B

Gabarito das Avaliações

Conteúdo

B.1 Segundo Semestre de 2006

B.1.1 Primeira Prova

Questão 1.

Vamos verificar se o elemento neutro da adição $0_{I\!R^2}$ pertence ao subconjunto $U \cup W$ e se o subconjunto $U \cup W$ é fechado com relação à operação de adição de elementos e com relação à operação de multiplicação por escalar.

Como U e W são subespaços vetoriais de $I\!R^2$, temos que $0_{I\!R^2}$ pertence tanto a U quanto a W. Logo, $0_{I\!R^2} \in U \cup W$. Note que, $U \cap W = \{ 0_{I\!R^2} \}$.

Considere um elemento $v \in U \cup W$, isto é, $v \in U$ ou $v \in W$. Assim, para qualquer $\lambda \in I\!R$ temos que $\lambda v \in U \cup W$, pois $\lambda v \in U$ ou $\lambda v \in W$.

Finalmente, tomando os elementos $v_1, v_2 \in U \cup W$, temos três possibilidades.

A primeira, consideramos que $v_1, v_2 \in U$. Como U é um subespaço vetorial de $I\!R^2$, temos que $v_1 + v_2 \in U$. Logo, $v_1 + v_2 \in U \cup W$.

A segunda, consideramos que $v_1, v_2 \in W$. Como W é um subespaço vetorial de $I\!R^2$, temos que $v_1 + v_2 \in W$. Logo, $v_1 + v_2 \in U \cup W$.

A terceira, consideramos que $v_1 \in U$ e $v_2 \in W$. Assim, temos que

$$v_1 = (x_1 \,,\, 3x_1) \qquad \text{e} \qquad v_2 = (x_2 \,,\, -2x_2) \,.$$

Logo, $v_1 + v_2 = (x_1 + x_2 \,,\, 3x_1 - 2x_2)$. Portanto, temos que

$$v_1 + v_2 \notin U \qquad \text{e} \qquad v_1 + v_2 \notin W \,.$$

Desse modo, $v_1 + v_2 \notin U \cup W$. Assim, mostramos que $U \cup W$ não é um subespaço vetorial de $I\!R^2$, pois o subconjunto $U \cup W$ não é fechado com relação à operação de adição de elementos.

Questão 2.

Inicialmente vamos provar que

$$\{\, u,\, v,\, w \,\} \;\text{LI} \quad \Longrightarrow \quad \{\, u+v,\, u+w,\, v+w \,\} \;\text{LI}\,.$$

Tomando a combinação linear nula

$$a\,(u + v) \;+\; b\,(u + w) \;+\; c\,(v + w) \;=\; 0_V$$

obtemos

$$(a + b)u \;+\; (a + c)v \;+\; (b + c)w \;=\; 0_V\,.$$

Utilizando a hipótese que o conjunto $\{\, u,\, v,\, w \,\}$ é linearmente independente, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

que possui somente a solução trivial $a = b = c = 0$. Portanto, provamos que o conjunto $\{\, u+v,\, u+w,\, v+w \,\}$ é linearmente independente.

Finalmente, vamos provar que

$$\{ u+v,\, u+w,\, v+w \} \ \text{LI} \quad \Longrightarrow \quad \{ u,\, v,\, w \} \ \text{LI} \,.$$

Equivalentemente, podemos provar que

$$\{ u,\, v,\, w \} \ \text{LD} \quad \Longrightarrow \quad \{ u+v,\, u+w,\, v+w \} \ \text{LD} \,.$$

Tomando a combinação linear nula

$$a\,(u + v) \;+\; b\,(u + w) \;+\; c\,(v + w) \;=\; 0_V$$

obtemos

$$(a + b)u \;+\; (a + c)v \;+\; (b + c)w \;=\; 0_V \,.$$

Utilizando a hipótese que o conjunto $\{ u,\, v,\, w \}$ é linearmente dependente, temos que os coeficientes da combinação linear acima não são todos nulos, isto é,

$$(a + b) \quad , \quad (a + c) \qquad \text{e} \qquad (b + c)$$

não são todos nulos. Assim, existem escalares $a,\, b,\, c \,\in\, \mathbb{F}$ não todos nulos tais que

$$a\,(u + v) \;+\; b\,(u + w) \;+\; c\,(v + w) \;=\; 0_V \,.$$

Portanto, mostramos que o conjunto $\{ u+v,\, u+w,\, v+w \}$ é linearmente dependente.

Assim, provamos que

$$\{ u+v,\, u+w,\, v+w \} \ \text{LI} \quad \Longrightarrow \quad \{ u,\, v,\, w \} \ \text{LI} \,.$$

completando a resolução da questão.

Questão 3.

(a)

Vamos determinar uma base para o subespaço U. Note que, toda matriz $A \in U$ é escrita da seguinte forma:

$$A = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{para} \qquad a, b, c \in I\!R .$$

Tomando a combinação linear nula

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obtemos que $a = b = c = 0$, são os únicos escalares que satisfazem o sistema acima. Assim, mostramos que o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base para o subespaço U, pois gera o subespaço U e é linearmente independente. Logo, temos que $dim(U) = 3$.

Vamos determinar uma base para o subespaço W. Note que, toda matriz $A \in W$ é escrita da seguinte forma:

$$A = a \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{para} \qquad a, b \in I\!R .$$

Tomando a combinação linear nula

$$a \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obtemos que $a = b = 0$, são os únicos escalares que satisfazem o sistema acima. Assim, mostramos que o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base para o subespaço W, pois gera o subespaço W e é linearmente independente. Logo, temos que $dim(U) = 2$.

Agora, vamos determinar uma base para o subespaço $U \cap W$. Considere uma matriz $A \in U \cap W$, isto é, $A \in U$ e $A \in W$. Assim, temos que A é escrita como:

$$A = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = d\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + e\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para $a, b, c, d, e \in I\!\!R$.

Desse modo, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = d \\ c = -d \\ a = e \end{cases}$$

cuja solução é $a = 0$, $b = d$, $c = -d$ e $e = 0$. Portanto, toda matriz $A \in U \cap W$ é escrita como

$$A = d\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{para} \quad d \in I\!\!R\,.$$

Assim, temos que

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base para o subespaço $U \cap W$. Logo, $dim(U \cap W) = 1$.

Finalmente, vamos determinar uma base para o subespaço $U + W$. Pelos resultados obtidos acima, sabemos que

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) = 4\,,$$

e que o subespaço $U + W$ tem por um sistema de geradores o seguinte conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Podemos observar que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos que o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ , \ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base para o subespaço $U + W$.

(b)

Como $U + W$ é um subespaço de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ e $dim(U + W) = dim(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}))$, temos que $U + W = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, entretanto, não como soma direta, pois $U \cap W \neq \left\{ 0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})} \right\}$.

Questão 4.

(a)
Conhecendo a matriz de mudança de base $[I]_{\alpha}^{\gamma}$, temos que

$$\begin{cases} u_1 = v_1 + 4v_2 \\ u_2 = \quad\; - 2v_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos

$$\begin{cases} v_1 = u_1 + 2u_2 \\ v_2 = \quad\; - \dfrac{1}{2}u_2 \end{cases}$$

Logo, $v_1 = (-3, 5)$ e $v_2 = (1, -1)$, que são os elementos da base ordenada α.

(b)
Conhecendo a matriz de mudança de base $[I]_{\alpha}^{\gamma}$ e o vetor de coordenadas $[u]_{\alpha}$, temos que

$$[u]_{\alpha} = [I]_{\alpha}^{\gamma}\,[u]_{\gamma}.$$

Chamando $[u]_{\gamma} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

cuja única solução é $a = b = 1$. Portanto, temos que

$$u = a\,u_1 + b\,u_2 = u_1 + u_2 = (-1, 3).$$

Observe que podemos obter o elemento u a partir do vetor de coordenadas $[u]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e da base ordenada α obtida no item **(a)**. Desse modo, temos que

$$u = v_1 + 2v_2 = (-1, 3).$$

B.1.2 Segunda Prova

Questão 1.

Da condição **(a)**, temos que $T(1 + x) = (0,0,0)$.

Da condição **(b)**, isto é, $q(x) = x \notin Ker(T)$, implica que o elemento $r(x) = 1$ não pode pertencer ao $Ker(T)$, pois podemos escrever $q(x) = p(x) - r(x)$. Claramente, se o elemento $r(x) \in Ker(T)$, então $q(x) \in Ker(T)$, o que contradiz a hipótese.

Da condição **(c)**, isto é, $Im(T) = [(1,1,1)]$, temos que $dim(\, Im(T)\,) = 1$.

Logo, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, devemos ter $dim(\, Ker(T)\,) = 2$, pois $dim(\, \mathcal{P}_2(I\!\!R)\,) = 3$.

Assim, podemos considerar $T : \mathcal{P}_2(I\!\!R) \longrightarrow I\!\!R^3$, com $\{\, 1 + x \,,\, x^2 \,\}$ uma base ordenada para $Ker(T)$, definida da seguinte forma:

$$T(1 + x) = (0,0,0) \quad , \quad T(x^2) = (0,0,0) \quad , \quad T(x) = (1,1,1) \,,$$

onde estamos escolhendo $\gamma = \{\, 1 + x \,,\, x^2 \,,\, x \,\}$ uma base ordenada para $\mathcal{P}_2(I\!\!R)$, que foi obtida completando a base do $Ker(T)$.

Finalmente, vamos determinar a expressão da transformação linear T definida acima.

Para isso, tomamos um elemento genérico $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(I\!\!R)$ que é representado com relação à base ordenada γ de $\mathcal{P}_2(I\!\!R)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} p(x) &= d_1(\, 1 + x \,) + d_2x^2 + d_3x \\ &= d_1 + (d_1 + d_3)x + d_2x^2 \,, \end{aligned}$$

obtendo o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} \phantom{d_1 + {}} d_1 = a \\ d_1 + d_3 = b \\ \phantom{d_1 + {}} d_2 = c \,, \end{cases}$$

que possui somente a solução $d_1 = a$, $d_2 = c$ e $d_3 = b - a$. Desse modo, temos que

$$p(x) = a(\, 1 + x \,) + cx^2 + (b - a)x \,.$$

Agora, fazendo $T(p(x)) = T(a + bx + cx^2)$, obtemos

$$T(a + bx + cx^2) = a\,T(1+x) + c\,T(x^2) + (b-a)\,T(x) = (b-a)(1,1,1)\,.$$

Assim, encontramos uma transformação linear T com as propriedades pedidas.

Questão 2.

(a) Sabendo que $T(v) = v$ para todo $v \in S$ e que $T(v_4) = v_1 + v_3$, obtemos

$$\begin{aligned} T(v_1) &= v_1 &&= 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4 \\ T(v_2) &= v_2 &&= 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 + 0v_4 \\ T(v_3) &= v_3 &&= 0v_1 + 0v_2 + 1v_3 + 0v_4 \\ T(v_4) &= v_1 + v_3 &&= 1v_1 + 0v_2 + 1v_3 + 0v_4 \,. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$[T]_\gamma^\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Conhecemos as matrizes $[I]_\gamma^\beta$ e $[T]_\gamma^\gamma$. Assim, para obter $[T(e_1)]_\gamma$, vamos determinar inicialmente $[e_1]_\gamma$ da seguinte forma:

$$[e_1]_\gamma = [I]_\gamma^\beta \, [e_1]_\beta \quad \Longrightarrow \quad [e_1]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, vamos calcular

$$[T(e_1)]_\gamma = [T]_\gamma^\gamma \, [e_1]_\gamma \quad \Longrightarrow \quad [T(e_1)]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

o que completa a resolução da questão.

Questão 3.

(a) Dado um polinômio $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, vamos calcular

$$T(p(x)) = p'(x) + p(x) = (b+a) + (b+2c)x + cx^2 ,$$

para em seguida calcular

$$\begin{aligned}(P \circ T)(p(x)) &= P(T(p(x)) = P(\,(b+a) + (b+2c)x + cx^2)\,) \\ &= (\,a + 2b + 2c\,,\,c\,,\,a - 2c\,)\,.\end{aligned}$$

Portanto, a transformação linear $P \circ T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por:

$$(P \circ T)(p(x)) = (\,a + 2b + 2c\,,\,c\,,\,a - 2c\,)$$

para todo $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(b) Considerando $\beta = \{\,1\,,\,x\,,\,x^2\,\}$ a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\gamma = \{\,e_1,\,e_2,\,e_3\,\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$, vamos determinar a matriz $[P \circ T]^\beta_\gamma$.

Para isso, vamos calcular

$$\begin{aligned}(P \circ T)(1) &= (1,0,1) &&= 1e_1 + 0e_2 + 1e_3 \\ (P \circ T)(x) &= (2,0,0) &&= 2e_1 + 0e_2 + 0e_3 \\ (P \circ T)(x^2) &= (2,1,-2) &&= 2e_1 + 1e_2 - 2e_3\,.\end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$[P \circ T]^\beta_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(c) Vamos verifique se P é um isomorfismo de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^3$.

Para isso, basta verificar se $Ker(P) = \{ 0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} \}$.

Tomando um elemento $p(x) = a + bx + cx^2 \in Ker(P)$, isto é,

$$P(a + bx + cx^2) = (a+b\,,\,c\,,\,a-b) = (0,0,0)\ ,$$

obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ \quad\;\; c = 0 \\ a - c = 0\ , \end{cases}$$

que possui somente a solução trivial $a = b = c = 0$. Logo, $Ker(P) = \{ 0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} \}$.

Portanto, temos que P é um isomorfismo de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^3$.

Vamos determinar o isomorfismo inverso. Dado um elemento $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$P^{-1}(a,b,c) = d_1 + d_2x + d_3x^2\ ,$$

temos que

$$P(d_1 + d_2x + d_3x^2) = (a,b,c) \qquad \Longrightarrow \qquad (\,d_1 + d_2\,,\,d_3\,,\,d_1 - d_2\,) = (a,b,c)\ .$$

Assim, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = a \\ \qquad\; d_3 = b \\ d_1 - d_2 = c\ , \end{cases}$$

que possui somente a solução

$$d_1 = \frac{a+c}{2} \quad , \quad d_2 = \frac{a-c}{2} \qquad \text{e} \qquad d_3 = b\ .$$

Portanto, obtemos

$$P^{-1}(a,b,c) = \left(\frac{a+c}{2}\right) + \left(\frac{a-c}{2}\right)x + bx^2\ ,$$

o que completa a resolução da questão.

Questão 4.

(a) Sabemos que $dim(V) = n$ e que $Im(T) = Ker(T)$.

Assim, podemos afirmar que $dim(\,Im(T)\,) = dim(\,Ker(T)\,) = m$.

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que

$$dim(\,Im(T)\,) \;+\; dim(\,Ker(T)\,) \;=\; dim(V)\,.$$

Portanto, temos que $n = 2m$. Logo, podemos concluir que n é par e que $m = \dfrac{n}{2}$.

(b) Considerando $V = \mathbb{R}^4$, temos que $dim(\,Im(T)\,) = dim(\,Ker(T)\,) = 2$.

Tomando a base canônica $\beta = \{\,e_1,\, e_2,\, e_3,\, e_4\,\}$ para $\mathbb{R}^4$, vamos definir um operador linear T sobre $\mathbb{R}^4$, com as propriedades acima, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T(e_1) &= (0,0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^4} \\ T(e_2) &= (0,0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^4} \\ T(e_3) &= (1,0,0,0) = e_1 \\ T(e_4) &= (0,1,0,0) = e_2\,. \end{aligned}$$

Podemos observar facilmente que $\{\,e_1,\, e_2\,\}$ é uma base para o subespaço $Ker(T)$ e também para o subespaço $Im(T)$. Logo, temos que

$$dim(\,Ker(T)\,) \;=\; dim(\,Im(T)\,) \;=\; 2 \qquad \text{e} \qquad Ker(T) \;=\; Im(T)\,.$$

Portanto, o operador linear T, definido acima, possui as propriedades desejadas. Podemos verificar facilmente que

$$T(x,y,z,t) \;=\; (z,t,0,0) \qquad \text{para todo} \qquad (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\,.$$

B.1.3 Terceira Prova

Questão 1.

Seja $w \in T(E_\lambda)$, isto é, existe um elemento $v \in E_\lambda$ tal que $w = T(v)$. Como $v \in E_\lambda$, temos que $w = T(v) = \lambda v$. Logo, $w = \lambda v$.

Aplicando o operador T no elemento w, obtemos $T(w) = \lambda T(v)$.

Como $w = T(v)$, temos que $T(w) = \lambda w$. Assim, podemos concluir que $w \in E_\lambda$. Portanto, provamos que $T(E_\lambda) \subset E_\lambda$.

Questão 2.

(a) Temos somente um autovalor λ associado ao autovetor v. Podemos observar que o autovalor λ é unicamente determinado pelo operador T e pelo autovetor v. De fato, considere que λ e λ' são autovalores do operador T associados ao autovetor v, isto é,

$$T(v) = \lambda v \qquad \text{e} \qquad T(v) = \lambda' v \,.$$

Assim, temos que

$$\lambda v - \lambda' v = 0_V \implies (\lambda - \lambda')v = 0_V \implies (\lambda - \lambda') = 0 \implies \lambda = \lambda' \,,$$

pois $v \neq 0_V$.

(b) Sim. De fato, se $\lambda = 0$ é um autovalor de T e v um autovetor associado, temos que $v \in Ker(T)$, pois $T(v) = \lambda v = 0_V$. Logo, como $v \neq 0_V$, $Ker(T) \neq \{ 0_V \}$. Portanto, T não é um operador injetor.

Reciprocamente, se T não é um operador injetor, sabemos que $Ker(T) \neq \{ 0_V \}$. Logo, os elementos não nulos $v \in Ker(T)$ são autovetores do operador T associados ao autovalor $\lambda = 0$, pois $T(v) = 0_V = \lambda v$.

(c) Seja $\{ v_1 , \cdots , v_{n-1} \}$ uma base para o subespaço V_{λ_1}, desde que $dim(V_{\lambda_1}) = n - 1$. Sabemos que cada elemento v_j é um autovetor de T associado ao autovalor λ_1, pois

$$T(v_j) = \lambda_1 v_j \qquad \text{para} \qquad j = 1 , \cdots , (n-1) \,.$$

Assim, temos $(n - 1)$ autovetores T linearmente independentes. Tomando v_n o autovetor de T associado ao autovalor λ_2, temos que o conjunto $\{ v_1 , \cdots , v_{n-1} , v_n \}$ também é linearmente independente, pois o autovetor $v_n \notin V_{\lambda_1}$.

Desse modo, temos uma base ordenada $\gamma = \{ v_1 , \cdots , v_{n-1} , v_n \}$ de autovetores de T para o espaço vetorial V. Assim, sabemos que $[T]_\gamma^\gamma = diag(\lambda_1, \lambda_1, \cdots \lambda_1, \lambda_2)$. Logo, T é um operador diagonalizável.

Questão 3.

(a) Com relação à base canônica $\beta = \{ (1,0), (0,1) \}$ de $I\!R^2$, temos que

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sabemos que o polinômio característico do operador T é o polinômio característico da matriz $A = [T]_\beta^\beta$ que é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(5 - \lambda) + 6 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 .$$

Portanto, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$ são os autovalores do operador T.

Vamos determinar os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$. Desse modo, temos que encontrar os elementos não nulos do núcleo do operador $T - \lambda_1 I$.

Assim, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \iff x - 2y = 0$$

que possui como solução $x = 2y$ para $y \in I\!R$ não nulo.

Desse modo, os autovetores do operator T associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$ são do tipo $v = (2y, y)$ para $y \in I\!R$ não nulo. Assim, podemos escolher $v_1 = (2,1)$ o autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$.

De modo análogo, para determinar os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$, temos que encontrar os elementos não nulos do núcleo do operador $T - \lambda_2 I$.

Assim, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \iff x - 3y = 0$$

que possui como solução $x = 3y$ para $y \in I\!R$ não nulo.

Desse modo, os autovetores do operator T associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$ são do tipo $v = (3y, y)$ para $y \in I\!R$ não nulo. Assim, podemos escolher $v_2 = (3,1)$ o autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_2 = 3$.

(b) Do item **(a)**, podemos observar facilmente que

$$V_{\lambda_1} = [(2,1)] \qquad \text{e} \qquad V_{\lambda_2} = [(3,1)]$$

são os autoespaços do operador T associados aos autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, respectivamente.

(c) Do item **(a)**, podemos concluir que T é um operador diagonalizável. Logo, a matriz $A = [T]_\beta^\beta$ é uma matriz diagonalizável.

Além disso, sabemos que os autovetores da matriz A são

$$X_1 = [v_1]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad X_2 = [v_2]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

associados aos autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, respectivamente.

Temos que a matriz A é similar a matriz diagonal $\Lambda = diag(2,3)$, onde a matriz invertível P que realiza a transformação de similaridade é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, temos que $A = P\,\Lambda\,P^{-1}$. Logo, sabemos que $A^8 = P\,\Lambda^8\,P^{-1}$ e que a matriz do operador T^8 com relação à base canônica β é dada por $[T^8]_\beta^\beta = A^8$.

Temos que a matriz A^8 é obtida da seguinte forma:

$$A^8 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^8 & 0 \\ 0 & 3^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 6561 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19171 & -37830 \\ 6305 & -12354 \end{bmatrix}$$

Finalmente, temos que

$$[T^8(u)]_\beta = [T^8]_\beta^\beta [u]_\beta \qquad \text{para} \qquad u = (x,y) \in I\!R^2 .$$

Portanto, a expressão explícita do operador linear T^8 é dada por:

$$T^8(x,y) = (\,19171x - 37830y\,,\,6305x - 12354y\,) \qquad \text{para} \qquad (x,y) \in I\!R^2 .$$

Questão 4.

Da condição (a), sabemos que

$$Ker(T) = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y-z+t = 0 \quad \text{e} \quad z-t = 0 \} .$$

Podemos verificar facilmente que $\{ (-1,1,0,0) , (0,0,1,1) \}$ é uma base para $Ker(T)$.

Desse modo, podemos concluir que $\lambda_1 = 0$ é um autovalor de T com multiplicidade algébrica igual a 2 e multiplicidade geométrica também igual a 2, pois $V_\lambda = Ker(T)$ e $dim(Ker(T)) = 2$. Assim, podemos escolher $v_1 = (-1,1,0,0)$ e $v_2 = (0,0,1,1)$ os autovetores de T associados aos autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$.

Da condição (b), sabemos que $v_3 = (0,0,1,0)$ é um autovetor do operador T associado ao autovalor $\lambda_3 = 2$. De fato, $T(v_3) = \lambda_3 v_3$, isto é, $T(0,0,1,0) = 2(0,0,1,0)$.

Podemos observar que o conjunto $\{ v_1 , v_2 , v_3 \}$ é linearmente independente em $\mathbb{R}^4$. Assim, estamos precisando de mais um elemento $v_4 \in \mathbb{R}^4$ para autovetor do operador T de modo que $\gamma = \{ v_1 , v_2 , v_3 , v_4 \}$ seja uma base de autovetores para $\mathbb{R}^4$.

Da condição (c), sabemos que o elemento $(0,1,0,0) \in Im(T)$. Assim, podemos escolher $v_4 = (0,1,0,0)$ como um autovetor do operador T associado ao autovalor $\lambda_4 = -3$.

Portanto, temos que

$$v_1 = (-1,1,0,0) \quad , \quad v_2 = (0,0,1,1) \quad , \quad v_3 = (0,0,1,0) \quad \text{e} \quad v_4 = (0,1,0,0)$$

são os autovetores do operador linear T associados aos autovalores $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$ e $\lambda_4 = -3$, respectivamente. Desse modo, $\gamma = \{ v_1 , v_2 , v_3 , v_4 \}$ é uma base de autovetores para $\mathbb{R}^4$ e sabemos que $[T]^\gamma_\gamma = diag(0,0,2,-3)$.

Finalmente, vamos determinar a expressão explícita do operador linear T diagonalizável que satisfaz as condições desejadas. Para isso, vamos representar um elemento genérico $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ em relação à base de autovetores $\gamma = \{ v_1 , v_2 , v_3 , v_4 \}$, isto é,

$$(x,y,z,t) = a(-1,1,0,0) + b(0,0,1,1) + c(0,0,1,0) + d(0,1,0,0) .$$

Podemos verificar facilmente que $a = -x$, $b = t$, $c = z - t$ e $d = x + y$.

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} T(x,y,z,t) &= -xT(-1,1,0,0) \,+\, tT(0,0,1,1) \,+\, (z-t)T(0,0,1,0) \,+\, (x+y)T(0,1,0,0) \\ &= (0\,,\, -3x-3y\,,\, 2z-2t\,,\, 0) \end{aligned}$$

B.1.4 Segunda Chamada

Questão 1.

(a) A afirmação é **Falsa**.
Considere que exista uma transformação linear injetora T de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^3$. Desse modo, pelo **Teorema do núcleo e da imagem**, temos $dim(\,Im(T)\,) = 4$, pois $Ker(T) = \{\, 0_V \,\}$. O que não é possível, pois $Im(T)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $dim(\,\mathbb{R}^3\,) = 3$. Logo, não existe uma transformação linear injetora T de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^3$.

(b) A afirmação é **Verdadeira**.
Considere uma transformação linear T de $\mathbb{R}^4$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $dim(\,Ker(T)\,) = 1$. Pelo **Teorema do núcleo e da imagem**, obtemos $dim(\,Im(T)\,) = 3$. Como $Im(T)$ é um subespaço de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, tem–se que $Im(T) = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, pois $dim(\,\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\,) = 3$. Logo, existe uma transformação linear T sobrejetora de $\mathbb{R}^4$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(c) A afirmação é **Falsa**.
Considere o conjunto linearmente dependente S em $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$S = \{\, (1,1,0)\,,\, (-1,1,0)\,,\, (1,3,0)\,\}\,.$$

Entretanto, o subconjunto $\{\, (1,1,0)\,,\, (-1,1,0)\,\}$ é linearmente independente em $\mathbb{R}^3$.

(d) A afirmação é **Verdadeira**.
De fato, $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ e $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ são espaços vetoriais de mesma dimensão. Desse modo, são espaços vetoriais isomorfos.

(e) A afirmação é **Falsa**.
Considerando que $U \cap W = \{\, 0_V \,\}$, pelo Teorema da dimensão da soma de subespaços, temos que

$$dim(\,U + W\,) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) > \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n\,,$$

que é uma contradição, pois $U + W$ é um subespaço de V. Logo, podemos concluir que

$$U \cap W \neq \{\, 0_V \,\}\,.$$

Questão 2.

(a) Podemos verificar que a matriz nula 0_n pertence ao subconjunto U, pois 0_n é uma matriz simétrica e tem traço nulo.

Considerando as matrizes $A\,,\,B \in U$, temos

$$(A + B)^t = A^t + B^t = A + B \qquad \text{e} \qquad tr(A + B) = tr(A) + tr(B) = 0\,.$$

Portanto, a matriz $A + B \in U$.

Finalmente, considerando $A \in U$ e $\lambda \in I\!R$, temos

$$(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A \qquad \text{e} \qquad tr(\lambda A) = \lambda tr(A) = 0\,.$$

Portanto, a matriz $\lambda A \in U$.

Assim, mostramos que o subconjunto U é um subespaço de $I\!M_n(I\!R)$.

(b) Como $A^t = A$ e $tr(A) = 0$, uma matriz genérica $A \in I\!M_3(I\!R)$ com essas propriedades, pode ser escrita da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & (-a-b) \end{bmatrix},$$

para $a,\, b,\, x,\, y,\, z \in I\!R$.

Por sua vez, podemos escrever

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & (-a-b) \end{bmatrix} \\ &= a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Desse modo, escrevemos $A = aA_1 + xA_2 + yA_3 + bA_4 + zA_5$, onde o conjunto

$$\{\, A_1\,,\, A_2\,,\, A_3\,,\, A_4\,,\, A_5 \,\}$$

é linearmente independente e gera o subespaço U de $I\!M_3(I\!R)$. Assim, encontramos uma base para U.

Questão 3.

(a) Interpretando a matriz $[T]^{\beta}_{\gamma}$, obtemos

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (1,0,1) - 2(0,1,0)) &&= (1,-2,1) \\ T(0,1) &= -(1,0,1) + (-1,0,1) + 3(0,1,0)) &&= (-2,3,0) \end{aligned}$$

(b) Utilizando o resultado do item **(a)**, obtemos

$$T(x,y) = T(x(1,0) + y(0,1)) = xT(1,0) + yT(0,1) = x(1,-2,1) + y(-2,3,0) .$$

Desse modo, podemos verificar facilmente que $\{ (1,-2,1) , (-2,3,0) \}$ é uma base para o subespaço $Im(T)$, pois é um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^3$.

Assim, temos que

$$T(x,y) = (x - 2y \, , \, -2x + 3y \, , \, x) \qquad \text{para} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(c) Para verificar se T é uma transformação injetora, vamos determinar o núcleo da transformação T. Desse modo, vamos encontrar os elementos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$T(x,y) = (0,0,0) \quad \Longrightarrow \quad (x - 2y \, , \, -2x + 3y \, , \, x) = (0,0,0) .$$

Assim, temos que determinar a solução do sistema linear homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & 2y & = & 0 \\ -2x & + & 3y & = & 0 \\ x & & & = & 0 \end{array} \right.$$

Obtemos, $x = y = z = 0$.

Portanto, $Ker(T) = \{ 0_V \}$. Logo, a transformação linear T é injetora.

Questão 4.

Seja T o operador linear sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$T(a + bx + cx^2) = (3a + 2b + c) + (b - c)x + 2cx^2 .$$

Inicialmente, vamos determinar a matriz $A = [T]_\beta^\beta$, onde $\beta = \{ 1 , x , x^2 \}$ é a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Temos que

$$T(1) = 3 \quad , \quad T(x) = 2 + x \qquad \text{e} \qquad T(x^2) = 1 - x + 2x^2 .$$

Portanto, obtemos

$$A = [T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Desse modo, o polinômio característico do operador linear T é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda) .$$

Logo, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 1$ são os autovalores do operador T. Como os autovalores são distintos, sabemos que T é um operador linear diagonalizável.

Os autovetores da matriz $A = [T]_\beta^\beta$ são

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

associados aos autovalores $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 1$, respectivamente.

Sabemos que

$$[p_1(x)]_\beta = X_1 \quad , \quad [p_2(x)]_\beta = X_2 \qquad \text{e} \qquad [p_3(x)]_\beta = X_3 ,$$

onde $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são os autovetores do operador T associados aos autovalores $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 1$, respectivamente. Logo, obtemos

$$p_1(x) = 1 \quad , \quad p_2(x) = 1 - x + x^2 \qquad \text{e} \qquad p_3(x) = -1 + x .$$

Finalmente, temos que

$$V_{\lambda_1} = [1] \quad , \quad V_{\lambda_2} = [1 - x + x^2] \qquad \text{e} \qquad V_{\lambda_3} = [-1 + x]$$

são os autoespaços do operador T.

B.1.5 Exame

Questão 1.

(a) Os elementos $(x, y, z, t) \in U$ podem ser escritos como:

$$(x, y, z, t) = y(-1, 1, 0, 0) + t(0, 0, 1, 1) \qquad \text{para} \qquad y, t \in \mathbb{R} .$$

Assim, o conjunto $\{ (-1, 1, 0, 0) , (0, 0, 1, 1) \}$ é uma base para o subespaço U.

Os elementos $(x, y, z, t) \in W$ podem ser escritos como:

$$(x, y, z, t) = y(-1, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1) \qquad \text{para} \qquad y, z, t \in \mathbb{R} .$$

Assim, o conjunto $\{ (-1, 1, 0, 0) , (-1, 0, 1, 0) , (0, 0, 0, 1) \}$ é uma base para W.

Podemos verificar que o conjunto $\{ (-1, 1, 0, 0) , (0, 0, 1, 1) , (-1, 0, 1, 0) , (0, 0, 0, 1) \}$ é uma base para o subespaço $U + W$.

(b) Pelo Teorema da dimensão da soma de subespaços, temos que

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) .$$

Como $dim(U) = 2$, $dim(W) = 3$ e $dim(U + W) = 4$, obtemos $dim(U \cap W) = 1$. Logo, o subespaço $U + W$ não é uma soma direta dos subespaços U e W.

(c) Como $dim(U \cap W) = 1$ e o elemento $(-1, 1, 0, 0)$ pertence tanto ao subespaço U quanto ao subespaço W, podemos concluir que $U \cap W = [(-1, 1, 0, 0)]$.

(d) Vamos determinar o operador linear T sobre $\mathbb{R}^4$ de modo que $Ker(T) = W$ e $Im(T) = U \cap W$. Pelo item **(a)**, temos que $\{ (-1, 1, 0, 0) , (-1, 0, 1, 0) , (0, 0, 0, 1) \}$ é uma base para o subespaço $Ker(T)$. Completando a base do núcleo de T, obtemos que $\{ (-1, 1, 0, 0) , (-1, 0, 1, 0) , (0, 0, 0, 1) , (0, 0, 1, 0) \}$ é uma base para $\mathbb{R}^4$. Assim, o operador linear T é determinado por:

$$\begin{aligned} T(-1, 1, 0, 0) &= (0, 0, 0, 0) \\ T(-1, 0, 1, 0) &= (0, 0, 0, 0) \\ T(0, 0, 0, 1) &= (0, 0, 0, 0) \\ T(0, 0, 1, 0) &= (-1, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

o que completa a resolução da questão.

Questão 2.

Vamos verificar se o subconjunto U é um subespaço de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Podemos verificar facilmente que o polinômio identicamente nulo, isto é, $p(x) = 0$ para todo x, que é o elemento neutro da operação de adição, pertence ao subconjunto U.

Tomando os elemento $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, isto é,

$$p(1) + p(-1) = 0 \qquad \text{e} \qquad q(1) + q(-1) = 0 \,,$$

temos que

$$(p + q)(1) + (p + q)(-1) = (\, p(1) + p(-1)\,) + (\, q(1) + q(-1)\,) = 0 \,.$$

Portanto, o elemento $(\, p(x) + q(x)\,) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Agora, tomando o elemento $p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que

$$(\lambda p)(1) + (\lambda p)(-1) = \lambda p(1) + \lambda p(-1) = \lambda(\, p(1) + p(-1)\,) = 0 \,.$$

Portanto, o elemento $\lambda p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Assim, mostramos que o subconjunto U é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Finalmente, vamos determinar uma base para o subespaço U. Para isso, consideramos um elemento $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e, impondo a condição $p(1) + p(-1) = 0$, obtemos

$$(\, a + b + c + d\,) + (\, a - b + c - d\,) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a + c = 0 \,.$$

Assim, temos que $a = -c$ com $b, c, d \in \mathbb{R}$.

Desse modo, os elementos $p(x) \in U$ podem ser representados da seguinte forma:

$$p(x) = c(-1 + x^2) + bx + dx^3 \qquad \text{para} \qquad b, c, d \in \mathbb{R} \,.$$

Portanto, o conjunto $\{ -1 + x^2 \,, x \,, x^3 \}$ é uma base para o subespaço U.

Questão 3.

(a) Utilizando a matriz $[T]^{\alpha}_{\gamma}$, obtemos

$$\begin{aligned} T(0,1) &= -1(-1,0) + 0(0,-1) = (1,0) \\ T(1,0) &= -1(-1,0) - 1(0,-1) = (1,1) \end{aligned}$$

Assim, temos que $T(0,1) = (1,0)$ e $T(1,0) = (1,1)$.

(b) Representando o elemento $(0,1)$ da base α em relação à base γ, temos

$$(0,1) = a(-1,0) + b(0,-1) .$$

Logo, $a = 0$ e $b = -1$.

Representando o elemento $(1,0)$ da base α em relação à base γ, temos

$$(1,0) = c(-1,0) + d(0,-1) .$$

Logo, $c = -1$ e $d = 0$. Portanto, obtemos

$$[I]^{\alpha}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

que é a matriz de mudança da base ordenada α para a base ordenada γ.

(c) Utilizando o resultado do item **(b)**, obtemos

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T(x(1,0) + y(0,1)) \\ &= xT(1,0) + yT(0,1) \\ &= x(1,1) + y(1,0) \\ &= (x+y\,,\,x) \end{aligned}$$

Portanto, $T(x,y) = (x+y\,,\,x)$ para todo $(x,y) \in I\!R^2$.

(d) Utilizando o resultado do item **(c)**, obtemos

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $\beta = \{ (1,0), (0,1) \}$ é a base canônica de $I\!R^2$.

Sabemos que a matriz $[T^2]_{\beta}^{\beta}$ é dada por:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico do operador linear T^2 é dado por:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1 .$$

Portanto, os autovalores do operador T^2 são

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} .$$

Como os autovalores de T são distintos, sabemos que T é um operador diagonalizável.

Questão 4.

(a) Considerando que a matriz B é similar à matriz A, existe uma matriz P invertível tal que $B = P^{-1}AP$. Tomando o polinômio característico da matriz B, obtemos

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(\, B - \lambda\, I_n\,) \\ &= det(\, P^{-1}AP - \lambda\, P^{-1}\, P\,) \\ &= det(\, P^{-1}(\, A - \lambda\, I_n\,)P\,) \\ &= det(P^{-1})\, det(\, A - \lambda\, I_n\,)\, det(P) \\ &= det(\, A - \lambda\, I_n\,)\,, \end{aligned}$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Assim, mostramos que as matrizes A e B possuem o mesmo polinômio característico. Como os autovalores são as raízes do polinômio característico, temos que as matrizes A e B possuem os mesmos autovalores.

(b) Seja X um autovetor da matriz B associado ao autovalor λ, isto é,

$$BX = \lambda X \quad \Longleftrightarrow \quad P^{-1}APX = \lambda X \quad \Longleftrightarrow \quad A(PX) = \lambda(PX)\,.$$

Portanto, obtemos que PX é um autovetor da matriz A associado ao autovalor λ.

(c) Considerando que A é uma matriz diagonalizável, existe uma matriz Q invertível tal que $A = Q\Lambda Q^{-1}$, onde Λ é uma matriz diagonal. Como B é similar a matriz A, obtemos

$$B = P^{-1}AP = P^{-1}(Q\Lambda Q^{-1})P = (P^{-1}Q)\Lambda(Q^{-1}P) = (Q^{-1}P)^{-1}\,\Lambda\,(Q^{-1}P)\,.$$

Assim, mostramos que B é similar à matriz diagonal Λ. Logo, B é diagonalizável.

B.2 Primeiro Semestre de 2006

B.2.1 Primeira Prova

Questão 1.

Considere o subconjunto S de $\mathcal{C}([-1,1])$ das funções monótonas crescentes, isto é,

$$S = \{ f \in \mathcal{C}([-1,1]) \ / \ f(x) > f(y) \quad \text{para} \quad x > y \}.$$

Considerando $f, g \in S$, isto é, $f(x) > f(y)$ e $g(x) > g(y)$ para $x > y$, temos que $f(x)+g(x) > f(y)+g(y)$. Assim, $f + g \in S$. Logo, S é fechado com relação à operação de adição.

Considerando $f \in S$, isto é, $f(x) > f(y)$ para $x > y$, e $\lambda \in I\!R$ negativo. Desse modo, temos que $\lambda f(x) < \lambda g(x)$ para $x > y$. Logo, temos que $(\lambda f) \notin S$. Portanto, S não é fechado com relação à operação de multiplicação por escalar.

Questão 2.

($\Longrightarrow$) Considerando que o conjunto $\{ v_1, v_2, v_3, v_4, u \}$ é linearmente dependente em V, temos que existem escalares $c_1, c_2, c_3, c_4, \alpha$, não todos nulos, tais que

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 + \alpha u = 0_V .$$

Agora temos duas possibilidades. Primeira, se o escalar $\alpha \neq 0$, obtemos

$$u = -\frac{c_1}{\alpha}v_1 - \frac{c_2}{\alpha}v_2 - \frac{c_3}{\alpha}v_3 - \frac{c_4}{\alpha}v_4 \qquad \Longrightarrow \qquad u \in [v_1, v_2, v_3, v_4].$$

Segunda, se $\alpha = 0$, temos que

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 = 0_V .$$

Como o conjunto $\{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$ é linearmente independente em V, isto implicaria que os escalares c_1, c_2, c_3, c_4 devem ser todos nulos. Entretanto, isso contraria a hipótese do conjunto $\{ v_1, v_2, v_3, v_4, u \}$ ser linearmente dependente em V. Logo, mostramos que $u \in [v_1, v_2, v_3, v_4]$.

($\Longleftarrow$) Considerando que $u \in [v_1, v_2, v_3, v_4]$, existem escalares c_1, c_2, c_3, c_4, não todos nulos, tais que

$$u = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 \qquad \Longrightarrow \qquad c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 - u = 0_V .$$

Portanto, mostramos que $\{ v_1, v_2, v_3, v_4, u \}$ é linearmente dependente em V.

Questão 3.

Todo elemento $(x, y, z) \in U$ satisfaz a equação $2x - 4y + 6z = 0$. Desse modo, temos que $x = 2y - 3z$ para $y, z \in I\!R$. Portanto, todo elemento $(x, y, z) \in U$ é escrito da seguinte forma:

$$(x, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1) \quad ; \quad y, z \in I\!R.$$

Assim, o conjunto $\{ (2, 1, 0), (-3, 0, 1) \}$ é um sistema de geradores para o subespaço U.

Sabemos que o subespaço $U + W = \{ v \in I\!R^3 \ / \ v = u + w \quad ; \quad u \in U \text{ e } w \in W \}$. Assim, temos que

$$v = a(2, 1, 0) + b(-3, 0, 1) + c(1, 0, 1) + d(1, 1, 3) \quad ; \quad a, b, c, d \in I\!R.$$

Assim, o conjunto $\{ (2, 1, 0), (-3, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 3) \}$ é um sistema de geradores para o subespaço $U + W$.

Vamos determinar um sistema de geradores para o subespaço $U \cap W$. Sabemos que, se $v \in U \cap W$, então $v \in U$ e $v \in W$. Assim, temos que

$$a(2, 1, 0) + b(-3, 0, 1) = c(1, 0, 1) + d(1, 1, 3) \quad \text{para} \quad a, b, c, d \in I\!R.$$

Desse modo, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 2a - 3b = c + d \\ a = d \\ b = c + 3d \end{cases}$$

cuja solução é dada por $a = d$, $b = d$ e $c = -2d$ para $d \in I\!R$.

Portanto, se $v \in U \cap W$, então ele pode ser escrito como $v = d(-1, 1, 1)$ para $d \in I\!R$. Logo, $\{ (-1, 1, 1) \}$ é um sistema de geradores para o subespaço $U \cap W$. Como o subespaço $U \cap W \neq \{ 0_{I\!R^3} \}$, o subespaço $U + W$ não é uma soma direta dos subespaços U e W.

Questão 4.

Consideramos um elemento genérico $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e vamos impor as condições para que esse elemento pertença ao subespaço S, isto é,

$$\begin{array}{rcl} p(-1) + p'(-1) & = & a \quad\quad - c + 2d = 0 \\ p(1) & = & a + b + c + d = 0 \end{array}.$$

Escalonando o sistema linear homogêneo, obtemos

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ \quad - b - 2c + d = 0 \end{cases}.$$

Assim, obtemos um sistema linear homogêneo com dois graus de liberdade. Desse modo, podemos concluir que o subespaço S tem dimensão dois. Logo, temos uma relação entre os coeficientes dos elementos $p(x) \in S$. Podemos verificar facilmente que

$$b = -2c + d \qquad \text{e} \qquad a = c - 2d$$

para $c, d \in \mathbb{R}$. Substituindo a e b no polinômio $p(x)$, obtemos que todo elemento do subespaço S é escrito como:

$$p(x) = c(1 - 2x + x^2) + d(-2 + x + x^3) \quad ; \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Portanto, mostramos que o subespaço S é gerado pelos elementos do conjunto

$$\Gamma = \{ 1 - 2x + x^2, -2 + x + x^3 \},$$

que é linearmente independente em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, pois tomando a combinação linear nula

$$a(1 - 2x + x^2) + b(-2 + x + x^3) = 0$$

obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ -2a + b = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $a = b = 0$. Logo, o conjunto Γ é uma base para o subespaço S.

Note que os elementos da base Γ satisfazem as condições para que um elemento do espaço vetorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ pertença ao subespaço S.

Questão 5.

Inicialmente, vamos encontrar uma base para o subespaço W. Para isso, construímos uma matriz cujas linhas são os elementos do sistema de geradores do subespaço W e procedemos com o escalonamento

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, podemos escolher

$$\Gamma = \{ (1,0,1,2), (2,-1,1,3) \} \qquad \text{ou} \qquad \Gamma' = \{ (1,0,1,2), (0,1,1,1) \}$$

para uma base do subespaço W.

Finalmente, vamos completar uma base de W para obter uma base de $I\!R^4$.

Desse modo, podemos escolher

$$\beta = \{ (1,0,1,2), (2,-1,1,3), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \} \qquad \text{ou}$$

$$\beta' = \{ (1,0,1,2), (0,1,1,1), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \}$$

para uma base do espaço vetorial $I\!R^4$, pois construindo a matriz M de ordem 4 associada ao conjunto β'

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vemos que está forma escalonada e $posto(M) = 4$.

B.2.2 Segunda Prova

Questão 1.

Da matriz de mudança de base $[I]^{\alpha}_{\gamma}$, sabemos que

$$\begin{aligned} p_1(x) &= q_1(x) + q_2(x) \\ p_2(x) &= 2q_1(x) + q_2(x) \\ p_3(x) &= q_3(x) \end{aligned}$$

Da última equação, temos que $q_3(x) = 1 - x^2$. Das duas primeiras equações, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} q_1(x) + q_2(x) = p_1(x) \\ \\ 2q_1(x) + q_2(x) = p_2(x) \end{cases} \iff \begin{cases} q_1(x) + q_2(x) = p_1(x) \\ \\ q_2(x) = 2p_1(x) - p_2(x) \end{cases}$$

que possui a solução $q_1(x) = p_2(x) - p_1(x)$ e $q_2(x) = 2p_1(x) - p_2(x)$. Assim, obtemos

$$q_1(x) = 2x \,, \quad q_2(x) = 1 - 3x \quad \text{e} \quad q_3(x) = 1 - x^2$$

que são os elementos da base ordenada γ.

Vamos encontrar o vetor de coordenadas do elemento $p(x) = 3 - x + 2x^2$ com relação à base ordenada α. Para isso, basta fazer

$$\begin{aligned} p(x) &= a\,p_1(x) + b\,p_2(x) + c\,p_3(x) \\ 3 - x + 2x^2 &= a(1 - x) + b(1 + x) + c(1 - x^2) \end{aligned}$$

obtendo o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ -a + b = -1 \\ -c = 2 \end{cases}$$

que possui como solução $a = 3$, $b = 2$ e $c = -2$. Assim, temos

$$[p(x)]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Questão 2.

Da condição **(a)** temos que

$$T(1 + x^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da condição **(b)**, isto é, $q(x) = 1 \notin Ker(T)$, implica que o elemento $r(x) = x^2$ não pode pertencer ao $Ker(T)$, pois podemos escrever $q(x) = p(x) - r(x)$. Claramente, se o elemento $r(x) \in Ker(T)$, então $q(x) \in Ker(T)$, o que contradiz a hipótese.

Assim, podemos considerar a seguinte transformação linear $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, com $\{ 1 + x^2 \}$ a base para $Ker(T)$, dada por:

$$T(1 + x^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad T(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde estamos escolhendo $\gamma = \{ 1 + x^2, 1, x \}$ uma base ordenada para $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, que foi obtida completando a base do $Ker(T)$.

Vamos tomar um elemento genérico $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e representa–lo com relação à base ordenada γ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} p(x) &= d_1(1 + x^2) + d_2 + d_3 x \\ &= (d_1 + d_2) + d_3 x + d_1 x^2 \end{aligned}$$

obtendo o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = a \\ d_1 = c \\ d_3 = b \end{cases}$$

que possui somente a solução $d_1 = c$, $d_2 = a - c$ e $d_3 = b$. Desse modo, temos que

$$p(x) = c(1 + x^2) + (a - c) + bx .$$

Agora, fazendo $T(p(x)) = T(a + bx + cx^2)$, obtemos

$$T(a + bx + cx^2) = c\,T(1 + x^2) + (a - c)\,T(1) + b\,T(x) = \begin{bmatrix} 2b & a - c \\ a - c & b \end{bmatrix}.$$

Assim, encontramos uma transformação T com as propriedades pedidas.

Questão 3.

Tomando uma combinação linear nula

$$\sum_{i=1}^{m} c_i\, T(v_i) \;=\; 0_W \,,$$

e como T é uma transformação linear, podemos escrever

$$T\left(\sum_{i=1}^{m} c_i\, v_i \right) \;=\; 0_W \,.$$

Considerando a hipótese que T é injetora, isto é, $Ker(T) = \{ 0_V \}$, temos que

$$\sum_{i=1}^{m} c_i\, v_i \;=\; 0_V \,.$$

Como $\{ v_1 \,, \cdots \,, v_m \}$ é linearmente independente em V, implica que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0 \,.$$

Portanto, $\{ T(v_1) \,, \cdots \,, T(v_m) \}$ é linearmente independente em W.

Questão 4.

(a) A afirmação é **Falsa**.
Considere que exista uma transformação linear injetora T de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^3$, isto é, $Ker(T) = \{ 0_V \}$. Pelo **Teorema do núcleo e da imagem**, temos $dim(Im(T)) = 4$. O que não é possível, pois $Im(T)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Logo, não existe uma transformação linear injetora T de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^3$.

(b) A afirmação é **Verdadeira**.
Considere uma transformação linear T de $\mathbb{R}^4$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $dim(Ker(T)) = 1$. Pelo **Teorema do núcleo e da imagem**, temos que $dim(Im(T)) = 3$. Como $Im(T)$ é um subespaço de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, tem–se que $Im(T) = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, pois $dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) = 3$. Logo, existe uma transformação linear T sobrejetora de $\mathbb{R}^4$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(c) A afirmação é **Falsa**.
Considere uma transformação linear injetora T de $\mathbb{R}^2$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Pelo **Teorema do núcleo e da imagem**, temos que $dim(Im(T)) = 2$, pois $Ker(T) = \{ 0_V \}$. Logo, tem–se que $Im(T) \neq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, pois $dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) = 3$. Portanto, não existe uma transformação bijetora T de $\mathbb{R}^2$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Questão 5.

Temos que $\gamma = \{(1,-1), (0,1)\}$ é uma base para o $I\!R^2$. Vamos mostrar que γ é linearmente independente. Considere a combinação linear nula

$$a(1,-1) + b(0,1) = (0,0) \iff \begin{cases} a & = 0 \\ -a + b & = 0 \end{cases}.$$

Assim, obtemos $a = b = 0$. Logo, γ é linearmente independente em $I\!R^2$.

Vamos tomar um elemento genérico $(a,b) \in I\!R^2$ e representa–lo com relação à base ordenada γ

$$(a,b) = c(1,-1) + d(0,1) = (c, -c+d).$$

Assim, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} c & = a \\ -c + d & = b \end{cases}$$

que possui como solução $c = a$ e $d = a + b$. Desse modo, temos que

$$(a,b) = a(1,-1) + (a+b)(0,1).$$

Agora, fazendo

$$\begin{aligned} T(a,b) &= aT(1,-1) + (a+b)T(0,1) \\ &= a(2+x) + (a+b)(x-1) \\ &= (a - b) + (2a + b)x \end{aligned}$$

obtemos a transformação linear T.

Para mostrar que T é um isomorfismo, basta mostrar que $Ker(T) = \{ 0_{I\!R^2} \}$. Assim, considerando um elemento $(a,b) \in Ker(T)$, temos que

$$T(a,b) = (a - b) + (2a + b)x = 0_{\mathcal{P}_1(I\!R)} \qquad \text{para todo} \qquad x \in I\!R$$

Assim, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a - b & = 0 \\ 2a + b & = 0 \end{cases}$$

que possui somente a solução trivial $a = b = 0$. Logo, T é um isomorfismo.

Vamos encontrar o isomorfismo inverso. Dado um elemento $p(x) = a + bx \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, supomos que $T^{-1}(a + bx) = (c, d)$. Assim, temos que $T(c, d) = a + bx$, isto é,

$$(c - d) + (2c + d)x = a + bx,$$

obtendo o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} c - d = a \\ 2c + d = b \end{cases}$$

que possui como solução $c = \dfrac{a + b}{3}$ e $d = \dfrac{b - 2a}{3}$.

Portanto, temos que o isomorfismo inverso é dado por:

$$T^{-1}(a + bx) = \left(\frac{a + b}{3}, \frac{b - 2a}{3} \right).$$

B.2.3 Terceira Prova

Questão 1.

Chamando $[p(x)]_\beta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Sabemos que $[T(p(x))]_\gamma = [T]^\beta_\gamma \, [p(x)]_\beta$. Assim, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 3 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 1 \\ \quad - b = 1 \end{cases}$$

que tem uma única solução $a = 2$ e $b = -1$. Logo, $[p(x)]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Chamando $\beta = \{ q_1(x), q_2 \}$, onde

$$q_1(x) = x - x^2 + x^3 \qquad \text{e} \qquad q_2(x) = 1 + x + x^2 .$$

Conhecemos a matriz $[T]^\beta_\gamma$, onde $\gamma = \{ x - 1, p_1(x), p_2(x) \}$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} T(q_1(x)) &= (x - 1) + 2p_1(x) + p_2(x) \\ T(q_2(x)) &= (x - 1) + p_1(x) + 2p_2(x) \end{aligned} . \tag{B.1}$$

Tomando $T(p(x)) = p'(x) + (x + 1)p(0)$, vamos calcular

$$\begin{aligned} T(q_1(x)) &= 1 - 2x + 3x^2 \\ T(q_2(x)) &= 1 + 2x + (x + 1) = 3x + 2 \end{aligned} . \tag{B.2}$$

Substituindo (B.2) em (B.1), obtemos um sistema linear nas incógnitas $p_1(x)$ e $p_2(x)$

$$\begin{cases} 2p_1(x) + p_2(x) = 3x^2 - 3x + 2 \\ p_1(x) + 2p_2(x) = 2x + 3 \end{cases}$$

Fazendo a primeira equação menos a segunda equação, obtemos

$$p_1(x) - p_2(x) = 3x^2 - 5x - 1 ,$$

o que completa a resolução da questão.

Questão 2.

(a) Note que a aplicação $\langle \cdot , \cdot \rangle$ definida por:

$$\langle f , g \rangle = \int_0^1 f'(x)g(x)dx \qquad ; \qquad \forall \; f, g \in \mathcal{C}_0^1([0,1])$$

não satisfaz a propriedade de **simetria**. De fato,

$$\langle f , g \rangle = \int_0^1 f'(x)g(x)dx \neq \int_0^1 g'(x)f(x)dx = \langle g , f \rangle .$$

Por exemplo, tomando as funções $f(x) = 1 - x$ e $g(x) = 1 - x^2$, temos que

$$\langle f , g \rangle = \int_0^1 (x^2 - 1)dx = -\frac{2}{3} \qquad \text{e} \qquad \langle g , f \rangle = \int_0^1 (2x^2 - 2x)dx = -\frac{1}{3} .$$

Portanto, $\langle f , g \rangle \neq \langle g , f \rangle$.

Além disso, podemos verificar facilmente que a aplicação $\langle \cdot , \cdot \rangle$ não satisfaz a propriedade de **positividade**. De fato,

$$\begin{aligned} \langle f , f \rangle &= \int_0^1 f'(x)f(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (f^2(x))'dx \\ &= \frac{1}{2} (f^2(1) - f^2(0)) = -\frac{1}{2} f^2(0) \leq 0 , \end{aligned}$$

onde $f(1) = 0$.

Logo, a aplicação $\langle \cdot , \cdot \rangle$ não define um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}_0^1([0,1])$.

(b) Podemos verificar facilmente que a aplicação $\langle \cdot , \cdot \rangle$ definida por:

$$\langle f , g \rangle = \int_0^1 f'(x)g'(x)dx \quad ; \quad \forall \ f, g \in \mathcal{C}_0^1([0,1])$$

satisfaz as propriedades de **simetria**, **homogeneidade** e **distributividade**. De fato,

$$\langle f , g \rangle = \int_0^1 f'(x)g'(x)dx = \int_0^1 g'(x)f'(x)dx = \langle g , f \rangle \quad ; \quad \forall \ f, g \in \mathcal{C}_0^1([0,1]) .$$

$$\langle \lambda f , g \rangle = \int_0^1 (\lambda f)'(x)g'(x)dx = \int_0^1 \lambda f'(x)g'(x)dx = \lambda \int_0^1 f'(x)g'(x)dx = \lambda \langle f , g \rangle$$

para todas funções $f, g \in \mathcal{C}_0^1([0,1])$ e $\lambda \in I\!R$.

$$\begin{aligned} \langle f + g , h \rangle &= \int_0^1 (f+g)'(x)h'(x)dx = \int_0^1 f'(x)h'(x)dx + \int_0^1 g'(x)h'(x)dx \\ &= \langle f , h \rangle + \langle g , h \rangle \quad ; \quad \forall \ f, g \in \mathcal{C}_0^1([0,1]) . \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a aplicação $\langle \cdot , \cdot \rangle$ satisfaz a propriedade de **positividade**. De fato,

$$\langle f , f \rangle = \int_0^1 (\, f'(x) \,)^2 dx \geq 0 ,$$

pois o integrando é uma função contínua positiva.

Agora, supomos que

$$\langle f , f \rangle = \int_0^1 (\, f'(x) \,)^2 dx = 0 .$$

Como f' é uma função contínua, temos que $f'(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$. Logo, f é uma função constante em $[0,1]$, entretanto, $f(1) = 0$. Assim, a única função constante no espaço $\mathcal{C}_0^1([0,1])$ é a função identicamente nula ($f \equiv 0$), isto é, $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.

Portanto, a aplicação $\langle \cdot , \cdot \rangle$ define um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}_0^1([0,1])$.

Questão 3.

(a) Considerando que V é um espaço vetorial real, temos que

$$\| u + v \|_2^2 = \langle u + v , u + v \rangle = \langle u , u \rangle + 2\langle u , v \rangle + \langle v , v \rangle .$$

Utilizando o fato que θ é o ângulo entre os elementos u e v, não nulos, temos que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u , v \rangle}{\| u \|_2 \| v \|_2} \implies \langle u , v \rangle = \| u \|_2 \| v \|_2 \cos(\theta) .$$

Portanto, obtemos a relação

$$\| u + v \|_2^2 = \| u \|_2^2 + \| v \|_2^2 + 2 \| u \|_2 \| v \|_2 \cos(\theta)$$

que é denominada **Lei do Paralelogramo**.

(b) Tomando a combinação linear nula dos elementos do conjunto β

$$c_1 q_1 + \cdots + c_i q_i + \cdots + c_n q_n = 0_V ,$$

e fazendo o produto interno de ambos os membros com um elemento $q_j \in \beta$ temos que

$$c_1 \langle q_1 , q_j \rangle + \cdots + c_i \langle q_i , q_j \rangle + \cdots + c_n \langle q_n , q_j \rangle = 0 .$$

Usando o fato que β é um conjunto ortonormal, isto é,

$$\begin{cases} \langle q_i , q_j \rangle = 0 & \text{para} \quad i \neq j \\ \langle q_i , q_j \rangle = 1 & \text{para} \quad i = j \end{cases}$$

obtemos $c_j = 0$ para $j = 1, \cdots , n$. Portanto, mostramos que β é um conjunto linearmente independente em V.

Questão 4.

Chamando $p(x) = 1 + x$, temos que o subespaço $S = [p(x)] \subset \mathcal{P}_2(I\!R)$.

O subespaço $S^\perp$ é definido por:

$$S^\perp = \{ \, q \in \mathcal{P}_2(I\!R) \ / \ \langle \, r \, , \, q \, \rangle = 0 \quad ; \quad \forall \, r \in S \, \} \, .$$

Tomando um elemento genérico $q(x) = a + bx + cx^2 \in S^\perp$, sabemos que $\langle \, p \, , \, q \, \rangle = 0$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \langle \, p \, , \, q \, \rangle &= \int_{-1}^{1} x^2(1 + x)(a + bx + cx^2)dx \\ &= \int_{-1}^{1} (x^2 + x^3)(a + bx + cx^2)dx \\ &= \int_{-1}^{1} (\, ax^2 + bx^3 + cx^4 + ax^3 + bx^4 + cx^5 \,)dx = 0 \\ &= \int_{-1}^{1} (\, ax^2 + cx^4 + bx^4 \,)dx = 0 \end{aligned}$$

Calculando a integral, resulta a seguinte equação

$$\frac{2}{3}a + \frac{2}{5}c + \frac{2}{5}b = 0$$

Resolvendo a equação acima para a incógnita c, temos que

$$c = -\frac{5}{3}a - b \, .$$

Portanto, todo elemento $q(x) \in S^\perp$ é escrito como:

$$\begin{aligned} q(x) &= a + bx + \left(-\frac{5}{3}a - b \right) x^2 \\ &= \left(1 - \frac{5}{3}x^2 \right) a + (\, x - x^2 \,)\, b \qquad \text{para} \qquad a, b \in I\!R \, . \end{aligned}$$

Desse modo, uma base para o subespaço $S^\perp$ é formada pelos elementos

$$q_1(x) = 1 - \frac{5}{3}x^2 \qquad \text{e} \qquad q_2(x) = x - x^2 \, ,$$

completando a resolução da questão.

Questão 5.

A melhor aproximação do elemento $q(x) = 1 - x^2$ no subespaço $\mathcal{P}_1(I\!R) \subset \mathcal{P}_2(I\!R)$ é dada pela projeção ortogonal do elemento $q(x)$ sobre o subespaço $\mathcal{P}_1(I\!R)$.

Inicialmente, vamos obter uma base ortogonal $\beta^\star = \{ q_1(x), q_2(x) \}$ para o subespaço $\mathcal{P}_1(I\!R)$ a partir da base canônica $\beta = \{ p_1(x) = 1, p_2(x) = x \}$, através do **Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt**.

Desse modo, escolhemos $q_1(x) = p_1(x) = 1$. Agora, vamos construir o elemento $q_2(x)$ da seguinte forma:

$$q_2(x) = p_2(x) - \alpha_{12}\, q_1(x)$$

ortogonal ao subespaço gerado pelo elemento $q_1(x)$. Assim, temos que

$$\alpha_{12} = \frac{\langle p_2 \, , \, q_1 \rangle}{\langle p_2 \, , \, q_1 \rangle} = \frac{1}{2}\,.$$

Logo, o elemento $q_2(x) = x - \dfrac{1}{2}$, completando a base ortogonal $\beta^\star = \{ q_1(x), q_2(x) \}$.

Finalmente, vamos determinar a projeção ortogonal, $\tilde{q}(x)$, do elemento $q(x) = 1 - x^2$ no subespaço $\mathcal{P}_1(I\!R)$ que é dada por:

$$\tilde{q}(x) = \frac{\langle q \, , \, q_1 \rangle}{\langle q_1 \, , \, q_1 \rangle}\, q_1(x) + \frac{\langle q \, , \, q_2 \rangle}{\langle q_2 \, , \, q_2 \rangle}\, q_2(x)$$

onde

$$\langle q_1 \, , \, q_1 \rangle = \int_0^1 dx = 1 \qquad \text{e} \qquad \langle q_2 \, , \, q_2 \rangle = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{12}$$

$$\langle q \, , \, q_1 \rangle = \int_0^1 (\, 1 - x^2\,) dx = \frac{2}{3}$$

$$\langle q \, , \, q_2 \rangle = \int_0^1 (\, 1 - x^2\,) \left(x - \frac{1}{2} \right) dx = -\frac{1}{12}$$

Portanto, temos que

$$\tilde{q}(x) = \frac{2}{3} - \left(x - \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{6} - x\,,$$

o que completa a resolução da questão.

B.2.4 Segunda Chamada

Questão 1.

(a) Temos que $P = [p_{ij}]$ é a matriz de mudança da base $\gamma = \{ p_1(x), p_2(x), p_3(x) \}$ para a base $\beta = \{ 1, x, x^2 \}$. Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned} p_1(x) &= p_{11} + p_{21}x + p_{31}x^2 = 1 + x \\ p_2(x) &= p_{12} + p_{22}x + p_{32}x^2 = x \\ p_3(x) &= p_{13} + p_{23}x + p_{33}x^2 = 2 + 2x + x^2 \end{aligned}$$

Assim, temos que $\gamma = \{ 1 + x \,,\, x \,,\, 2 + 2x + x^2 \}$.

(b) Sabemos que $[q(x)]_\beta = [I]_\beta^\gamma \, [q(x)]_\gamma$. Temos que

$$[q(x)]_\beta = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e vamos denotar} \qquad [q(x)]_\gamma = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Assim, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} a + 2c = -3 \\ a + b + 2c = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

que possui uma única solução $a = -7$, $b = 1$ e $c = 2$. Logo, $[q(x)]_\gamma = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Questão 2.

Vamos determinar uma base para o subespaço S. Temos que todo elemento $(x, y, z) \in S$ satisfaz a equação $x + y + z = 0$. Logo, temos que $z = -x - y$. Desse modo, obtemos que todo elemento $(x, y, z) \in S$ é escrito da seguinte forma:

$$(x, y, z) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \quad \text{para} \quad x\,,\, y \in I\!R\,.$$

Portanto, o conjunto $\beta = \{ (1, 0, -1)\,,\, (0, 1, -1)$ é uma base para o subespaço S. De fato, tomando uma combinação linear nula dos elementos do conjunto β

$$\alpha_1(1, 0, -1) + \alpha_2(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$$

obtemos $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Agora vamos determinar uma base para o subespaço $S^{\perp}$ definido por:

$$S^{\perp} = \{ w \in I\!R^3 \;/\; \langle\, w\,,\, v\,\rangle = 0 \;\;;\;\; \forall\; v \in S\,\}\,.$$

Sabemos que todo elemento $w = (a, b, c) \in S^{\perp}$ deve ser ortogonal aos elemento da base β do subespaço S. Assim, temos que

$$\langle\, w\,,\, v_1\,\rangle = a - c = 0$$

$$\langle\, w\,,\, v_2\,\rangle = b - c = 0$$

onde $v_1 = (1, 0, -1)$ e $v_2 = (0, 1, -1)$.

Desse modo, obtemos $a = c$ e $b = c$ para $c \in I\!R$. Assim, todo elemento $w = (a, b, c) \in S^{\perp}$ é escrito da seguinte forma:

$$(a, b, c) = c(1, 1, 1) \quad \text{para} \quad c \in I\!R\,.$$

Logo, $S^{\perp} = [(1, 1, 1)]$.

Considerando o espaço vetorial $I\!R^3$ com a base $\gamma = \{ (1, 0, 0)\,,\, (0, 1, 0)\,,\, (1, 1, 1)\,\}$, vamos definir o operador linear T sobre o $I\!R^3$, satisfazendo $Im(T) = S$ e $Ker(T) = S^{\perp}$, da seguinte forma:

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, -1)$$

$$T(0, 1, 0) = (0, 1, -1)$$

$$T(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

Vamos escrever um elemento genérico $(x, y, z) \in I\!R^3$ com relação à base γ, isto é,

$$(x, y, z) \;=\; a(1, 0, 0) \;+\; b(0, 1, 0) \;+\; c(1, 1, 1) \;=\; (a + c \,,\, b + c \,,\, c)$$

obtendo $c = z$, $b = y - z$ e $a = x - z$. Assim, temos que

$$(x, y, z) \;=\; (x - z)(1, 0, 0) \;+\; (y - z)(0, 1, 0) \;+\; z(1, 1, 1)\,.$$

Finalmente, obtemos a expressão do operador T que é dada por:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) \;&=\; (x - z)T(1, 0, 0) \;+\; (y - z)T(0, 1, 0) \;+\; zT(1, 1, 1) \\ &=\; (x - z)(1, 0, -1) \;+\; (y - z)(0, 1, -1) \;+\; z(0, 0, 0) \\ &=\; (\, x - z \,,\, y - z \,,\, -x - y + 2z \,)\,. \end{aligned}$$

Portanto, temos que o operador linear

$$T(x, y, z) = (\, x - z \,,\, y - z \,,\, -x - y + 2z \,) \qquad \text{para} \qquad (x, y, z) \in I\!R^3$$

satisfaz as condições exigidas.

Questão 3.

(a) Vamos determinar uma base β_1 para o subespaço U_1. Temos que todo elemento $(x, y) \in U_1$ deve satisfazer a seguinte condição $T(x, y) = 5(x, y)$, isto é,

$$(3x - 2y\,,\, -2x + 3y) = (5x, 5y) \iff (-2x - 2y\,,\, -2x - 2y) = (0, 0)\,.$$

Logo, temos uma única equação $x + y = 0$, isto é, $y = -x$.

Assim, todo elemento $(x, y) \in U_1$ é escrito como:

$$(x, y) = x(1, -1) \qquad \text{para} \qquad x \in I\!R.$$

Portanto, temos que $\beta_1 = \{\,(1, -1)\,\}$.

Agora vamos determinar uma base β_2 para o subespaço U_2. Temos que todo elemento $(x, y) \in U_2$ deve satisfazer a seguinte condição $T(x, y) = (x, y)$, isto é,

$$(3x - 2y\,,\, -2x + 3y) = (x, y) \iff (2x - 2y\,,\, -2x + 2y) = (0, 0)\,.$$

Logo, temos uma única equação $x - y = 0$, isto é, $y = x$.

Assim, todo elemento $(x, y) \in U_2$ é escrito como:

$$(x, y) = x(1, 1) \qquad \text{para} \qquad x \in I\!R.$$

Portanto, temos que $\beta_2 = \{\,(1, 1)\,\}$.

(b) O conjunto $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 = \{\,(1, -1)\,,\,(1, 1)\,\}$ é linearmente independente. De fato, podemos observar que β é um conjunto ortogonal. Logo, β é uma base ortogonal para o $I\!R^2$.

Finalmente, vamos determinar a matriz $[T]^{\beta}_{\beta}$. Temos que

$$T(1, -1) = (5, -5) = 5(1, -1) + 0(1, 1)$$

$$T(1, 1) = (1, 1) = 0(1, -1) + 1(1, 1)$$

Portanto, obtemos

$$[T]^{\beta}_{\beta} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\,,$$

o que completa a resolução do questão.

Questão 4.

(a) Temos os elementos $u = (1,1,1)$ e $v = (3,2,1)$, e as seguintes condições:

(1) $v = w_1 + w_2$.

(2) O elemento w_1 é ortogonal ao elemento u, isto é $\langle w_1 , u \rangle = 0$.

(3) O conjunto $\{ w_2, u \}$ é linearmente dependente, isto é, existe um escalar $\alpha \in I\!R$ tal que $w_2 = \alpha u$.

Substituindo o elemento $w_2 = \alpha u$, dado pela condição **(3)**, na condição **(1)** e calculando o produto interno $\langle v , u \rangle$ utilizando a condição **(2)**, obtemos

$$\langle v , u \rangle = \langle w_1 + \alpha u , u \rangle = \langle w_1 , u \rangle + \alpha \langle u , u \rangle \implies \alpha = \frac{\langle v , u \rangle}{\langle u , u \rangle} = \frac{6}{3} = 2 .$$

Assim, temos que

$$w_2 = (2,2,2) \qquad \text{e} \qquad w_1 = v - w_2 = (1,0,-1) .$$

(b) Vamos representar o elemento $w = (1,-1,2)$ da seguinte forma:

$$w = \tilde{w} + \bar{w} \qquad \text{onde} \qquad \tilde{w} \in S \quad \text{e} \quad \bar{w} \in S^{\perp} ,$$

isto é, $\tilde{w}$ é a projeção ortogonal de w sobre o subespaço S e $\bar{w}$ é a projeção ortogonal de w sobre o subespaço $S^{\perp}$.

Como o conjunto $\{ w_1, u \}$ é uma base ortogonal para o subespaço $S = [w_1, u]$, temos que o elemento $\tilde{w}$ é calculado da seguinte forma:

$$\tilde{w} = \frac{\langle w , u \rangle}{\langle u , u \rangle} u + \frac{\langle w , w_1 \rangle}{\langle w_1 , w_1 \rangle} w_1 .$$

Assim, temos que

$$\tilde{w} = \frac{2}{3}(1,1,1) - \frac{1}{2}(1,0,-1) = \left(\frac{1}{6} , \frac{4}{6} , \frac{7}{6} \right) .$$

Finalmente, temos que o elemento $\bar{w} = w - \tilde{w}$. Logo,

$$\bar{w} = (1,-1,2) - \left(\frac{1}{6} , \frac{4}{6} , \frac{7}{6} \right) = \left(\frac{5}{6} , -\frac{10}{6} , \frac{5}{6} \right) .$$

Questão 5.

(a) Temos que o subespaço $U = [u_1, u_2]$, onde $u_1 = (1,1,1,1)$ e $u_2 = (-1,1,-1,1)$. Note que os elementos u_1 e u_2 são ortogonais.

Sabemos que a melhor aproximação do elemento $v = (2,1,3,1) \in I\!R^4$ no subespaço U é dada pela projeção ortogonal do elemento v sobre o subespaço U.

Como o conjunto $\{ u_1, u_2 \}$ é uma base ortogonal para o subespaço U, temos que a projeção ortogonal, $\tilde{v}$, do elemento v no subespaço U é calculada da seguinte forma:

$$\tilde{v} = \frac{\langle v , u_1 \rangle}{\langle u_1 , u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle v , u_2 \rangle}{\langle u_2 , u_2 \rangle} u_2 .$$

Assim, temos que

$$\tilde{v} = \frac{7}{4}(1,1,1,1) - \frac{3}{4}(-1,1,-1,1) = \left(\frac{5}{2} , 1 , \frac{5}{2} , 1 \right).$$

(b) Basta considerar W como sendo o complemento ortogonal do subespaço U em $I\!R^4$ com relação ao produto interno usual. Pelo **Teorema da Decomposição Ortogonal**, temos que $I\!R^4 = U \oplus W$. Como $dim(U) = 2$, temos que $dim(W) = 2$.

Finalmente vamos determinar uma base para o subespaço W. Sabemos que todo elemento $w = (a,b,c,d) \in W = U^{\perp}$ deve ser ortogonal aos elemento da base de U, isto é,

$$\langle w , u_1 \rangle = a + b + c + c = 0$$

$$\langle w , u_2 \rangle = -a + b - c + c = 0$$

Assim, obtemos um sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ -a + b - c + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 2b + 2d = 0 \end{cases}$$

que possui como solução $b = -d$ e $a = -c$.

Assim, todo elemento $w = (a,b,c,d) \in W = U^{\perp}$ é escrito da seguinte forma:

$$(a,b,c,d) = c(-1,0,1,0) + d(0,-1,0,1) \quad \text{para} \quad c, d \in I\!R .$$

O conjunto $\beta = \{ (-1,0,1,0) , (0,-1,0,1) \}$ é claramente linearmente independente.

Portanto, o conjunto β é uma base para o subespaço $W = U^{\perp}$.

B.2.5 Exame

Questão 1.

(a) Podemos verificar facilmente que U é um subconjunto não vazio, pois o polinômio identicamente nulo satisfaz a condição para que um elemento de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ pertença a U. Desse modo, $0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} \in U$.

Assim, devemos mostrar que U é fechado com relação à operação de adição e fechado com relação à operação de multiplicação por escalar.

Tomando $p(x),\, q(x) \in U$, isto é, satisfazendo

$$\int_{-1}^{1} p(x)dx \;+\; p'(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \int_{-1}^{1} q(x)dx \;+\; q'(0) = 0\,.$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{1} (p+q)(x)dx \;+\; (p+q)'(0) &= \int_{1}^{1} (\,p(x) + q(x)\,)dx \;+\; p'(0) \;+\; q'(0) \\
&= \left\{ \int_{-1}^{1} p(x)dx + p'(0) \right\} + \left\{ \int_{-1}^{1} q(x)dx + q'(0) \right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Assim, mostramos que $(\,p(x) + q(x)\,) \in U$.

Tomando $p(x) \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{1} (\lambda p)(x)dx \;+\; (\lambda p)'(0) &= \int_{1}^{1} \lambda p(x)dx \;+\; \lambda p'(0) \\
&= \lambda \left\{ \int_{-1}^{1} p(x)dx + p'(0) \right\} \;=\; 0\,.
\end{aligned}$$

Assim, mostramos que $\lambda p(x) \in U$.

Portanto, mostramos que o subconjunto U é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(b) Vamos determinar uma base para o subespaço U. Tomando um elemento genérico $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, e impondo a condição que $p(x) \in U$, isto é,

$$\int_{-1}^{1} (\, a + bx + cx^2\,)dx \; + \; b \; = \; 0\,,$$

obtemos uma equação algébrica

$$6a + 3b + 2c = 0\,,$$

que possui dois grau de liberdade, de onde concluímos que $dim(U) = 2$.

Assim, temos que

$$c \; = \; -3a \; - \; \frac{3}{2}b \qquad ; \qquad a,\, b \in \mathbb{R}\,.$$

Logo, todo elemento $p(x) \in U$ é escrito da seguinte forma:

$$p(x) \; = \; (\, 1 - 3x^2\,)a \; + \; \left(x - \frac{3}{2}x^2 \right) b \qquad ; \qquad a,\, b \in \mathbb{R}\,.$$

Portanto, temos que o conjunto

$$\gamma \; = \; \left\{ 1 - 3x^2\,,\, x - \frac{3}{2}x^2 \right\}$$

é uma base para o subespaço U.

Questão 2.

(a) Como $dim(V) = 3$, basta mostrar que o conjunto γ é linearmente independente. Para isso, vamos considerar uma combinação linear nula dos elementos do conjunto γ

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 = 0_V .$$

Substituindo as relações entre os elementos de γ e os elementos da base β temos que

$$c_1(u_1 - u_2 - u_3) + c_2(2u_2 + 3u_3) + c_3(3u_1 + u_3) = 0_V ,$$

que reorganizando os termos, obtemos

$$(c_1 + 3c_3)u_1 + (-c_1 + 2c_2)u_2 + (-c_1 + 3c_3 + c_3)u_3 = 0_V .$$

Como o conjunto β é linearmente independente, pois é uma base de V, implica que os coeficientes da combinação linear nula acima devem ser todos iguais a zero. Assim, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} c_1 \qquad\qquad + 3c_3 = 0 \\ -c_1 + 2c_2 \qquad\quad = 0 \\ -c_1 + 3c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

que possui somente a solução trivial $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Logo, provamos que o conjunto γ é linearmente independente. Portanto, o conjunto γ é uma base para V.

(b) Podemos encontrar facilmente a matriz $[T]^\gamma_\beta$ utilizando as relações entre os elementos de γ e os elementos da base β. Assim, temos que

$$[T]^\gamma_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} .$$

(c) Sabemos que $[v]_\beta = [T]^\gamma_\beta [v]_\gamma$. Desse modo, obtemos

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} ,$$

o que completa a resolução da questão.

Questão 3.

Inicialmente vamos determinar um conjunto de geradores para o subespaço U.

Sabemos que todo elemento $(x, y, z) \in U$ satisfaz a equação algébrica

$$x + y + z = 0 \iff z = -x - y .$$

Logo, todo elemento $(x, y, z) \in U$ é escrito da seguinte forma:

$$(x, y, z) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \quad ; \quad x, y \in I\!R .$$

Portanto, temos que $U = [(1, 0, -1), (0, 1, -1)] = Im(T)$.

Agora considerando o subespaço $W = [(1, 0, 1), (0, -1, 1)]$, vamos determinar uma base para o subespaço $U \cap W$, que é o núcleo do operador que desejamos encontrar.

Tomando um elemento $v \in U \cap W$, isto é, $v \in U$ e $v \in W$. Logo, temos que existem escalares $a, b, c, d \in I\!R$ tais que

$$v = a(1, 0, -1) + b(0, 1, -1) = c(1, 0, 1) + d(0, -1, 1) .$$

Desse modo, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a = c \\ b = -d \\ -a - b = c + d \end{cases}$$

que possui a seguinte solução $c = 0$, $a = 0$ e $b = -d$ para $d \in I\!R$.

Portanto, todo elemento $v \in U \cap W$ é escrito da seguinte forma:

$$v = b(0, 1, -1) \quad ; \quad b \in I\!R .$$

Logo, temos que $U \cap W = [(0, 1, -1)] = Ker(T)$.

Completamos a base do subespaço $Ker(T)$ para obter uma base para o espaço vetorial $I\!R^3$. Assim, podemos escolher $\gamma = \{ (0, 1, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 0) \}$ uma base para $I\!R^3$.

Finalmente definimos o operador linear T com as características solicitadas

$$\begin{aligned} T(0,1,-1) &= (0,0,0) \\ T(1,0,0) &= (1,0,-1) \\ T(0,1,0) &= (0,1,-1) \end{aligned}$$

Para obtermos a expressão do operador T, vamos inicialmente representar um elemento genérico $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ com relação à base ordenada γ, isto é,

$$(x,y,z) = a(0,1,-1) + b(1,0,0) + c(0,1,0)\,,$$

obtendo o seguinte sistema linear nas incógnitas a, b, c

$$\begin{cases} b = x \\ a + c = y \\ -a = z \end{cases}$$

Assim, temos que $a = -z$, $b = x$ e $c = y + z$.

Logo, todo elemento $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ é escrito da seguinte forma:

$$(x,y,z) = -z(0,1,-1) + x(1,0,0) + (y+z)(0,1,0)\,.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= -zT(0,1,-1) + xT(1,0,0) + (y+z)T(0,1,0) \\ T(x,y,z) &= -z(0,0,0) + x(1,0,-1) + (y+z)(0,1,-1) \\ T(x,y,z) &= (x,\, y+z,\, -x-y-z) \end{aligned}$$

o que completa a resolução da questão.

Questão 4.

Vamos verificar se o operador T é um automorfismo de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Para isso, devemos determinar o subespaço $Ker(T)$, isto é,

$$Ker(T) = \{ p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \ / \ T(p(x)) = 0_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})} \} .$$

Tomando um elemento genérico $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, vamos impor a condição que $p(x) \in Ker(T)$, isto é,

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= (a + bx + cx^2 + dx^3) + (1 + x)(b + 2cx + 3dx^2) = 0_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})} \\ &= (a + b) + (2b + 2c)x + (3c + 3d)x^2 + 4dx^3 = 0_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Isso nos leva a um sistema linear homogêneo cuja solução é $a = b = c = d = 0$.

Logo, $Ker(T) = \{ 0_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})} \}$, isto é, T é um operador injetor. Pelo Teorema do núcleo e da imagem, sabemos que $Im(T) = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, isto é, T é um operador sobrejetor. Portanto, mostramos que T é um automorfismo de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Finalmente vamos determinar a representação matricial do operador T com relação à base canônica $\beta = \{ 1, x, x^2, x^3 \}$ de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Para isso, vamos calcular

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(x) &= 1 + 2x \\ T(x^2) &= 2x + 3x^2 \\ T(x^3) &= 3x^2 + 4x^3 \end{aligned}$$

Desse modo, obtemos que

$$[T]^{\beta}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

o que completa a resolução da questão.

Questão 5.

Chamando $p_1(x) = 1 + x$ e $p_2 = 1 - x^2$, temos que o subespaço $S = [p_1(x), p_2(x)]$.

O subespaço $S^\perp$ é definido por:

$$S^\perp = \{ q(x) \in \mathcal{P}_2(I\!R) \; / \; \langle r , q \rangle = 0 \quad ; \quad \forall \; r(x) \in S \} .$$

Tomando um elemento genérico $q(x) = a + bx + cx^2 \in S^\perp$, sabemos que

$$\begin{aligned}
\langle p_1 , q \rangle &= \int_1^1 (a + bx + cx^2)(1 + x) dx \\
&= \int_1^1 (a + bx + cx^2 + ax + bx^2 + cx^3) dx \\
&= \int_1^1 (a + cx^2 + bx^2) dx \; = \; 0 \\
\langle p_2 , q \rangle &= \int_1^1 (a + bx + cx^2)(1 - x^2) dx \\
&= \int_1^1 (a + bx + cx^2 - ax^2 - bx^3 - cx^4) dx \\
&= \int_1^1 (a + cx^2 - ax^2 - cx^4) dx \; = \; 0
\end{aligned}$$

Calculando as integrais acima obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 2a + \dfrac{2}{3}c + \dfrac{2}{3}b = 0 \\ \\ \dfrac{4}{3}a + \dfrac{4}{15}c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6a + 2c + 2b = 0 \\ \\ 5a + c = 0 \end{cases}$$

que possui a seguinte solução $b = 2a$ e $c = -5a$ para $a \in I\!R$.

Desse modo, todo elemento $q(x) \in S^\perp$ é escrito da seguinte forma:

$$q(x) = a(1 + 2x - 5x^2) \quad ; \quad a \in I\!R .$$

Portanto, uma base para o subespaço $S^\perp$ é dada pelo conjunto

$$\gamma = \{ 1 + 2x - 5x^2 \} ,$$

o que completa a resolução da questão.