Álgebra Linear e suas Aplicações

Notas de Aula

Petronio Pulino

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} -4 & & \\ & 1 & \\ & & 6 \end{bmatrix} Q^t$$

$$Q^t Q = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

PULINUS

Álgebra Linear e suas Aplicações

Notas de Aula

Petronio Pulino

Departamento de Matemática Aplicada

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Universidade Estadual de Campinas

Caixa Postal 6065, CEP 13083–859, Campinas, SP, Brasil

E–mail: pulino@ime.unicamp.br

Homepage: www.ime.unicamp.br/∼pulino/ALESA/

Março de 2007

Conteúdo

A *Provas e Avaliações* **1**

A.1 Segundo Semestre de 2006 . . . 2

A.1.1 Primeira Prova . . . 2

A.1.2 Segunda Prova . . . 3

A.1.3 Terceira Prova . . . 5

A.1.4 Segunda Chamada . . . 7

A.1.5 Exame . . . 9

A.2 Primeiro Semestre de 2006 . . . 11

A.2.1 Primeira Prova . . . 11

A.2.2 Segunda Prova . . . 12

A.2.3 Terceira Prova . . . 14

A.2.4 Segunda Chamada . . . 16

A.2.5 Exame . . . 18

A.3 Segundo Semestre de 2005 . . . 20

A.3.1 Primeira Prova . . . 20

A.3.2 Primeira Prova (*Substitutiva*) . . . 22

A.3.3 Segunda Prova . . . 24

A.3.4 Terceira Prova . . . 26

A.3.5 Segunda Chamada . . . 28

A.3.6 Exame . . . 30

A.4 Segundo Semestre de 2004 . . . 32

A.4.1 Primeira Prova . . . 32

A.4.2 Segunda Prova . . . 34

A.4.3 Terceira Prova . . . 35

A.4.4 Segunda Chamada . . . 36

A.4.5 Exame . . . 38

A.5 Segundo Semestre de 1999 . . . 40

A.5.1 Primeiro Teste 40
A.5.2 Primeira Prova 41
A.5.3 Segundo Teste 42
A.5.4 Segunda Prova 43
A.5.5 Exame 44
A.6 Segundo Semestre de 1998 45
A.6.1 Primeiro Teste 45
A.6.2 Primeira Prova 46
A.6.3 Segundo Teste 48
A.6.4 Segunda Prova 49
A.6.5 Exame 50

B *Gabarito das Avaliações* 53
B.1 Segundo Semestre de 2006 54
B.1.1 Primeira Prova 54
B.1.2 Segunda Prova 61
B.1.3 Terceira Prova 67
B.1.4 Segunda Chamada 73
B.1.5 Exame 77
B.2 Primeiro Semestre de 2006 82
B.2.1 Primeira Prova 82
B.2.2 Segunda Prova 86
B.2.3 Terceira Prova 91
B.2.4 Segunda Chamada 97
B.2.5 Exame 103

A

Provas e Avaliações

Conteúdo

A.1 Segundo Semestre de 2006 2

A.2 Primeiro Semestre de 2006 11

A.3 Segundo Semestre de 2005 20

A.4 Segundo Semestre de 2004 32

A.5 Segundo Semestre de 1999 40

A.6 Segundo Semestre de 1998 45

A.1 Segundo Semestre de 2006

A.1.1 Primeira Prova

Questão 1. **(2.5 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $I\!R^2$ e os seguinte subespaços

$$U = \{ (x, y) \in I\!R^2 \ / \ y = 3x \} \quad \text{e} \quad W = \{ (x, y) \in I\!R^2 \ / \ y = -2x \} .$$

Verifique se o seguinte subconjunto

$$U \cup W = \{ (x, y) \in I\!R^2 \ / \ (x, y) \in U \quad \text{ou} \quad (x, y) \in W \}$$

é um subespaço vetorial de $I\!R^2$.

Questão 2. **(2.5 Pontos)**

Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $I\!F$ e u, v, w elementos distintos de V. Prove que o conjunto $\{ u, v, w \}$ é linearmente independente em V se, e somente se, o conjunto $\{ u + v, u + w, v + w \}$ é linearmente independente em V.

Questão 3. **(2.5 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $I\!M_2(I\!R)$ e os seguintes subespaços

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \ ; \ a, b, c \in I\!R \right\} \quad \text{e} \quad W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{bmatrix} \ ; \ a, b \in I\!R \right\} .$$

(a) Determine uma base para cada um dos seguintes subespaços:

$$U , \quad W , \quad U \cap W \quad \text{e} \quad U + W .$$

(b) $I\!M_2(I\!R) = U \oplus W$? Justifique sua resposta.

Questão 4. **(2.5 Pontos)**

Considere o espaço vetorial $I\!R^2$. A matriz de mudança da base ordenada $\gamma = \{ u_1, u_2 \}$, onde $u_1 = (1, 1)$ e $u_2 = (-2, 2)$, para a base ordenada $\alpha = \{ v_1, v_2 \}$ é dada por:

$$[I]^{\gamma}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} .$$

(a) Determine a base ordenada α.

(b) Determine o elemento $u \in I\!R^2$ tal que $[u]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

A.1.2 Segunda Prova

Questão 1. **(3.0 Pontos)**

Determine explicitamente a expressão de uma transformação linear $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ satisfazendo simultaneamente as seguintes condições:

(a) O elemento $p(x) = (1 + x) \in Ker(T)$.

(b) O elemento $q(x) = x \notin Ker(T)$.

(c) $Im(T) = [(1, 1, 1)]$.

Questão 2. **(3.0 Pontos)**

Sejam T um operador linear sobre $\mathbb{R}^4$, $\gamma = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$ uma base ordenada para o espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ e o subespaço $S = [v_1, v_2, v_3]$. Pede–se:

(a) Sabendo que $T(v) = v$ para todo $v \in S$ e $T(v_4) = v_1 + v_3$, determine $[T]_\gamma^\gamma$.

(b) Sabendo que

$$[I]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $\beta = \{ e_1, e_2, e_3, e_4 \}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^4$, determine $[T(e_1)]_\gamma$.

Questão 3. **(3.0 Pontos)**

Considere o operador linear T sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, definido por: $T(p(x)) = p'(x) + p(x)$, e a transformação linear $P : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por: $P(a + bx + cx^2) = (a + b, c, a - b)$.

(a) Determine a transformação linear $P \circ T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

(b) Determine a matriz $[P \circ T]_\gamma^\beta$, onde β é a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e γ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

(c) Verifique se P é um isomorfismo de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo, determine o isomorfismo inverso $P^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita, com $dim(V) = n$, e T um operador linear sobre V tal que $Im(T) = Ker(T)$. Pede–se:

(a) Mostre que n é par.

(b) Considerando $V = \mathbb{R}^4$, determine um operador linear T sobre V com essas propriedades.

A.1.3 Terceira Prova

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$, T um operador linear sobre V, $\lambda \in \mathbb{F}$ e E_λ o subconjunto de V definido por:

$$E_\lambda = \{ v \in V \ / \ T(v) = \lambda v \} .$$

Prove que $T(E_\lambda) \subset E_\lambda$.

Questão 2. **(3.0 Pontos)**

Sejam V um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{F}$ e T um operador linear sobre V. Pede–se:

(a) Se $v \in V$ é um autovetor de T, quantos autovalores associados a v podem existir, no máximo? Justifique sua resposta.

(b) Se $\lambda = 0$ é um autovalor de T, podemos afirmar que T não é um operador injetor? A recíproca é verdadeira? Justifique suas respostas.

(c) Se o operador linear T possui somente dois autovalores distintos λ_1 e λ_2 com $dim(V_{\lambda_1}) = n - 1$, prove que T é um operador diagonalizável.

Questão 3. **(3.0 Pontos)**

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um operador linear definido por $T(x,y) = (5x - 6y \, , \, x)$. Pede–se:

(a) Calcule os autovalores e os autovetores do operador T.

(b) Exiba uma base para cada um dos autoespaços do operador T.

(c) Utilizando o resultado do item (a), calcule os valores de a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, tais que

$$T^8(x,y) = (ax + by \, , \, cx + dy) \, ,$$

onde $T^n : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é o operador linear definido por:

$$T^0 = I \qquad \text{e} \qquad T^n = T^{n-1} \circ T \qquad \text{para todo natural} \qquad n \geq 1 \, .$$

Questão 4. **(3.0 Pontos)**

Determine explicitamente a expressão do operador linear T sobre $\mathbb{R}^4$, diagonalizável, satisfazendo simultaneamente as seguintes condições:

(a) $Ker(T) = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y - z + t = 0 \quad \text{e} \quad z - t = 0 \}$.

(b) $T(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 2, 0)$.

(c) $(0, 1, 0, 0) \in Im(T)$.

(d) $\lambda = -3$ é um autovalor do operador T.

A.1.4 Segunda Chamada

Questão 1. **(2.5 Pontos)**

Diga se é Falsa ou Verdadeira cada uma das afirmações abaixo, justificando sua resposta.

(a) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que é injetora.

(b) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que é sobrejetora.

(c) Subconjuntos de um conjunto linearmente dependente são linearmente dependentes.

(d) Os espaços vetoriais $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ e $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ são isomorfos.

(e) Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita com $dim(V) = n$, U e W subespaços de V com $dim(U) > \dfrac{n}{2}$ e $dim(W) > \dfrac{n}{2}$. Então, $U \cap W = \{ 0_V \}$.

Questão 2. **(2.5 Pontos)**

Considere o subconjunto U do espaço vetorial real $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ definido por:

$$U = \{ A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ A^t = A \quad \text{e} \quad tr(A) = 0 \}$$

(a) Mostre que U é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Considerando o espaço vetorial $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, exiba uma base para o subespaço U.

Questão 3. **(2.5 Pontos)**

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

onde β é a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $\gamma = \{ (1,0,1), (-1,0,1), (0,1,0) \}$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Pede–se

(a) Determine $T(1,0)$ e $T(0,1)$.

(b) Determine uma base para $Im(T)$.

(c) A transformação T é injetora? Justifique sua resposta.

Questão 4. **(2.5 Pontos)**

Considere o operador linear T sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$T(a + bx + cx^2) = (3a + 2b + c) + (b - c)x + 2cx^2 .$$

Determine os autovalores e os autovetores do operador linear T, exibindo uma base para cada um dos autoespaços de T. O operador T é diagonalizável? Justifique sua resposta.

A.1.5 Exame

Questão 1. **(3.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $I\!R^4$ e os seguintes subespaços

$$\begin{aligned} U &= \{ (x,y,z,t) \in I\!R^4 \ / \ x+y-z+t = 0 \quad \text{e} \quad z-t = 0 \} \\ W &= \{ (x,y,z,t) \in I\!R^4 \ / \ x+y+z = 0 \} \end{aligned}$$

(a) Determine uma base para o subespaço $U + W$.

(b) O subespaço $U + W$ é uma soma direta dos subespaços U e W? Justifique.

(c) Determine uma base para o subespaço $U \cap W$.

(d) Determine o operador linear T sobre $I\!R^4$ tal que $Im(T) = U \cap W$ e $Ker(T) = W$.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_3(I\!R)$ e o subconjunto U definido por:

$$U = \{ p(x) \in \mathcal{P}_3(I\!R) \ / \ p(1) + p(-1) = 0 \} .$$

O subconjunto U é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(I\!R)$? Justifique sua resposta. Em caso afirmativo, determine uma base para U.

Questão 3. **(3.0 Pontos)**

Considere o operador linear T sobre $I\!R^2$ tal que

$$[T]^{\alpha}_{\gamma} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

onde $\alpha = \{ (0,1), (1,0) \}$ e $\gamma = \{ (-1,0), (0,-1) \}$ são bases ordenadas de $I\!R^2$.

(a) Determine $T(1,0)$ e $T(0,1)$.

(b) Determine a matriz $[I]^{\alpha}_{\gamma}$.

(c) Determine explicitamente a expressão do operador linear T.

(d) O operador linear T^2 é diagonalizável? Justifique.

Questão 4. **(3.0 Pontos)**

Sejam A e B matrizes similares de ordem n. Pede–se:

(a) Mostre que A e B possuem os mesmos autovalores.

(b) Determine a relação entre os autovetores das matrizes A e B.

(c) Mostre que se A é diagonalizável, então B é diagonalizável.

A.2 Primeiro Semestre de 2006

A.2.1 Primeira Prova

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{C}([-1,1])$. Dê exemplo de um subconjunto S de $\mathcal{C}([-1,1])$ que é fechado com relação à operação de adição de elementos, mas que não é fechado com relação à operação de multiplicação por escalar. Justifique sua resposta.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Considere V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Sejam $S = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$ um conjunto linearmente independente em V e um elemento $u \in V$, não nulo. Mostre que o conjunto $\{ v_1, v_2, v_3, v_4, u \}$ é linearmente dependente se, e somente se, o elemento u pertence ao subespaço gerado pelos elementos do conjunto S, isto é, $u \in [v_1, v_2, v_3, v_4]$.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Considere os seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} U &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - 4y + 6z = 0 \} \\ W &= [(1,0,1), (1,1,3)] \end{aligned}$$

Determine um sistema de geradores para cada um dos subespaços $U + W$ e $U \cap W$. O subespaço $U + W$ é uma soma direta dos subespaços U e W? Justifique sua resposta.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Determine uma base para o subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{ p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \ / \ p(-1) + p'(-1) = 0 \quad \text{e} \quad p(1) = 0 \}.$$

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos elementos do conjunto $S = \{ (1,0,1,2), (2,-1,1,3), (-1,1,0,-1) \}$. Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ contendo uma base do subespaço W.

A.2.2 Segunda Prova

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

A matriz de mudança da base ordenada $\alpha = \{ p_1(x), p_2(x), p_3(x) \}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, onde

$$p_1(x) = 1 - x \,, \quad p_2(x) = 1 + x \quad \text{e} \quad p_3(x) = 1 - x^2 \,,$$

para uma base ordenada $\gamma = \{ q_1(x), q_2(x), q_3(x) \}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ é dada por:

$$[I]^{\alpha}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Determine a base ordenada γ. Dado o polinômio $p(x) = 3 - x + 2x^2$ determine seu vetor de coordenadas $[p(x)]_{\alpha}$, com relação à base ordenada α.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Determine explicitamente a expressão de uma transformação linear T de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ em $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ satisfazendo simultaneamente as seguintes condições:

(a) O elemento $p(x) = (1 + x^2) \in Ker(T)$.

(b) O elemento $q(x) = 1 \notin Ker(T)$.

(c) O elemento $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in Im(T)$.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear **injetora**. Mostre que se $\{ v_1, \cdots, v_m \}$ é linearmente independente em V, então $\{ T(v_1), \cdots, T(v_m) \}$ é linearmente independente em W.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Diga se é Falsa ou Verdadeira cada uma das afirmações abaixo, justificando sua resposta.

(a) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que é injetora.

(b) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que é sobrejetora.

(c) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que é bijetora.

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Considere $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que

$$T(1,-1) \;=\; 2 + x \qquad \text{e} \qquad T(0,1) \;=\; x - 1\,.$$

Mostre que T é um isomorfismo de $\mathbb{R}^2$ em $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$. Determine o isomorfismo inverso T^{-1} de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^2$.

A.2.3 Terceira Prova

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Seja U um subespaço de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tendo como base $\beta = \{\, x - x^2 + x^3,\ 1 + x + x^2 \,\}$. Considere a transformação linear $T : U \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dada por: $T(p(x)) = p'(x) + (x+1)p(0)$.

Considere que $[T]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, onde γ é uma base para $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Pede–se:

(a) Determine $[p(x)]_\beta$ sabendo que $[T(p(x))]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) Se $\gamma = \{\, x - 1,\ p_1(x),\ p_2(x) \,\}$, determine o polinômio $q(x) = p_1(x) - p_2(x)$.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{C}^1_0([0,1])$, isto é,

$$\mathcal{C}^1_0([0,1]) = \{\, f \in \mathcal{C}^1([0,1]) \ / \ f(1) = 0 \,\}.$$

Verifique se cada uma das aplicações

(a) $\langle\, f \,,\, g \,\rangle = \displaystyle\int_0^1 f'(x)g(x)dx$ **(b)** $\langle\, f \,,\, g \,\rangle = \displaystyle\int_0^1 f'(x)g'(x)dx$

define um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{C}^1_0([0,1])$. Justifique sua resposta.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Sejam V um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ e $\|\cdot\|_2$ a norma Euclidiana. Pede–se:

(a) Mostre que se θ é o ângulo entre os elementos $u, v \in V$, não nulos, então

$$\|\, u + v \,\|_2^2 = \|\, u \,\|_2^2 + \|\, v \,\|_2^2 + 2\,\|\, u \,\|_2\,\|\, v \,\|_2 \cos(\theta).$$

(b) Mostre que se $\beta = \{\, q_1, \cdots, q_n \,\}$ é um conjunto ortonormal em V, então β é um conjunto linearmente independente em V.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno

$$\langle\, p \,,\, q \,\rangle \;=\; \int_{-1}^{1} x^2 p(x) q(x) dx \qquad ; \qquad \forall \;\; p,\, q \;\in\; \mathcal{P}_2(\mathbb{R})\,.$$

Determine uma base para o complemento ortogonal do subespaço $S = [1 + x]$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ com relação ao produto interno $\langle\, \cdot \,,\, \cdot \,\rangle$ definido acima.

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ com o produto interno

$$\langle\, p \,,\, q \,\rangle \;=\; \int_{0}^{1} p(x) q(x) dx \qquad ; \qquad \forall \;\; p,\, q \;\in\; \mathcal{P}_2(\mathbb{R})\,.$$

Determine a melhor aproximação do polinômio $q(x) = 1 - x^2$ no subespaço $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

A.2.4 Segunda Chamada

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e a base $\beta = \{\, 1,\, x,\, x^2 \,\}$. Dada a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pede–se:

(a) Determine uma base $\gamma = \{\, p_1(x),\, p_2(x),\, p_3(x) \,\}$ de modo que $P = [I]^{\gamma}_{\beta}$.

(b) Dado o polinômio $q(x) = -3 - 2x + 2x^2$, determine $[q(x)]_{\gamma}$.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e S o subespaço definido por:

$$S = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0 \,\}.$$

Determine um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $Im(T) = S$ e $Ker(T) = S^{\perp}$.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por:

$$T(x, y) = (3x - 2y,\, -2x + 3y).$$

Pede–se:

(a) Determine uma base para cada um dos seguintes subespaços:

$$U_1 = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ T(x, y) = 5(x, y) \,\}$$

$$U_2 = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ T(x, y) = (x, y) \,\}$$

(b) Mostre que o conjunto $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$, onde β_1 é uma base para U_1 e β_2 é uma base para U_2, é uma base para $\mathbb{R}^2$ e determine $[T]^{\beta}_{\beta}$.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $I\!R^3$ munido do produto interno usual $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Dados os elementos $u = (1,1,1)$ e $v = (3,2,1)$. Pede–se:

(a) Determine os elementos w_1 e w_2 tais que $v = w_1 + w_2$, de modo que w_1 seja ortogonal ao elemento u e que o conjunto $\{ w_2, u \}$ seja linearmente dependente.

(b) Decompor o elemento $w = (1,-1,2)$ como a soma de um elemento no subespaço $S = [u, w_1]$ e outro no subespaço $S^{\perp}$.

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $I\!R^4$ munido do produto interno usual. Seja U o subespaço gerado pelos elementos $u_1 = (1,1,1,1)$ e $u_2 = (-1,1,-1,1)$. Pede–se:

(a) Determine a melhor aproximação do elemento $v = (2,1,3,1)$ no subespaço U.

(b) Determine um subespaço W de modo que $I\!R^4 = U \oplus W$. Justifique sua resposta.

A.2.5 Exame

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_2(I\!R)$ e o subconjunto U definido por:

$$U = \left\{ p \in \mathcal{P}_2(I\!R) \;/\; \int_{-1}^{1} p(x)dx \;+\; p'(0) = 0 \right\}.$$

O subconjunto U é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(I\!R)$? Justifique sua resposta. Em caso afirmativo, determine uma base para U.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Considere V um espaço vetorial real e $\beta = \{ u_1, u_2, u_3 \}$ uma base ordenada de V. Seja $\gamma = \{ w_1, w_2, w_3 \}$ cujos elementos estão relacionados com os elementos da base β da seguinte forma:

$$\begin{cases} w_1 = u_1 - u_2 - u_3 \\ w_2 = 2u_2 + 3u_3 \\ w_3 = 3u_1 + u_3 \end{cases}$$

(a) Mostre que γ é uma base para V.

(b) Determine a matriz de mudança de base $[I]^{\gamma}_{\beta}$.

(c) Se um elemento $v \in V$ tem por vetor de coordenadas, em relação à base γ,

$$[v]_{\gamma} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

qual é o seu vetor de coordenadas com relação à base ordenada β ?

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Sejam U e W subespaços vetoriais de $I\!R^3$ definidos por:

$$U = \{ (x, y, z) \in I\!R^3 \;/\; x + y + z = 0 \}$$

$$W = [(1, 0, 1), (0, -1, 1)]$$

Determine um operador linear T sobre $I\!R^3$ tal que $Im(T) = U$ e $Ker(T) = U \cap W$.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Considere o operador linear $T : \mathcal{P}_3(I\!R) \longrightarrow \mathcal{P}_3(I\!R)$ definido por:

$$T(p(x)) \;=\; p(x) \;+\; (1 \,+\, x)p'(x)\,.$$

Verifique se T é um automorfismo de $\mathcal{P}_3(I\!R)$ e determine a matriz $[T]^{\beta}_{\beta}$, onde β é a base canônica de $\mathcal{P}_3(I\!R)$.

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_2(I\!R)$ com o produto interno

$$\langle\, p \,,\, q \,\rangle \;=\; \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx \qquad ; \qquad \forall\; p,\, q \;\in\; \mathcal{P}_2(I\!R)\,.$$

Determine uma base para o complemento ortogonal do subespaço $S = [1 \,+\, x,\, 1 \,-\, x^2]$ em $\mathcal{P}_2(I\!R)$ com relação ao produto interno $\langle\, \cdot \,,\, \cdot \,\rangle$ definido acima.

A.3 Segundo Semestre de 2005

A.3.1 Primeira Prova

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $V = \{ (x, y) \ / \ x, y \in I\!R \}$, com as operações:

- **adição de elementos:** $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 5, \ y_1 + y_2)$
- **multiplicação por escalar:** $\alpha \odot (x, y) = (\alpha x + 5(\alpha - 1), \ \alpha y)$ para $\alpha \in I\!R$.

(a) Exiba o elemento neutro da adição desse espaço.

(b) Exiba o elemento simétrico aditivo do elemento $(x, y) \in V$.

(c) Verifique se $W = \{ (x, y) \in V \ / \ x = -5 \}$ é um subespaço vetorial de V.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Diga se é Falsa ou Verdadeira cada uma das afirmações, justificando sua resposta.

(a) Seja V um espaço vetorial real. Se $\{ v_1, v_2, v_3 \}$ é LI em V, então o conjunto $\{ v_1 - v_2 \ , \ v_2 + v_3 \ , \ v_1 + v_3 \}$ é LI em V.

(b) O subconjunto $W = \{ A \in I\!M_2(I\!R) \ / \ A^2 = A \}$ é um subespaço de $I\!M_2(I\!R)$.

(c) O subconjunto $S = \{ f \in \mathcal{C}([-a, a]) \ / \ f(-x) = f(x) \ ; \ x \in [-a, a] \}$ é um subespaço de $\mathcal{C}([-a, a])$.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Considere o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases} .$$

Pede–se:

(a) Mostre que o conjunto solução S é um subespaço vetorial de $I\!R^3$ e determine uma base para esse subespaço.

(b) Dado o subespaço vetorial $U = \{ (x, \ y, \ z) \in I\!R^3 \ / \ x - y + z = 0 \}$, determine o subespaço $U \cap S$ e uma base para esse subespaço.

(c) Determine o subespaço vetorial $U + S$ e uma base para esse subespaço.

Questão 4. (2.0 Pontos)

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Pede–se:

(a) Mostre que o subconjunto $W = \{ p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ / \ p(2) = 0 \}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(b) Exiba uma base β para o subespaço W.

(c) Encontre as coordenadas do polinômio $p(x) = 6 - 5x + x^2$ com relação à base β.

Questão 5. (2.0 Pontos)

Considere o subespaço

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y + z = 0 \quad \text{e} \quad -x + 3y + 2z = 0 \}$$

do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. Determine um subespaço W do $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

A.3.2 Primeira Prova (*Substitutiva*)

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $(V, \oplus, \odot)$, onde $V = \{\ (x,y) \in I\!R^2 \ \ / \ \ x > 0 \quad \text{e} \quad y > 0\ \}$ munido com as operações

- **adição de elementos:** $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 x_2,\ y_1 y_2),\ \ \forall\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in V.$
- **multiplicação por escalar:** $\alpha \odot (x, y) = (x^\alpha,\ y^\alpha),\ \ \forall\ \alpha \in I\!R \quad \text{e} \quad \forall\ (x, y) \in V.$

Pede–se:

(a) Exiba o elemento neutro da adição desse espaço.

(b) Exiba o elemento simétrico aditivo do elemento $u = (x, y) \in V$.

(c) Mostre que $(\alpha + \beta) \odot u = \alpha \odot u \oplus \beta \odot u\ ,\ \ u = (x, y)\ \in\ V \quad \text{e} \quad \alpha, \beta\ \in\ I\!R.$

(d) $W = \{\ (x, y) \in V \ \ / \ \ y = 2x\ \}$ é um subespaço vetorial de V ?

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Considere os seguintes subconjuntos do espaço vetorial real $I\!M_n(I\!R)$

$$U \ = \ \{\ A \ \in \ I\!M_n(I\!R) \ \ / \ \ A^t \ = \ A\ \} \qquad \text{e} \qquad W \ = \ \{\ A \ \in \ I\!M_n(I\!R) \ \ / \ \ A^t \ = \ -A\ \}$$

Mostre que U e W são subespaços vetoriais de $I\!M_n(I\!R)$ e que $I\!M_n(I\!R) \ = \ U \oplus W$. Considerando o espaço vetorial $I\!M_3(I\!R)$, exiba uma base para os subespaços U e W.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_3(I\!R)$ e os elementos $p(x) \ = \ -3 \ - \ 5x \ - \ 2x^2 \ + \ x^3$ e $q(x) \ = \ -9 \ - \ 4x \ - \ 5x^2 \ + \ 3x^3$. Mostre que o elemento $r(x) \ = \ -6 \ + \ 12x \ - \ 2x^2 \ + \ 2x^3$ pode ser escrito como uma combinação linear dos elementos p e q, mas que o elemento $s(x) \ = \ 8 \ + \ 7x \ - \ 2x^2 \ + \ 3x^3$ não pode.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real. Se $\{\ v_1,\ v_2,\ v_3\ \}$ é linearmente independente em V, mostre que $\{\ v_1 \ + \ v_2 \ + \ v_3\ ,\ v_2 \ + \ v_3\ ,\ v_1 \ + \ v_3\ \}$ é linearmente independente em V.

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Considere o seguinte subconjunto do espaço vetorial real $I\!M_n(I\!R)$

$$U = \{ A \in I\!M_n(I\!R) \ / \ A^t = A \quad \text{e} \quad tr(A) = 0 \}$$

Mostre que U é um subespaço vetorial de $I\!M_n(I\!R)$. Considerando o espaço vetorial $I\!M_3(I\!R)$, exiba uma base para o subespaço U.

A.3.3 Segunda Prova

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Seja V um espaço vetorial real e $\gamma = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ uma base para V. Pede–se:

(a) Mostre que $\beta = \{ v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3 \}$ é uma base para V.

(b) Determine a matriz de mudança da base β para a base γ.

(c) Se o elemento $v \in V$ tem como vetor de coordenadas em relação à base γ

$$[v]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

determine seu vetor de coordenadas $[v]_\beta$.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Considere os seguintes subespaços de $I\!R^4$

$$\begin{aligned} U &= [(1,0,1,1),(0,1,1,1)] \\ W &= \{ (x,y,z,t) \in I\!R^4 \ / \ x + y = 0 \quad \text{e} \quad z + t = 0 \} \end{aligned}$$

Determine um operador linear T sobre $I\!R^4$ tal que $Ker(T) = W$ e $Im(T) = U$.

Questão 3. **(3.0 Pontos)**

Diga se é Falsa ou Verdadeira cada uma das afirmações, justificando sua resposta.

(a) $D : I\!M_2(I\!R) \longrightarrow I\!R$ com $D(A) = det(A)$ é uma transformação linear.

(b) Não existe transformação linear $T : I\!R^4 \longrightarrow I\!R^3$ que é injetora.

(c) Existe uma transformação linear $T : I\!R^4 \longrightarrow \mathcal{P}_2(I\!R)$ que é sobrejetora.

(d) Existe transformação linear $T : I\!R^m \longrightarrow I\!R^n$, com $m < n$, que é bijetora.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Considere as transformações lineares $T : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^3$ e $P : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^2$ dadas por: $T(x,y) = (2x , x - y , y)$ e $P(x,y,z) = (y - z , z - x)$. Determine a matriz $[T \circ P]^\beta_\beta$, onde β é a base canônica do $I\!R^3$, e determine uma base para o subespaço $Im(T \circ P)$. O operador linear $T \circ P$ é um automorfismo de $I\!R^3$? Justifique sua resposta.

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ dada por:

$$T(p(x)) = ap(0) - p'(x)$$

com

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 3 & -3 & b \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix},$$

considerando $\alpha = \{ 1, cx+1, x^2 \}$ a base para $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\beta = \{ 1-x, x \}$ a base para $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$. Pede–se:

(a) Determine os parâmetros $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(b) Determine $[T(q(x))]_\beta$ e $[T(q(x))]_\gamma$, com $\gamma = \{ 1, x \}$ a base canônica de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, sabendo que

$$[q(x)]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A.3.4 Terceira Prova

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Seja V um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e T um automorfismo de V. Mostre que a aplicação

$$\begin{array}{rccl} f(\cdot,\cdot): & V \times V & \longrightarrow & I\!R \\ & (u,v) & \longrightarrow & f(u,v) \;=\; \langle\, T(u)\,,\, T(v)\,\rangle \end{array}$$

define um produto interno em V. Dê um exemplo considerando $V = I\!R^3$ munido do produto interno usual.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

(a) Sejam a e b reais positivos e os elementos $u = (\sqrt{a}, \sqrt{b})$, $v = (\sqrt{b}, \sqrt{a}) \in I\!R^2$. Utilize a desigualdade de Cauchy–Schwarz para comparar a média aritmética $\dfrac{a\,+\,b}{2}$ com a média geométrica $\sqrt{a\,b}$.

(b) Seja V um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e $\|\cdot\|_2$ a norma Euclidiana. Mostre que os elementos $(u - v)$, $(u + v) \in V$ são ortogonais se, e somente se, $\|\,u\,\|_2 = \|\,v\,\|_2$.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}_2(I\!R)$ munido do produto interno

$$\langle\, p\,,\, q\,\rangle \;=\; \int_{-1}^{1} t^2 p(t) q(t) dt\,.$$

A partir da base canônica $\beta = \{\, 1,\; t,\; t^2\,\}$ do espaço $\mathcal{P}_2(I\!R)$, construir uma base ortogonal $\gamma = \{\, P_1,\, P_2,\, P_3\,\}$ para o espaço $\mathcal{P}_2(I\!R)$.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial $I\!R^4$ munido do produto interno usual. Seja U o subespaço gerado pelos elementos $u_1 = (1, -1, 1, 1)$ e $u_2 = (1, 2, 0, 1)$. Pede–se:

(a) Determine uma base para o subespaço $U^{\perp}$.

(b) Calcule a projeção ortogonal do elemento $u = (2, 1, 1, -1)$ no subespaço U.

(c) Considere o operador linear $P : I\!R^4 \longrightarrow I\!R^4$ que representa a projeção ortogonal sobre o subespaço U. Mostre que $Ker(I - P) = U$.

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Seja V um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e $\| \cdot \|_2$ a norma Euclidiana. Considerando os elementos $u, v \in V$, com $v \neq 0_V$, determine o elemento w^* do conjunto $S = \{ w \in V \ / \ w = u - tv \ , \ t \in I\!R \}$ que possui a menor norma Euclidiana. Dê uma interpretação geométrica para o elemento w^*.

A.3.5 Segunda Chamada

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Seja V um espaço vetorial real e $\gamma = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$ uma base ordenada de V. Pede–se:

(a) Mostre que $\beta = \{ v_1 , v_1 + v_2 , v_1 + v_2 + v_3 , v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \}$ é uma base de V.

(b) Se o elemento $v \in V$ tem como vetor de coordenadas

$$[v]_\gamma = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

determine seu vetor de coordenadas $[v]_\beta$.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Considere os seguintes elementos do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (1, -1, 2, 3) \quad , \quad v_2 = (2, 1, -1, -2) \quad \text{e} \quad v_3 = (3, 3, -4, -7) .$$

Sejam U e V subespaços do $\mathbb{R}^4$ tais que $dim(U) = 3$ e $U \cap V = [v_1, v_2, v_3]$. Determine as possíveis dimensões dos subespaços V e $U + V$.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Seja V o subespaço de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ das matrizes simétricas. Considere a transformação linear $T : V \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dada por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right) = (a + b) - b\,x + (c - a + b)\,x^2 .$$

Mostre que T é um isomorfismo. Considerando a base canônica γ para o $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e a base canônica β para o subespaço V, determine a matriz $[T]^\beta_\gamma$.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Mostre que a aplicação $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\langle p , q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

define um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Determine uma base para o complemento ortogonal do subespaço $U = [2 - x]$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ com relação ao produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ definido acima.

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{C}([-1,1])$ munido do produto interno usual. Determine o polinômio $p(x) = a + bx$, $a, b \in \mathbb{R}$, mais próximo da função $f(x) = \sin(\pi x)$, $x \in [-1,1]$, com relação à norma Euclidiana. Dê uma interpretação geométrica para o polinômio $p(x)$.

A.3.6 Exame

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Considere os elementos $u_1 = (-1, 2, 1, 1)$ e $u_2 = (2, 1, -1, 1)$ do $\mathbb{R}^4$. Pede–se:

(a) Encontre o complemento ortogonal do subespaço $W = [u_1, u_2]$ em $\mathbb{R}^4$ com relação ao produto interno usual.

(b) Encontre dois elementos $u_3,\, u_4 \in \mathbb{R}^4$ tais que $\beta = \{\, u_1,\, u_2,\, u_3,\, u_4 \}$ seja uma base para $\mathbb{R}^4$.

(c) Determine a projeção ortogonal do elemento $v = (1, 2, -1, 0) \in \mathbb{R}^4$ sobre W.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Considere o seguinte subconjunto do espaço vetorial real $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$

$$U = \{\, A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ A^t = A \quad \text{e} \quad tr(A) = 0 \,\}\,.$$

Pede–se:

(a) Mostre que U é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Considerando o espaço vetorial $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, exiba uma base para o subespaço U.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$T(2, 1) = (3, 0, 2) \qquad \text{e} \qquad T(1, 2) = (1, 1, 0)\,.$$

Pede–se:

(a) Mostre que T é injetora.

(b) Exiba uma transformação linear $P : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $Ker(P) = Im(T)$.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Considere o operador linear $T : \mathcal{P}_1(I\!R) \longrightarrow \mathcal{P}_1(I\!R)$ dado por:

$$T(p(x)) \;=\; p'(x) \;+\; (x\,+\,1)p(0)\,.$$

Sejam $\beta = \{\, 1,\, 1 - x \,\}$ e $\gamma = \{\, q(x),\, 1 - x \,\}$ bases para $\mathcal{P}_1(I\!R)$ tais que

$$[T]^{\beta}_{\gamma} \;=\; \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix}.$$

Pede–se:

(a) Determine o polinômio $q(x)$ e a constante $s \in I\!R$.

(b) T é um isomorfismo ? Justifique sua resposta.

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

(a) Seja V um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle\, \cdot \,,\, \cdot \,\rangle$ e T um operador linear sobre V. Se $\langle\, T(u)\,,\, T(v)\,\rangle = \langle\, u\,,\, v\,\rangle$ para todo $u,\, v \in V$, então T é um operador injetor.

(b) Considere o espaço vetorial $I\!R^n$ munido do produto interno usual $\langle\, x\,,\, y\,\rangle = y^t x$. Se $A \in I\!M_n(I\!R)$ é uma matriz simétrica, então $\langle\, Ax\,,\, y\,\rangle = \langle\, x\,,\, Ay\,\rangle$ para todo $x,\, y \in I\!R^n$.

A.4 Segundo Semestre de 2004

A.4.1 Primeira Prova

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $V = \{ (x,y) \in I\!R^2 \ / \ x > 0 \}$ com as operações:

Adição de Elementos: $(x_1,\ y_1) \oplus (x_2,\ y_2) = (x_1 x_2,\ y_1 + y_2)$

Multiplicação por Escalar: $\alpha \odot (x,\ y) = (x^{\alpha},\ \alpha y) \quad , \quad \alpha \in I\!R$

Pede–se:

(a) Exiba o elemento neutro da operação $\oplus$.

(b) Exiba o inverso aditivo do elemento $v = (x,\ y) \in (\mathcal{V})$.

(c) Mostre que $\alpha \odot (u \oplus v) = \alpha \odot u \oplus \alpha \odot v \quad , \quad u,\ v \in V$ e $\alpha \in I\!R$.

(d) Verifique se $W = \{ (x,\ y) \in V \ / \ x = 1 \}$ é um subespaço vetorial de V.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Considere os seguintes subespaços de $I\!R^4$

$$W = \{ (x,\ y,\ z,\ t) \in I\!R^4 \ / \ x - y - z = 0 \quad \text{e} \quad x - 3y + t = 0 \}$$

$$U = [(1,\ 2,\ 1,\ 3),\ (3,\ 1,\ -1,\ 4)]$$

Determine uma base para os subespaços $U + W$ e $U \cap W$. O subespaço $U + W$ é uma soma direta dos subespaços U e W? Justifique sua resposta.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Considere o seguinte subespaço S de $\mathcal{P}_3(I\!R)$ definido da seguinte forma:

$$S = \{ \ p \in \mathcal{P}_3(I\!R) \ / \ p(-1) = 0 \quad \text{e} \quad p'(1) = 0 \ \} .$$

Qual é a dimensão de S ? Encontre uma base para S.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Seja $\Gamma = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ uma base para o espaço vetorial real V. Pede–se:

(a) Mostre que $\beta = \{ v_1, v_1 + v_2, -v_1 + v_2 + v_3 \}$ é também uma base para V.

(b) Se o elemento $v \in V$ tem coordenadas

$$[v]_\Gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

em relação à base Γ, quais são as suas coordenadas em relação à base β ?

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$, com $dim(V) = 9$. Sejam U e W subespaços vetoriais de V tais que $dim(U) = 6$ e $dim(W) = 5$. Mostre que $2 \leq dim(U \cap W) \leq 5$.

A.4.2 Segunda Prova

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Considere o operador linear

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathcal{P}_4(I\!R) & \longrightarrow & \mathcal{P}_4(I\!R) \\ & p & \longrightarrow & q \;=\; T(p) \end{array}$$

com $q(x) \;=\; T(p)(x) \;=\; x^2\, p''(x) \quad ; \quad x \;\in\; I\!R$. Pede–se:

(a) Determine a representação matricial de T com relação à base canônica.

(b) Determine o núcleo e a imagem do operador T.

(c) T é um operador linear injetor ? Justifique.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

(a) Exiba uma transformação linear $T : I\!R^3 \longrightarrow \mathcal{P}_2(I\!R)$ tal que $dim(\,Ker(T)\,) = 1$.

(b) A transformação linear T é sobrejetora ? Justifique.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Sejam F e G operadores lineares de um espaço V, tais que $G \circ F = F \circ G$. Mostre que $Ker(F) \;+\; Ker(G) \;\subset\; Ker(F \circ G)$.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo $I\!R$ e $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ um produto interno em W. Se $T : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear injetora, então a aplicação $f(\cdot,\cdot)$ dada por:

$$f(u,v) \;=\; \langle\, T(u)\,,\, T(v)\,\rangle \qquad \text{para todo} \qquad u,\; v \;\in\; V$$

define um produto interno em V.

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Sejam $a_1, \;\cdots,\; a_n$ números reais estritamente positivos. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, em dois elementos $u,\; v \;\in\; I\!R^n$ escolhidos adequadamente, mostre que

$$(\, a_1 \;+\; \cdots \;+\; a_n\,) \left(\frac{1}{a_1} \;+\; \cdots \;+\; \frac{1}{a_n} \right) \;\geq\; n^2$$

A.4.3 Terceira Prova

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Seja W o subespaço de $I\!R^5$ gerado pelos vetores $u = (1,\ 2,\ 3,\ -1,\ 2)$ e $v = (2,\ 4,\ 7,\ 2,\ -1)$. Encontre uma base ortogonal para o complemento ortogonal $W^\perp$ de W em $I\!R^5$ com relação ao produto interno usual de $I\!R^5$.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Determine todos os valores dos parâmetros a e b de modo que a matriz A dada abaixo seja diagonalizável. Para estes valores de a e b, determine uma matriz inversível P e a matriz diagonal D de modo que $P^{-1}AP = D$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & b & 2 \end{pmatrix}.$$

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Determinar e classificar os pontos críticos das funções $F : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$, dadas abaixo, através da análise dos autovalores da matriz Hessiana, justificando sua resposta.

(a) $F(x,y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$

(b) $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Se $B \in I\!M_n(I\!R)$ é similar a matriz $A \in I\!M_n(I\!R)$ **auto–reflexiva**, mostre que B é uma matriz **auto–reflexiva**. Estabeleça a relação entre os autovetores de A e B.

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Considere o operador linear $T : \mathcal{P}_3(I\!R) \longrightarrow \mathcal{P}_3(I\!R)$ dado por:

$$T(p)(x) = x^2 p''(x) + p'(x) + p(x) \qquad ; \qquad x \in I\!R\,.$$

(a) Determine a matriz $[T]^\beta_\beta$ onde β é a base canônica de $\mathcal{P}_3(I\!R)$.

(b) Determine os autovalores e os autovetores do operador T.

(c) Para cada um dos autovalores do operador T, diga qual é o subespaço associado.

(d) Diga qual é a multiplicidade algébrica e geométrica de cada um dos autovalores do operador T. Justifique sua resposta.

(e) O operador T é diagonalizável ? Justifique sua resposta.

A.4.4 Segunda Chamada

ATENÇÃO: Faça as 2 (duas) questões relativas à prova que você faltou e resolva mais 3 (três) questões, dentre as outras 4 (quatro). Leia as questões com atenção.

Questão 1. – P1 **(2.0 Pontos)**

Sejam U e V subespaços de $\mathbb{R}^4$ tais que $dim(U) = 3$ e $dim(V) = 3$ e o subespaço $U \cap V = [(1,1,1,1),\ (1,-3,4,-2),\ (2,-2,5,-1)]$. Pede–se

(a) Qual é a dimensão do subespaço $U + V$? Justifique.

(b) Exiba uma base do $\mathbb{R}^4$ que contenha uma base do subespaço V, sabendo que o elemento $(0,0,0,1) \in V$.

Questão 2. – P1 **(2.0 Pontos)**

Seja $\Gamma = \{ v_1 , v_2 , v_3 , v_4 \}$ uma base para o espaço vetorial real $(E, +, \cdot)$.

(a) Mostre que $\beta = \{ v_1 , v_1 + v_2 , v_1 + v_2 + v_3 , v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \}$ é também uma base para E.

(b) Se o elemento $v \in E$ tem coordenadas $[v]_\Gamma = (1,\ 1,\ -1,\ 0)$ em relação à base Γ , quais são as suas coordenadas em relação à base β ?

Questão 3. – P2 **(2.0 Pontos)**

Seja V o subespaço de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ das matrizes triangulares superiores. Pede–se:

(a) Exiba uma base para V.

(b) Seja $T : V \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ a transformação linear dada por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) = (a + b) + b\,x + (c - a - b)\,x^2 .$$

Mostre que T é uma transformação inversível.

Questão 4. – P2 **(2.0 Pontos)**

Sejam $(V, +, \cdot)$ e $(W, +, \cdot)$ espaços vetoriais reais e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Mostre que:

(a) $Ker(T) = \{ 0_V \}$ se, e somente se, T é injetora.

(b) Se T é injetora e $\{ v_1, v_2, \ldots, v_m \}$ é linearmente independente em V, então $\{ T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_m) \}$ é linearmente independente em W.

Questão 5. – P3 **(2.0 Pontos)**

Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ dado por

$$W = \{ (a + c, b + c, -b, -a) \in \mathbb{R}^4 \ / \ a, b, c \in R \} .$$

Encontre uma base ortonormal para o subespaço W com relação ao produto interno usual de $\mathbb{R}^4$.

Questão 6. – P3 **(2.0 Pontos)**

Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$T(x, y, z) = (3x - 2y - 4z, 4x - 3y - 4z, -z) . \quad \text{Pede–se :}$$

(a) Encontre $A = [T]^{\beta}_{\beta}$ onde β é a base canônica de $\mathbb{R}^3$

(b) Encontre os autovalores e os autovetores A

(c) Calcule A^9 de uma forma eficiente.

A.4.5 Exame

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Considere um subespaço vetorial W de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ com base $\beta = \{ 1 + t, 1 - t^2 \}$. Sabemos que a matriz de mudança da base β para a base γ é dada por:

$$[I]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Determine a base γ do subespaço W.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

(a) Sejam U e V espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$ e T uma transformação linear de U em V. Se $dim(U) > dim(V)$, prove que existe um elemento não nulo $u \in U$ tal que $T(u) = 0_V$.

(b) Considerando $U = \mathbb{R}^3$ e $V = \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, dê um exemplo de uma transformação linear T de U em V que seja sobrejetora.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ dado por:

$$W = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y = 0 \quad \text{e} \quad 2x - y + z = 0 \} .$$

Determine uma base ortogonal para cada um dos subespaços W e $W^{\perp}$.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica. Pede–se:

(a) Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Mostre que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ temos que

$$\langle A x , y \rangle = \langle x , A y \rangle .$$

(b) Mostre que os autovalores de A são reais.

(c) Mostre que autovetores de A associados a autovalores distintos são ortogonais.

(d) Mostre que se a matriz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é ortogonalmente similar à matriz A, isto é, existe uma matriz ortogonal $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $B = Q^t A Q$, então B é uma matriz simétrica.

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Considere o operador linear $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ definido da seguinte forma:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2a + b & 2b \\ 2c & 3d \end{bmatrix} .$$

T é um operador linear diagonalizável ? Justifique.

A.5 Segundo Semestre de 1999

A.5.1 Primeiro Teste

Questão 1. (5.0 Pontos)

(a) Seja V um espaço vetorial e sejam U e W subespaços vetoriais de V. Mostre que o subconjunto de V dado por

$$U + W = \{ \ v \in V \ / \ v = u + w \ \ ; \ \ u \in U \ \ e \ \ w \in W \ \}$$

é também um subespaço vetorial de V.

(b) Dado o subespaço $W = \{ \, (x, \ y, \ z) \in I\!\!R^3 \ / \ x + 2y + z = 0 \, \}$ determine um subespaço U do $I\!\!R^3$ tal que $I\!\!R^3 = U \oplus W$. Justifique sua resposta.

Questão 2. (5.0 Pontos)

(a) Mostre que o subconjunto W de $I\!\!M_3(I\!\!R)$ definido por

$$W = \{ \ A \in I\!\!M_3(I\!\!R) \ / \ A^t = -A \ \}$$

é um subespaço vetorial de $I\!\!M_3(I\!\!R)$.

(b) Encontre uma base para o subespaço W. Qual a dimensão do subespaço W ? Justifique suas respostas.

A.5.2 Primeira Prova

Questão 1. **(3.0 Pontos)**

Seja $\Gamma = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ uma base para o espaço vetorial $(E, +, \cdot)$. Pede–se:

(a) Mostre que $\beta = \{ v_1, v_1 + v_2, -v_1 + v_2 + v_3 \}$ é também uma base para E.

(b) Se o elemento $v \in E$ tem coordenadas $[v]_\Gamma = (2, -1, 1)$ em relação à base Γ, quais são as suas coordenadas em relação à base β ?

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real

$$\mathcal{C}^\star([a,b]) = \{ f \in \mathcal{C}^1([a,b]) \ / \ f(a) = f(b) \} .$$

A aplicação $F : \mathcal{C}^\star([a,b]) \times \mathcal{C}^\star([a,b]) \longrightarrow I\!R$ dada por

$$F(f,g) = \int_a^b f'(x)g'(x)dx ,$$

define um produto interno em $\mathcal{C}^\star([a,b])$? Justifique sua resposta.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Seja $(E, +, \cdot)$ um espaço vetorial e S um subconjunto de E com um número finito de elementos. Nas afirmações abaixo, demonstre se for verdadeira ou dê um contra–exemplo se for falsa:

(a) Se S é linearmente independente, então qualquer subconjunto de S é também linearmente independente;

(b) Se S é linearmente dependente, então qualquer subconjunto de S é também linearmente dependente.

Questão 4. **(3.0 Pontos)**

Sejam U e W subespaços vetoriais de dimensão 3 de $I\!R^4$ e seja

$$U \cap W = [(1, 2, 1, 0), (-1, 1, 0, 1), (1, 5, 2, 1)] .$$

Pede-se:

(a) $I\!R^4 = U + W$? Justifique sua resposta;

(b) Determine uma base ortonormal para o subespaço $U \cap W$;

(c) Determine a projeção do elemento $u = (1, 1, 1, 1)$ no subespaço $U \cap W$.

A.5.3 Segundo Teste

Questão 1. **(5.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno usual. Seja S o subespaço dado por: $S = \{ D \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ D$ é uma matriz diagonal $\}$. Determine o subespaço $S^\perp$, isto é, o complemento ortogonal de S. Encontre uma base para o subespaço $S^\perp$.

Questão 2. **(5.0 Pontos)**

Considere a seguinte transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$T(x, y) = (2x, x - y, y).$$

Pede–se:

(a) Determine a representação matricial de T com relação às bases canônicas.

(b) Determine uma base para a imagem da transformação T.

(c) T é uma transformação linear injetora ? Justifique.

(d) T é uma transformação linear sobrejetora ? Justifique.

A.5.4 Segunda Prova

Questão 1. **(2.5 Pontos)**

Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ dada por:

$$T(p)(x) \;=\; xp''(x) \;+\; p(x) \qquad ; \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Determine a matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$ onde β é a base canônica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(b) Determine o núcleo e a imagem da transformação T.

(c) T é um isomorfismo ? Justifique.

Questão 2. **(2.5 Pontos)**

Sejam A , $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ duas matrizes similares, isto é, existe uma matriz inversível $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A \;=\; P^{-1}\, B\, P$. Estabeleça a relação entre os autopares de A e B.

Questão 3. **(2.5 Pontos)**

(a) Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ inversível. Estabeleça a relação entre os autopares de A e A^{-1} .

(b) Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Mostre que as matrizes A e A^t possuem os mesmos autovalores. **Sugestão:** utilize o polinômio característico.

Questão 4. **(2.5 Pontos)**

Determine todos os valores dos parâmetros a e b de modo que a matriz A dada abaixo seja diagonalizável. Para estes valores de a e b determine uma matriz inversível P e a matriz diagonal D de modo que $P^{-1}AP \;=\; D$.

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & b & 2 \end{pmatrix} .$$

A.5.5 Exame

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Considere o seguinte subespaço de $\mathcal{P}_3([-1,1])$

$$S = \{ \; p \in \mathcal{P}_3([-1,1]) \; / \; p(-1) = 0 \; \text{ e } \; p'(1) = 0 \; \}.$$

Qual é a dimensão de S ? Encontre uma base para S.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Seja $(E, \, +, \, \cdot)$ um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle \; . \; , \; . \; \rangle$. Considere a função $J : I\!R \longrightarrow I\!R$ definida da seguinte forma: dados os elementos $u \, , \, v \in E$, não nulos, seja

$$J(\alpha) = \| \; v - \alpha u \; \|^2 \quad ; \quad \alpha \in I\!R \, ,$$

onde $\| \cdot \|$ é a norma proveniente do produto interno.

(a) Mostre que a função J possui um único ponto de mínimo α^*.

(b) Dê uma interpretação para o elemento $\alpha^* u$.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2(I\!R) \longrightarrow I\!R^3$ definida da seguinte forma

$$T(\, a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \,) = (\, a_0 + a_1 + a_2 \, , \; a_0 + a_1 \, , \; a_0 + a_2 \,) \, .$$

(a) Determine a matriz $[T]^{\Gamma}_{\beta}$ onde Γ é a base canônica de $\mathcal{P}_2(I\!R)$ e β é a base canônica de $I\!R^3$.

(b) Mostre que T é um isomorfismo e determine a expressão da transformação linear $T^{-1}(\, x \, , \, y \, , \, z \,)$ para todo $(\, x \, , \, y \, , \, z \,) \in I\!R^3$.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Utilize a forma diagonal da matriz A para calcular eficientemente A^n, $n \in I\!N$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Considere $(E, \, +, \, \cdot)$ um espaço vetorial munido do produto interno $\langle \cdot \, , \cdot \rangle$ e um operador linear **auto-adjunto** $T : \; E \longrightarrow E$, isto é, $\langle \; T(v) \; , \; u \; \rangle = \langle \; v \; , \; T(u) \; \rangle$ para todo $u, v \in E$. Sejam λ_1 e λ_2 autovalores distintos de T e v_1 e v_2 os autovetores associados a λ_1 e λ_2 , respectivamente. Então, v_1 e v_2 são ortogonais.

A.6 Segundo Semestre de 1998

A.6.1 Primeiro Teste

Questão 1. **(5.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Dadas as seguintes matrizes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

identificar o subespaço gerado pelos elementos do conjunto $S = \{ A_1, A_2, A_3 \}$.

Questão 2. **(5.0 Pontos)**

Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Mostre que, se U e W são subespaços vetoriais de E , então $U + W$ também é um subespaço vetorial de E.

Questão 3. **(5.0 Pontos)**

Considere o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Mostre que

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x, y, z) \text{ é solução do sistema linear homogêneo} \}$$

é um subespaço do $\mathbb{R}^3$. Encontre os vetores geradores do subespaço S.

A.6.2 Primeira Prova

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo F. Mostre que se $\{ v_1, v_2, v_3 \}$ é linearmente independente, então $\{ v_1+v_2, v_1+v_3, v_2+v_3 \}$ também é linearmente independente em V.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Considere o subespaço W de $I\!R^3$ gerado pelos elementos

$$w_1 = (1,-1,0,0) \quad , \quad w_2 = (0,0,1,1) \quad , \quad w_3 = (-2,2,1,1) \quad \text{e} \quad w_4 = (1,0,1,0) \,.$$

Pede–se:

(a) Determine uma base para W.

(b) O elemento $u = (2,-3,2,2) \in W$?

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

(a) Dado o subespaço $S = \{ (x,y,z) \in I\!R^3 \ / \ x + 2y + z = 0 \}$ do $I\!R^3$. Determine um subespaço W do $I\!R^3$ tal que $I\!R^3 = S \oplus W$.

(b) Dê exemplos de dois subespaços, S e W, de dimensão dois em $I\!R^3$ tais que $I\!R^3 = S + W$. Temos uma soma direta ?

(c) Ilustre com um exemplo a seguinte proposição:

"Se S e W são dois subespaços de um espaço vetorial V de dimensão finita, então $dim(S+W) = dim(S) + dim(W) - dim(S \cap W)$".

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Considere o seguinte subconjunto do $I\!R^3$

$$\gamma = \{ (1,0,2), (0,1,-1), (1,0,1) \} \,.$$

Pede–se:

(a) Mostre que γ é uma base para $I\!R^3$ e determine a matriz de mudança da base γ para a base canônica β.

(b) Dado o elemento $u = (1,1,1)$. Determine o vetor de coordenadas $[u]_\gamma$.

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno usual, isto é, $\langle A , B \rangle = tr(B^t A)$. Seja S o subespaço de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ gerado pelo elemento

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

Pede–se:

(a) Dada a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Determine sua projeção ortogonal sobre o subespaço S.

(b) Determine uma matriz $C \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $\langle A , C \rangle = 0$.

A.6.3 Segundo Teste

Questão 1. **(5.0 Pontos)**

Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual. Seja S o subespaço gerado pelo vetor $u = (-1,\ 1,\ -1)$. Pede–se:

(a) Determine o complemento ortogonal de S , isto é, o subespaço $S^{\perp}$.

(b) Determine uma base ortogonal para o subespaço $S^{\perp}$.

(c) Dado o vetor $v = (3,\ 1,\ -1)$ calcule sua projeção no subespaço $S^{\perp}$.

Questão 2. **(5.0 Pontos)**

Considere a seguinte transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$T(x, y, z) = (\ x - y + z\ ,\ x + y + 2z\ ,\ x + 5y + 4z)\ .$$

Pede–se:

(a) Determine a representação matricial de T com relação à base canônica.

(b) Determine $Ker(T)$, $dim(Ker(T))$, $Im(T)$ e $dim(Im(T))$.

(c) T é uma transformação linear injetora ?

(d) Determine o complemento ortogonal de $Im(T)$.

A.6.4 Segunda Prova

Questão 1. **(2.5 Pontos)**

Considere a seguinte transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$T(x,y,z) \;=\; (\; y+z \;,\; x+z \;,\; x+y+2z \;) \;,$$

e as seguintes bases para o espaço $\mathbb{R}^3$

$$\beta \;=\; \{\; (\;1,\;0,\;0\;),\;(\;0,\;1,\;0\;),\;(0,\;0,\;1)\;\}$$

$$\Gamma \;=\; \{\; (\;1,\;0,\;1),\;(\;0,\;1,\;1),\;(\;0,\;0,\;1\;)\;\}$$

Pede–se:

(a) Determine $[T]^{\beta}_{\beta}$ e $[T]^{\Gamma}_{\beta}$.

(b) Determine $Ker(T)$, $dim(Ker(T))$, $Im(T)$ e $dim(Im(T))$.

(c) Encontre os autovalores e autovetores da transformação T.

(d) Encontre uma base α para o $\mathbb{R}^3$ de modo que $[T]^{\alpha}_{\alpha}$ seja uma matriz diagonal.

(e) Dado o vetor $v \;=\; (\;1,\;1,\;-1\;)$ calcule sua projeção no subespaço $Im(T)$.

Questão 2. **(2.5 Pontos)**

Para quais valores do parâmetro a as matrizes abaixo são diagonalizáveis ?

$$(a) \quad A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad (b) \quad B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questão 3. **(2.5 Pontos)**

Mostre que a matriz $A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ é semelhante à matriz $D \;=\; \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Calcule de maneira eficiente A^n para $n \in \mathbb{N}$.

Questão 4. **(2.5 Pontos)**

Provar que se λ é um autovalor de A com o autovetor associado v , então λ^n é um autovalor de A^n com o autovetor associado v.

A.6.5 Exame

Questão 1. **(2.0 Pontos)**

Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Mostre que, se $\{ v_1 , v_2 , v_3 \}$ é um conjunto linearmente independente em E, então $\{ v_1 + v_2 , v_1 + v_3 , v_2 + v_3 \}$ também é um conjunto linearmente independente em E.

Questão 2. **(2.0 Pontos)**

Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$

$$U = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x - y - z + t = 0 \}$$

$$W = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y = 0 \quad e \quad z - t = 0 \}$$

Pede–se:

(a) Determine uma base para o subespaço $U \cap W$.

(b) Determine uma base para o subespaço $U + W$.

(c) Determine uma base ortogonal para o subespaço U.

(d) $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$? Justifique sua resposta.

(e) Calcule a projeção ortogonal de $v = (3, 1, -1, 2)$ no subespaço $U \cap W$.

Questão 3. **(2.0 Pontos)**

Considere o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual. Seja S o subespaço gerado pelos elementos do seguinte subconjunto:

$$\beta = \{ (1, 1, 1, 1) , (1, -1, 1, 1) \} \subset \mathbb{R}^4 .$$

Determine uma base ortogonal para $S^{\perp}$, através do processo de Gram-Schmidt.

Questão 4. **(2.0 Pontos)**

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$T(x,y,z) = (y + z , x + z , x + y + 2z) ,$$

e as seguintes bases para o espaço $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \} \qquad e \qquad \Gamma = \{ (1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1) \} .$$

Pede–se:

(a) Determine $[T]^{\beta}_{\beta}$ e $[T]^{\beta}_{\Gamma}$.

(b) Determine $Ker(T)$, $dim(Ker(T))$, $Im(T)$ e $dim(Im(T))$.

(c) Encontre os autovalores e autovetores da transformação T.

(d) Encontre uma base α para o $I\!R^3$ de modo que $[T]^{\alpha}_{\alpha}$ seja uma matriz diagonal e exiba a matriz $[T]^{\alpha}_{\alpha}$. Justifique sua resposta.

Questão 5. **(2.0 Pontos)**

Estudar quanto à possibilidade de diagonalização das matrizes dadas abaixo. Determine a matriz inversível P e a matriz diagonal D de modo que $P^{-1}AP = D$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & b & 2 \end{pmatrix}$ **(b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.