1,v_2\}$ LI; (c) $\{v_1,v_2,v_4\}$ LD; (d) $\{v_1,v_2,v_3\}$ LI.

Q 4 Verifique quais dos seguintes conjuntos abaixo:

(i) São LI; (ii) Geram os espaços V considerados; (iii) São bases dos espaços V considerados.

(a) $\{(1,1,-1);(2,2,1);(1,1,1)\}\subset V=\mathbb{R}^3$;

(b) $\{(-1,1);(1,1);(1,2)\}\subset V=\mathbb{R}^2$;

(c) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right\}\subset V=M_2(\mathbb{R})$;

(d) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}\subset V=M_{2x3}(\mathbb{R})$.

Q 5 Determine uma base e a dimensão dos seguintes subespaços vetoriais:

(a) $W=[(1,0,0);(0,5,-2);(-1,0,2);(0,5,0)]$;

(b) $W=\left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 14 & -1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$;

(c) $W=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}),\ z-y=0\right\}$.

Q 6 Encontre as equações lineares homogêneas que caracterizam os seguintes subespaços:

(a) $W = [(-2,1,0);(3,0,1);(-1,2,1)]$ em $\mathbb{R}^3$;
(b) $W = [(2,1,-2);(4,-2,-4)]$ em $\mathbb{R}^3$;
(c) $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\right]$ em $M_2(\mathbb{R})$;
(d) $W = [(2,-2);(-1,1)]$ em $\mathbb{R}^2$.

Q 7 Determine as equações lineares homogêneas que caracterizam $U \cap W$ e uma base para $U \cap W$.

(a) $U = [(2,-2,0);(0,0,3)]$ e $W = [(4,0,-4);(0,5,0)]$;

(b) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = 0\}$ e $W = [(0,2,0);(1,2,3);(7,12,21);(-1,-2,-3)]$;

(c) $U = [(1,0,2);(0,1,1);(1,1,3)]$ e $W = \left[(0,-1,1);\left(0,1,\frac{-1}{2}\right)\right]$;

(d) $U = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$ e $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$.

Q 8 Sejam os vetores $u = (2,-1,4)$, $v = (1,1,2)$ e $w = (4,-5,8)$ do $\mathbb{R}^3$.

(a) Encontre uma base para $S = [u,v,w]$;

(b) Escreva as equações que caracterizam S;

(c) O vetor $(1,0,-2)$ pertence a S?

(d) Seja $Y = [(0,7,0)]$. Determine $Y \cap S$.

Q 9 Diga quais dos vetores abaixo pertencem a $W = [(2,1,0,3);(3,-1,5,2);(-1,0,2,1)]$.
(a) $(2,3,-7,3)$; (b) $(0,0,0,0)$; (c) $(1,1,1,1)$.

Q 10 Verifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações abaixo.

(a) Dois vetores são LD se, e somente se, um deles é multiplo do outro;

(b) Um conjunto que contém um subconjunto de vetores LD é LI;

(c) Um subconjunto de um conjunto LI pode ser LD;

(d) Se $W_1 \in [w_2,w_3]$, então $\{W_1,W_2,W_3\}$ é LD;

(e) Se $[w_1,w_2] = [W_1,W_2,W_3]$, emtão $\{W_1,W_2,W_3\}$ é LD;

(f) Se $\{W_1,W_2,W_3\}$ é LI, então $[W_1,W_2] = [W_1,W_2,W_3]$.

Q 11 Dê, se possível, exemplos de conjuntos pedidos abaixo. Caso seja impossível, indique o motivo.

(a) Um conjunto LI com 3 vetores do $\mathbb{R}^2$;

(b) Um conjunto LI com 2 vetores que geram o $\mathbb{R}^3$;

(c) Um conjunto LI do $\mathbb{R}^3$ que contenha o conjunto $\{(1,2,3);(0,0,0)\}$;

(d) Uma base do $\mathbb{R}^3$ contendo os vetores $\{(2,4,-6);(-1,1,-3)\}$;

(e) Um subespaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$ de dimensão 3;

(f) Uma base do $\mathbb{R}^3$ que contenha o conjunto $\{(2,2,-2);(-3,-3,3)\}$.

Q 12 Sejam $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a+d=0 \text{ e } b+c=0 \right\}$ e $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a+c=0 \text{ e } b+d=0 \right\}$ subespaços de $M_2(\mathbb{R})$. Determine:

(a) $W_1 \cap W_2$; (b) Uma base para cada subespaço W_1, W_2 e $W_1 \cap W_2$; (c) $\dim(W_1 + W_2)$.

Q 13 Sejam U e W subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^4$, sabendo que $U \cap W = [(1,-1,-2,0);(2,1,-1,0);(1,2,1,0)]$, $\dim(U+W) = 3$ e $\{(1,2,1,0);(0,1,1,0)\}$ é uma base de U, determine a dimensão de W.

Q 14 Se U e W são subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^5$, tais que $W = \{x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5;\ 2y+4z-6t=0 \text{ e } z=0\}$. $\dim(U \cap W) = 0$ e $\dim(U+W) = 5$, determine a dimensão de U.

Q 15 Determine uma base para os espaços a seguir, contendo os respectivos conjuntos de vetores:

(a) $V = \mathbb{R}^3$ e $B_1 = \{(1,2,0),(0,1,-1)\}$; (b) $V = P_2(\mathbb{R})$ e $B_1 = \{x+1, 2x-1\}$;

Q 16 Em cada item, enocntre as coordenadas do vetor v em relação à base B indicada, do subespaço W.

(a) $v = (3,2,3)$, $B = \{(1,1,1),(0,1,0)\}$; (b) $v = -2x^2$, $B = \{x^2, x+1\}$;

(c) $v = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Q 17 Sejam W_1 e W_2 subespaços de $\mathbb{R}^5$. Determine, justificando, a $\dim(W_2)$, sabendo que:

(i) $W_1 \cap W_2 = [(1,-1,-2,0,0),(2,1,-1,0,0),(1,2,1,0,0)]$; (ii) $\dim(W_1+W_2) = 4$;

(iii) $B_1 = \{(1,2,1,0,0),(0,1,1,0,0)\}$ é uma base de W_1.

Q 18 Sabendo que $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$, $W_1 = [(1,2,3,4),(3,6,9,12)]$, determine $\dim(W_2)$.

Q 19 Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais do espaço V, em que $\dim(V) = 6$.

(a) Se $\dim(W_1) = 4$ e $\dim(W_2) = 5$, é verdade que $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$?

(b) Se $\dim(W_1) = \dim(W_2) = 4$, quais possíceis dimensões de $W_1 \cap W_2$?

Q 20 Dê, se possível, exemplos de:

(a) Um conjunto LI de 3 vetores do $\mathbb{R}^3$ que não geram o $\mathbb{R}^3$;

(b) Um conjunto LD de 3 vetores de $M_2(\mathbb{R})$;

(c) Um subespaço W do $\mathbb{R}^4$, tal que $W \neq \mathbb{R}^4$ e $\dim(W) = 4$;

(d) Dois subespaços W_1 e W_2 do $\mathbb{R}^5$, tais que $\dim(W_1) = \dim(W_2) = 3$ e $W_1 \oplus W_2$.

Créditos

As questões presentes nesta lista são oriundas das listas do professor Álfaro Fernandes Serafim (UFRB), das listas do DMAT/UFBA e de alguns livros indicados na bibliografia. Elas foram digitadas pelo bolsista de extensão (2015) Moab Guimrães do curso de Engenharia e organizadas por mim, Adriano Cattai.

Respostas dos Exercícios

✉ Identificando algum erro nas respostas apresentadas, ficarei muito grato com sua coleboração enviando seu comentário para acattai@uneb.br ou, preferencialmente, me informe pessoalmente.

☺ **Q 1** LI: (a) e (d).

☺ **Q 2** $k \neq 0$ e $k \neq 1$

☺ **Q 3** (a) $y \neq 0$ ou $z \neq 0$; (b) $\forall\, x \in \mathbb{R}$; (c) $x = 2$ e $z = 0$ ou $x \neq 2$ e $y = z = 0$; (d) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

☺ **Q 4** (a), (b) e (c) são LD; (b) gera;

☺ **Q 5** (a) $B = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$, $\dim(W) = 3$; (b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim(W) = 3$; (c) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim(W) = 3$.

☺ **Q 6** (a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - 3z = 0\}$; (b) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + z = 0\}$; (c) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),\ x + y - z = 0 \text{ e } w = 0 \right\}$; (d) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y = 0\}$.

☺ **Q 7** (a) $U \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 0 \text{ e } x + z = 0\}$, $B_{U\cap W} = \{(1,-1,-1)\}$; (b) $U \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = 0 \text{ e } z = 0\}$, $B_{U\cap W} = \{(0,1,0)\}$; (c) $U \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = 0 \text{ e } z = y\}$, $B_{U\cap W} = \{(0,1,1)\}$; (d) $U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R});\ x - w = 0, y - w = 0,\ z - w = 0 \right\}$, $B_{U\cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

☺ **Q 8** (a) $B = \{(1,1,2); (0,1,0)\}$; (b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - z = 0\}$; (c) Não; (d) $Y \cap S = Y$, pois $Y \subset S$.

☺ **Q 9** (c) não.

☺ **Q 10** V: (a), (b), (d) e (e).

☺ **Q 11** (a) Impossível, pois $\mathbb{R}^2$ admite, no máximo, dois vetores LI; (b) Impossível, pois dois vetores LI somente geram um plano no $\mathbb{R}^3$; (c) Impossível, pois este conjunto é LD (possui vetor nulo); (d) Possível, pois os vetores são LI; (e) Possível, pois $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$; (f) impossível, pois o conjunto é LD.

☺ **Q 12** (a) $W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$; (b) Uma base de W_1: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, uma base de W_2: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ e uma base de $W_1 \cap W_2$: $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. (c) $\dim(W_1 \cap W_2) = 3$

☺ **Q 13** $\dim W = 3$

☺ **Q 14** $\dim U = 2$

☺ **Q 15** (a) $\{(1,2,0), (0,1,-1), (x,y,z)\}$, tal que $z \neq y - 2x$; (b) $\{x + 1, 2x - 1, ax^2 + bx + c\}$, em que $x \neq 0$.

☺ **Q 16** (a) $(3,-1)_B$; (b) $(-2,0)_B$; (c) $(-1,-1,0)_B$.

☺ **Q 17** $\dim(W_2) = 4$, pois: $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$, $\dim(W_1) = 2$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$ e $\dim(W_1 + W_2) = 4$.

☺ **Q 18** 3.

☺ **Q 19** (a) Observe que $\dim(W_1 + W_2) \leq \dim(V) = 6$. Como $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2) \leq 4 + 5 - 6 = 3$. Logo, $\dim(W_1 \cap W_2) \geq 3$, ou seja, $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$; (b) Claro que $W_1 \subseteq W_1 + W_2 \subseteq V$, donde $4 \leq \dim(W_1 + W_2) \leq 6$. Como $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2)$, temos que $\dim(W_1 \cap W_2)$ pode ser 4, 3 ou 2.

☺ **Q 20** (a) Impossível; (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$; (c) Impossível; (d) Impossível, pois se $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^5$, temos que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ e $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^5$. Como, $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$, teremos $5 = 3 + 3 - 0$, que é um absurdo.

Material escrito em $\LaTeX\,2_\varepsilon$, Cattai, 24 de julho de 2016