# Lista de Exercícios

## Álgebra Linear

Prof. Adriano Cattai

**02**

Somos o que repetidamente fazemos. A excelência portanto, não é um feito, mas um hábito. *Aristóteles*

**Espaços Vetoriais e Subespaços Vetoriais**

(*Atualizada em 24 de julho de 2016*)

Nome: ______________________________ Data: ____/____/______

**Q 1** Verifique se o conjunto $V$, com as operações indicadas, é um $\mathbb{R}$-espacço vetorial.

(a) $V = \mathbb{R}^3$, opoerações usuais; (b) $V = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, opoerações usuais; (c) $V = M_3(\mathbb{R})$, opoerações usuais;

(d) $V = (0, +\infty)$, $a \oplus b = a \cdot b$, $\alpha \odot a = a^\alpha$, $\forall\, a, b \in V$ e $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$;

(e) $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x = y, z = w^2\}$, operações usuais;

(f) $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 \cdot y_2)$, $\alpha \odot (x, y) = (\alpha \cdot x, y^\alpha)$, $\forall\, (x, y) \in V$ e $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

**Q 2** Mostre que o vetor nulo de um espaço vetorial é único.

**Q 3** Mostre que, para cada vetor de um espaço vetorial, seu vetor oposto é único.

**Q 4** Identifique qual espaço vetorial $V$ em que $W$ está contido e julgue se $W$ é subespaço vetorial de $V$.

(a) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 3x\}$;

(b) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = |x|\}$;

(c) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = -2x + 1\}$;

(d) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2\}$;

(e) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 1\}$;

(f) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); x + w = 0 \right\}$;

(g) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 2y + z\}$;

(h) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y \leq 0\}$;

(i) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; xz = 0\}$;

(j) $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}); A = A^t\}$;

(k) $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}); A = A^2\}$

(l) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); z = xw \right\}$.

**Q 5** Seja $S = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ o conjunto de todas as soluções do sistema homogêneo $AX = 0$, em que $A \in M_3(\mathbb{R})$. Mostre que $S$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.

**Q 6** Escreva, se possível, cada vetor $v$ como combinação linear dos elementos do conjunto $S$:

(a) $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $S = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \right\}$;

(b) $v = (2, 7)$ e $S = \{(1, 0); (2, 9)\}$;

(c) $v = (0, 0, 3)$ e $S = \{(2, 0, 0); (0, 1, 0)\}$;

(d) $v = (4, 5, -1)$ e $S = \{(1, 1, 1); (1, 2, 0); (2, 3, -1)\}$;

(e) $v = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

**Q 7** Considere os vetores $v = (1, 2, 1)$ e $w = (2, 1, 0)$, ambos do $\mathbb{R}^3$.

(a) Escreva cinco combinações lineares de $v$ e $w$.

(b) Determine o conjunto de todas as combinações lineares de $v$ e $w$, ou seja, o subespaço gerado por $v$ e $w$.

(c) Verifique se o vetor $u = (7, -1, -3) \in [v, w]$.

**Q 8** Considere os vetores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, do espaço $M_2(\mathbb{R})$.

(a) Escreva $u = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ como combinação linear de $v_1$, $v_2$ e $v_3$. Esta combinação linear é única?

(b) Escreva $u$ como combinação linear de $v_1$ e $v_2$. Esta combinação linear é única?

(c) Verifique se $w = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pode ser escrito como uma combinação linear de $v_1$, $v_2$ e $v_3$.

**Q 9** Mostre que os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ geram o espaço $\mathbb{R}^2$. Generalize mostrando que $\mathbb{R}^n = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$, em que $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$.

**Q 10** Determine um conjunto de geradores para os seguintes subespaços:

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0\}$; (b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y - 3z = 0\}$;

(c) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a + c = 0 \text{ e } d = 0 \right\}$; (d) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); x + y = z \text{ e } w = 2y \right\}$;

(e) $W = \{p(x) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}); p(-1) = p'(1) = 0\}$; (f) $W = \{p(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}); p(2) = 0\}$;

(g) $W = \{p(x) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}); p(-1) + p'(-1) = 0 \text{ e } p(1) = 0\}$; (h) $W = \{p(x) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}); p(1) + p(-1) = 0\}$.

# Créditos

Questões disponibilizadas pelo professor Álfaro Fernandes Serafim (UFRB), digitadas pelo bolsista de extensão (2015) Moab Guimrães do curso de Engenharia e organizadas por mim, Adriano Cattai.

# Respostas dos Exercícios

✉ Identificando algum erro nas respostas apresentadas, ficarei muito grato com sua coleboração enviando seu comentário para acattai@uneb.br ou, preferencialmente, me informe pessoalmente.

☺ **Q 1** (a), (b), (c) e (d) são; (e) não é; (f) não verifiquei!

☺ **Q 2** Dica: suponha que existam dois ($0_1$ e $0_2$) e verifique que eles são iguais.

☺ **Q 3** Dica: suponha que para um determinado vetor $v \in V$ existam dois $-v_1$ e $-v_2$ que sejam opostos a $v$. Verifique que eles são iguais.

☺ **Q** De (a) até (d) $V = \mathbb{R}^2$. (e), (g), (h) e (i) $V = \mathbb{R}^3$. (f), (j), (k), (l) $V = M_2(\mathbb{R})$. SEV: (a), (f), (g), (j), (l). NSEV: (b),(c), (d), (e), (h), (i), (k).

☺ **Q 5** (i) verifique que o vetor nulo $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ está em $S$; (ii) Vefique a soma de duas soluções $X_1$ e $X_2$ é também solução do sistema, ou seja, a soma está em $S$; (iii) Vefique o porduto por escalar $\alpha X$, em que $X \in S$, é também solução do sistema.

☺ **Q 6** (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \frac{9}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$; (b) $(2,7) = \frac{4}{9}(1,0) + \frac{7}{9}(2,9)$; (c) Não é possível. (d) $(4,5,-1) = 1(1,1,1) - 1(1,2,0) + 2(2,3,-1)$; (e) Não é possível.

☺ **Q 7** (a) Uma é: $2v - 3w = (2,4,2) - (6,3,0) = (-4,1,2)$, etc; (b) $[v,w] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + 3z = 0\}$; (c) Sim. Veja que $u = -3v + 5w$.

☺ **Q 8** (a) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = (10-\alpha)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-7+\alpha)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Não; (b) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-7)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Sim; (c) Não é possível.

☺ **Q 10** (a) $\{(2,1,-2)\}$; (b) $\{(-2,1,0);(3,0,1)\}$; (c) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$; (d) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$.

**Material escrito em $\LaTeX\,2_\varepsilon$, Cattai, 24 de julho de 2016**