Lista de Exercícios

Álgebra Linear

Prof. Adriano Cattai

Somos o que repetidamente fazemos. A excelência portanto, não é um feito, mas um hábito. *Aristóteles*

01

Matrizes e Sistemas Lineares

(*Atualizada em 24 de julho de 2016*)

Nome: ______________________________ Data: ____/____/______

Q 1 Determine $A+B$, em que $A=(a_{ij})_{2\times 2}$ é dada por $a_{ij}=\begin{cases} i+j, & \text{se} \quad i=j \\ 0, & \text{se} \quad i\neq j \end{cases}$ e $B=(b_{ij})_{2\times 2}$ é dada por $b_{ij}=2i-3j$.

Q 2 Resolva as seguintes equações matriciais:

(a) $\begin{bmatrix} \clubsuit & 7x-1 \\ 6y-8 & \heartsuit \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \clubsuit & 3y-16 \\ 14x+3y & \heartsuit \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} x-y & y+z \\ 3w+z & 2x-4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$.

Q 3 Suponha que $A, B \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$, $C \in M_{5\times 2}(\mathbb{R})$, $D \in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$ e $E \in M_{5\times 4}(\mathbb{R})$. Determine quais seguintes operações estão definidas. Para as que estão, dê o tamanho da matriz resultante e, para as que não estão exiba o motivo.

(a) $B\cdot A$; (c) $A\cdot E+B$; (e) $E\cdot(A+B)$; (g) $E^T\cdot A$;

(b) $A\cdot C+D$; (d) $A\cdot B+B$; (f) $E\cdot(A\cdot C)$; (h) $(A^T+E)\cdot D$.

Q 4 Considere as seguintes matrizes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } E=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine $5A-2B$ e $2A+3B$;

(b) Determine A^2 e $A\cdot C$; (Obs. $A^2=A\cdot A$)

(c) Mostre que as matrizes D e E comutam (isto é, $DE=ED$) e, A e B não comutam (isto é, $AB\neq BA$).

Q 5 Determine o valor de $x\in\mathbb{R}$ para que a matriz $\begin{pmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix}$ seja simétrica.

Q 6 Determine o valor de $x\in\mathbb{R}$ para que a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 2x & 1 \\ x^2 & 0 & -4x \\ x+1 & x^3 & 0 \end{pmatrix}$ seja:

(a) Simétrica; (b) Anti-simétrica.

Q 7 Seja $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Ache uma matriz $B=(b_{ij})_{2\times 3}$, com todos os elementos distintos, tal que $A\cdot B=0$ (Observe que $A\cdot B=0$ não implica $A=0$ ou $B=0$).

Q 8 Considere $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{bmatrix}$. Mostre que A é idempotente, isto é, que $A^2=A$.

✎ **Q 9** Considere $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. Mostre que B é nilpotente, isto é, que $B^n = 0$ para algum $n \geq 2$, inteiro.

✎ **Q 10** Determine, se possível, a matriz X tal que $(A^T \cdot X)^{-1} = (B^{-1})^{-1}$, em que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. [Obs. Use os seguintes fatos: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$]

✎ **Q 11** Sejam $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$. Determine, se possível, a matriz X, tal que $A + B \cdot X = C$.

✎ **Q 12** Por meio de um escalonamento, resolva os seguintes sistemas lineares:

(a) $\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} x - y + 2z - w = -1 \\ 2x + y - 2z - 2w = -2 \\ -x + 2y - 4z + w = 1 \\ 3x - 3w = -3 \end{cases}$; (e) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$;

(b) $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases}$; (f) $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y + z - t = 4 \\ x + y - z + t = -4 \\ x - y + z + t = 2 \end{cases}$.

✎ **Q 13** Supondo que as matrizes A, B, C e D sejam quadradas, de mesma ordem e inversíveis, resolva as equações matriciais nas quais X é a matriz incógnita.

(a) $ADX = ABC$; (b) $DX^T = DC$; (c) $D^{-1}XD = AC$; (d) $CX + 2B = 3B$.

✎ **Q 14** Considere a matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$, dada por $a_{ij} = \begin{cases} i + j, & i < j \\ 2i - j, & i = j \\ j - i, & i > j \end{cases}$. Determine a matriz X, em que $A \cdot X = B$, tal que $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. [Dica: Obtenha A^{-1} e então, $X = A^{-1} \cdot B$]

✎ **Q 15** Discuta em função de k os seguintes sistemas lineares:

(a) $\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases}$ (b) $\begin{cases} -x - 2y - kz = 1 \\ kx - y + z = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + 0y + kz = 0 \end{cases}$

✎ **Q 16** Calcule o determinante das matrizes abaixo:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 0 & a & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & b \\ 1 & b & a & 0 \end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & a & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & b & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$.

✎ **Q 17** Determine o valor das incógnitas para que as matrizes não sejam inversíveis.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & x \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} x+y-1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} x-3 & 0 & 3 \\ 0 & x+2 & 0 \\ -5 & 0 & x+5 \end{bmatrix}$.

Q 18 Verifique que, em cada caso, que a matriz dos coeficientes possui determinante não nulo. Em seguida, resolva os sistemas lineares pela regra de Cramer.

(a) $\begin{cases} 2x+y+2z=4 \\ x+2y+z=-1 \\ 3x+5y+2z=1 \end{cases}$;

(b) $\begin{cases} x+3y-z=0 \\ 2y+2z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y+z=1 \\ 3x-y+z=1 \end{cases}$;

(d) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & 9 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32 \\ 14 \\ 11 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Q 19 Usando operações elementares sobre linhas, determine se as matrizes abaixo são inversíveis e, em caso afirmativo, determine a sua inversa.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$; (b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; (c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Q 20 Resolva o sistema $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x+5y+3z=3 \\ x+8z=17 \end{cases}$, usando inversão de matrizes.

Q 21 Julgue em verdadeiro ou falso.

(a) $\det(-A) = -\det(A)$;

(b) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$;

(c) $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$;

(d) $A^2 - B^2 = (A-B)\cdot(A+B)$.

Q 22 Lembre que: A é simétrica se $A = A^T$ e A é antisimétrica se $A = -A^T$.

(a) Verifique que se A é simétrica (ou antisimétrica), então A é quadrada;

(b) Verifique que $A \cdot A^T$ é simétrica;

(c) Se A e B são simétricas, então AB também é? E AB^T?;

(d) Para toda matriz antisimétrica os elementos da diagonal principal são nulos?

Créditos

Questões disponibilizadas pelo professor Álfaro Fernandes Serafim (UFRB), digitadas pelo bolsista de extensão (2015) Moab Guimrães do curso de Engenharia e organizadas por mim, Adriano Cattai.

1 Respostas dos Exercícios

✉ Identificando algum erro nas respostas apresentadas, ficarei muito grato com sua coleboração enviando seu comentário para acattai@uneb.br ou, preferencialmente, me informe pessoalmente.

☺ **Q 1** $A+B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

☺ **Q 2** (a) $x = 1, y = \frac{22}{3}$; (b) $x = 7, y = -1, z = 2$ e $w = \frac{5}{3}$.

☺ **Q 3** (a) Não, pois o número de colunas de B não é igual ao número de linhas de A; (b) Sim, pois AC e D são 4×2; (c) Não, pois AE é quatro por quatro e B é 4×5; (d) Não, pois o número de colunas de A não é igual ao número de linhas de B; (e) Sim, pois A e B são de mesma ordem (4×5) e E é 5×4, logo pode oproduto entre 5×4 e 4×5; (f) Sim, pois AC é uma 4×2 e E uma 5×4; (g) Não, pois E^T é 4×5, assim como A; (h) Sim, A^T é 5×4, assim como E e, D é E^T é 4×2.

☺ **Q 4** (a) $\begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 27 & -34 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 17 & 4 \\ -12 & 13 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 5 & 9 & -6 \\ -5 & -33 & 32 \end{pmatrix}$.

☺ **Q 5** $x = 1$.

☺ **Q 6** (a) $x = 0$; (b) $x = -2$.

☺ **Q 7** Por exemplo, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

☺ **Q 8** Realize o produto $A \cdot A$ e veja que resultará em A.

☺ **Q 9** Calcule $B^2 = B \cdot B$, depois $B^3 = B^2 \cdot B$, depois $B^4 = B^3 \cdot B$, etc, até que $B^n = B^{n-1} \cdot B = 0$.

☺ **Q 10** $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$.

☺ **Q 11** $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$

☺ **Q 12** (a) SPD, $(x, y, z) = (1, 2, -3)$; (b) SPI, $(-a, a, a);\ a \in \mathbb{R}$; (c) SPI, $(a-1, b, b, a);\ a, b \in \mathbb{R}$; (d) SI, não existe solução; (e) SPI, $(-3a, 0, a);\ a \in \mathbb{R}$; (f) SPD, $(x, y, z, t) = (1, -1, 2, -2)$.

☺ **Q 13** (a) $X = D^{-1}BC$; (b) $X = C^T$; (c) $X = DACD^{-1}$; (d) $X = C^{-1}B$.

☺ **Q 14** $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

☺ **Q 15** (a) $k \neq -6$ SI, $k = -6$ SPD; (b) $k = 0$ SI, $k \neq 0$ ou $k \neq 1$ SPD; (c) $k = 2$ SPI, $k \neq 2$ SPD.

☺ **Q 16** (a) 10; (b) 49; (c) -6; (d) 48; (e) $a^2 + b^2$; (f) $abcd$.

☺ **Q 17** (a) $x = 9$; (b) $x + y = 1$, por exemplo, $x = 2$ e $y = -1$; (c) $x = 0$ ou $x = -2$ (checar!!!).

☺ **Q 18** (a) $(x, y, z) = (5, -2, -2)$; (b) $(x, y, z) = (0, 0, 0)$; (c) $(x, y, z) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8})$; (d) $(a, b, c, d) = (5, 8, 3, -1)$.

☺ **Q 19** (a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & -1/6 \\ 2/27 & -1/27 & 4/27 \\ -8/27 & 4/27 & 11/27 \end{pmatrix}$; (c) C não é inversível.

☺ **Q 20** $(x, y, z) = (1, -1, 2)$.

☺ **Q 21** (a) F, veja as propriedades dos determinantes; (b) idem (a); (c) F, abra a conta e veja que o produto não comuta; (d) idem (c).

☺ **Q 22** (a) ...; (b) Veja que $(A \cdot A^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = A \cdot A^T$; (c) Não. Conta semelhante ao do item (b); (d) Sim.

Material escrito em LaTeX 2$_\varepsilon$, Cattai, 24 de julho de 2016